대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 2, 95-113. May 2006

수학의 형식과 대상에 따른 수학적 추론 지도 수준

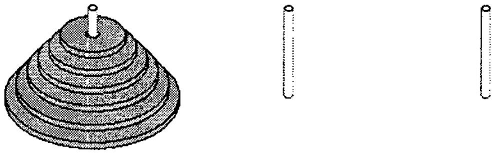
서 동 엽*

본 연구는 학교 수학에서 추론 지도의 수준을 보다 상세히 구분해 보고자 한 것이다. 수학의 특징으로부터, 대상에서 분리된 순수한 형식적 관점은 새로운 지식의 창안에서 한계를 지닌다는 점을 알 수 있으며, 수학교육에서도 이를 반영할 필요가 있다고 본다. 이런 점에서 귀납 추론과 형식적 연역 추론의 매개 단계로서 구체적 조작이나 감각 경험과 관련된 직관적 증명의 수준을 설정하는 것이 적절할 것으로 생각되며, 이 수준의 핵심적인 활동은 경험으로부터 일반성을 통찰하는 것이다. 이 수준은 낮은 수준의 귀납 추론보다는 대상과 분리되며 보다 형식적인 논리의 개입을 필요로 하는 과정에 있다. 이와 같이 보다 점진적으로 대상으로부터 분리되고 형식적 논리를 학습할 수 있도록 추론 지도 수준을 구분하고, 이에 따라 수학적 추론을 지도하는 것이 필요할 것이다.

I. 서 론

다음은 '하노이 타워'라는 이름으로 알려진 문제이다.

아래 그림과 같이 세 개의 기둥이 있고, 그 중 한 기둥에 크기가 서로 다른 원반 여러 개가 쌓여 있다. 이 원반 모두를 다른 기둥으로 옮기고자 한다. 옮길 때 주의할 규칙은 다음 두 가지이다.



(a) 한 번에 하나의 원반을 다른 기둥으로 옮길 수 있다.

(b) 큰 원반 위에 작은 원반을 놓을 수 있지만 반대로는 할 수 없다.

원반이 n개일 때 다른 기둥으로 옮기기 위해 필요한 이동 회수를 a_n이라고 하자. a_n과 a_{n-1}의 관계식을 구하고, 그 이유를 설명하여라.

위 문제에 대하여 다음과 같은 두 가지의 풀이를 생각해보자.

<풀이 1> 원반이 1개인 경우부터 차례로 조사하여 필요한 이동 회수를 구해보면 다음과 같다.

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, $\cdots$

차례로 변하는 수의 규칙을 조사해보면 어느 항의 수에 2를 곱하고 1을 더하면 다음 항의 수가 됨을 알 수 있다.

따라서 $a_n = 2a_{n-1} + 1$이다.

* 춘천교육대학교, dseo@cnue.ac.kr

<풀이 2> 원반이 1개인 경우부터 차례로 놓다 보면 n개의 원반을 옮기는 과정을 다음과 같은 3단계로 나눌 수 있다.

(a) 바닥에 있는 가장 큰 원반을 제외한 $n-1$개의 원반을 두 번째 기둥으로 옮긴다. 이 때 필요한 이동 회수는 a_{n-1}이다.

(b) 바닥에 있는 가장 큰 원반을 세 번째 기둥으로 옮긴다. 이 때 필요한 이동 회수는 1이다.

(c) 두 번째 기둥에 있는 $n-1$개의 원반을 세 번째 기둥에 있는 가장 큰 원반 위로 옮긴다. 이 때 필요한 이동 회수는 a_{n-1}이다.

따라서

$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$이다.

위에 제시된 두 가지 설명 중에서 수학적인 증명이라고 볼 수 있는 것이 있는가, 있다면 어느 것인가? 우선 첫 번째 풀이는 수학적인 증명이 아니라는 데 이견이 없을 것으로 본다. 왜냐하면, 첫 번째 풀이는 1, 3, 7, 15, 31로 나아가는 수의 규칙으로부터 일반화한 것으로 우리가 흔히 '귀납 추론', 그 중에서도 특히 '열거에 의한 귀납'(우정호, 2000)이라고 부르는 방법의 한 예이기 때문이다. 그렇다면 두 번째 풀이는 어떠한가? 두 번째 풀이는 첫 번째 풀이보다는 분명히 연역적이다. n개의 원반을 옮기는 과정은 풀이에 제시된 것과 같은 3단계로 구분할 수 있으며, 각각의 단계에 필요한 회수 역시 문제에 주어진 정의를 그대로 이용한 것이다. 이 점에서 연역적 추론의 한 사례로 볼 수는 있겠지만, 그것이 수학적 증명인지의 문제는 좀 더 생각해 볼 여지가 있을 것 같다.

Garnier와 Taylor(1996)에 의하면 수학적 증명은 가정에서 결론에 이르는 연쇄적인 함의로서 모든 전제가 참이고 논증이 타당한 경우를 말한다. 이를 다음과 같이 형식적으로 기술할 수 있다.

정리 P의 증명은 명제 S_1, S_2, $\cdots$, S_n의 계열이다. 여기서 $S_n = P$이고 각각의 S_i는 다음의 준거 중 한 가지 이상을 만족한다.

(a) 공리이거나 앞서 증명된 정리이다.

(b) 추론 규칙을 이용하여 선행 명제로부터 추론될 수 있다.

(c) 대체 규칙을 이용하여 선행 명제와 동치임을 보일 수 있다.

수학적 증명에 대한 이러한 정의에 비추어 생각해보면, 앞에서 제시된 문제의 두 번째 풀이가 수학적 증명이 되기 위해서는 'n개의 원반을 옮기는 것은 $n-1$개의 원반을 옮긴 후 1개의 원반을 옮기고 다시 $n-1$개의 원반을 옮기는 것으로 나눌 수 있다'는 두 번째 풀이의 핵심 아이디어가 공리이거나 앞서 증명되어야 할 것이다. 그리고 이를 위하여 우리는 적절한 공리계를 구성함으로써 위와 같은 일을 수행할 수도 있을 것이다. 즉 앞의 두 번째 풀이는 그 자체만으로는 수학적 증명으로 보기 어려우며, 수학적 증명이 되기 위해서는 적절한 공리와 간단한 몇 개의 정리가 선행되는 것이 필요조건임을 알 수 있다.

그러나 그렇게 한다고 하더라도 연구자가 볼 때 앞의 두 번째 풀이를 수학적 증명으로 볼 수 있는지는 여전히 논의의 여지가 있어 보인다. 왜냐하면 그러한 설명 방법은 여전히 원반을 옮기는 행동과 결부되어 있기 때문이다. 20세기 초에 수리철학의 기초를 확립하고자 했던 형식주의의 관점은 수학에서 의미를 배제하고 형식 언어로서 체계를 구성하고자 했던 시도였다(Klein, 1988). 이렇듯 수학을 대상과 분리된 순수한 언어 체계로 보는 관점에 따르면 수학은 추론의 형식이 매우 중요하며, 추론의 형식

이 어떤 대상의 존재성과 결부된 것은 아니다 (Otte, 1994).

수학을 순수한 언어 체계로 보는 입장에 대하여 Resnik(1992)은 '공리적 증명은 그 정리의 진리성을 보장하지 않는다'고 비판하고 있는 바, 증명은 논리적인 특징 외에 심리적이고 사회적인 특징을 가져야 하며 논리적인 것만으로는 정리의 결과를 더 확실하게 하지 못한다고 주장하였다. 그리고 Otte(1994)는 확실하고 절대적인 지식을 위해서는 특정한 맥락으로부터 자유로워야 한다는 생각에서 위와 같은 입장이 비롯되었음을 논하면서, 주관적인 경험이 제거되는 것과 동일한 방식으로 지식의 대상이 사라지며, 이 입장은 아직 미지이고 지각되지 않은 대상을 다루는 데 한계점이 있음을 지적한다. 이렇듯 수학을 대상과 분리된 순수한 언어 체계로 보는 입장에 반대하는 근거가 주로 심리적이거나 사회적인 문제, 새로운 지식의 창조의 문제와 연관된다고 할 때, 수학교육에서 수학적 증명을 다룰 때에도 이러한 관점을 고려해야 한다고 본다.

본 연구는 수학교육에서 형식적인 논리 지도를 목표로 하는 것이 아니라 수학적 의미를 부여하는 대상과 결부하여 추론을 지도한다고 할 때, 지도 수준의 문제를 논하고자 하는 것이다. 우리나라의 수학교육에서는 전통적으로 중학교 2학년에서 증명을 도입하며, 그 이전까지는 일부 명제를 제외하고는 대체로 귀납적 추론에 따라 직관적인 방법으로 지도하고 있다(서동엽, 2003). 그러나 학교 수학에서 수학적 증명 지도와 관련하여 학생들의 증명 쓰기 능력이 부족하다는 여러 연구 결과가 제시되어 있다(우정호, 1994; 서동엽, 1999; Fischbein, 2006). 여러 연구에서 공통적으로 지적되고 있는 내용 중 한 가지는 대부분의 증명 쓰기 문제에 대한 학생들의 정답률이 30% 정도를 넘지 못한다는 것이다.

현재 우리나라에서 증명을 도입할 때 수학적 증명에 대한 형식적 정의를 그대로 도입하는 것은 아니라고 본다. 그렇게 보는 이유는 학교 수학에서는 공리나 추론 규칙, 대체 규칙 등을 명시적으로 언급하지 않으며, 많은 부분에서 직관적인 접근 방법을 이용하고 있기 때문이다. 예를 들어, '삼각형의 내각의 합은 180°이다'라는 명제의 증명은 꼭지각을 지나고 밑변에 평행한 직선을 그리는 것으로 시작된다. 여기서 명확한 언급 없이 직관적으로 받아들여지고 있는 것은 '어떤 직선에 평행하고 그 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나는 직선은 하나뿐이다'라는 유클리드 원론의 평행선 공리를 포함하여 몇 가지가 있다. 또한 증명 과정에 삼각형의 그림이 제시되고 그림에 나타나는 기호를 이용하여 설명이 전개되고 있다는 점은 대상과의 관련성을 보여 주는 것이다. 그러나 학생들의 증명 쓰기 능력이 부족하다는 것은 현재 학교수학에서 다루고 있는 추론 지도에 문제점이 있음을 말해 주는 것이며, 이는 현재의 증명 지도 수준보다 낮은 수준의 추론 지도에 대한 연구의 필요성을 제기한다.

이렇듯 수학적 증명에 대한 학생들의 어려움을 고려하면서 학교 수학에 추론을 도입하는 방안과 관련하여 우정호(1998)는 '연역적 증명은 직관적인 이해가 선행된 후 학생들이 의문이 생겨 필요하다고 생각할 때 도입되어야 하며, 엄밀성은 학생들의 발달 수준에 맞추어야 한다'고 주장하고 있다. 이러한 관점은 Thom (1986)이 주장한 '엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 없다'는 주장에 의하여 뒷받침된다. Thom은 어떤 정리의 증명이 엄밀하다는 것은 그것을 이해할 만큼 적당히 교육받고 준비된 모든 독자들에 의해 수용되는 것을 준거로 들고 있는 바, 학교 수준에서 학생들에게 수용될 수 있는

지의 문제는 증명 지도의 수준과 연결되는 것으로 보는 것이 자연스러운 것 같다.

따라서 본 연구에서는 귀납적 방법에서 중학교 2학년 수준에서 도입되는 증명으로의 다소 급작스런 이행이, 현재의 증명 지도에서 나타나는 교육적 어려움의 원인을 설명한다고 보며, 이에 대하여 가장 낮은 수준의 귀납 추론에서 최종적인 수준에 이르기까지 보다 점진적으로 수학적 추론을 도입하기 위한 방안을 모색하고자 하는 것이다. 특히 이러한 이행에서 핵심적인 문제는 가정과 결론으로 나누는 증명의 형식과 더불어 증명에서 다루는 대상이 특수한 대상에서 일반적인 대상으로 변화하는 것과 관련된 것으로 판단되며, 이는 학생들의 직관적 이해와 증명에 대한 필요성의 인식이라는 관점에서도 살펴보아야 할 것이다. 그리고 영역 나누기 문제에 대한 구체적인 추론 상황을 통하여 점진적인 추론 지도의 수준을 예시하고자 한다.

Ⅱ. 수학적 추론의 형식과 대상

이 장에서는 수학의 발달 과정에서 나타나는 여러 특징에 비추어보아 수학적 추론의 특성과 관련된 형식과 대상의 관점에서 분석해 보기로 한다. 그런 다음 이와 관련된 수학적, 교육학적 논의를 보태기로 한다.

1. 수학사에서 살펴본 수학적 추론의 제 측면

고대 수학의 발상지인 이집트와 바빌로니아의 수학에서는 이론적 증명 없이 경험적 방법으로 많은 사실을 축적하였으며(Davis, 1972), 논리적인 수학적 추론의 모습은 찾아보기 힘들었다. 오늘날 우리가 '공리적 방법'으로 부르는 수학적 방법이 탄생하게 된 것은 고대 그리스에 와서이며, 이에 대한 중요한 계기가 된 것은 Hippocrates와 동시대의 소피스트 Antiphon에 의한 소진 과정(the process of exhaustion)의 도입이다(권석일, 2006). 소진 과정을 도입한 요지는 원에 정사각형을 내접시킨 다음 각각의 변을 밑변으로 하는 이등변삼각형을 원에 내접시키기를 계속하면 차례로 정사각형, 정팔각형, 정십육각형 등을 얻을 수 있으며, 이 과정을 계속하면 변의 길이의 합이 원주와 일치하도록 다각형을 내접시킬 수 있다는 것이다. 이에 대하여 많은 그리스 기하학자들은 양의 무한 분할 가능성에 관한 문제를 제기하였고, 그 결과 Zeno의 패러독스가 제기되었다. 이로부터 그리스 수학자들은 무한소와 무한대의 아이디어를 수학에서 추방함과 동시에 지각적으로 명백한 정리에 대해서도 엄격한 논증을 거치는 전통을 수립하게 되었다(권석일, 2006).

또한 고대 그리스인들은 수학에서 모든 정리의 근원이 되는 제일 원리로서 공리, 공준, 정의를 원론이라고 불렀으며, 당시의 여러 저자의 원론 중 Euclid의 원론이 탁월했던 점은 이러한 제일 원리의 추출과 이어지는 여러 정리의 배열에서 탁월했다는 것으로 귀결된다(권석일, 2006). 이 과정에서 분석과 종합의 과정이 도움이 된 것은 당연해 보인다. 우리가 논쟁을 벌인다고 하면, 어떤 주장에 대하여 그것은 무엇 때문에 그러한지 물을 수 있다. 여기서 제시되는 이유에 대하여 그것은 또한 무엇 때문에 그러한지 물을 수 있다. 이처럼 분석적 과정은 제일 원리를 지향하는 과정에서, 그리고 종합은 제일 원리로부터 출발하는 과정에서 작용하게 되며, 원론의 서술은 종합적 방식을 채택한 것으로 볼 수 있다.

유클리드의 원론 및 여기서 적용한 공리적

방법으로 인하여 고대 그리스인들은 수학적 진리는 영원하며 감각 경험과 독립적인 것으로 파악하게 되었다. 그러나 고대 그리스에서 원론 교육의 중요한 의의 중 하나는 수학적 진리를 통하여 이상향을 알게 하는 것이었으며 (Steiner, 1988), 이러한 이상향은 Plato가 선분의 비유에서 '가지계'로 부른 이데아의 세계를 뜻한다(우정호, 2000). 이러한 이데아의 존재는 고대 그리스인들이 수학적 지식을 대상으로부터 완전히 분리한 것은 아님을 함의하는 것으로 보인다.

Resnik(1992)은 수학적 대상을 언급하면서, 패턴의 구체적인 표상을 '형판(template)'이라고 부르고 있다. 여기서 패턴은 추상적이며, 형판과 일치하는 것으로서 구체적인 사물이 존재한다. 이러한 형판 개념을 이용하여 Resnik(1992)은 플라톤주의자의 수학적 증명에 대한 입장을 다음과 같이 논한다.

> 증명은 수학적 형판이 표상하는 패턴과 관련되어 있다. 이러한 형판과 형판에 관한 조작은 그것이 표상하는 패턴과 구조적으로 동형이며, 그렇기에 형판을 지배하는 법칙이 관련된 패턴으로 투사될 수도 있다. 더욱이 패턴과 관련된 정리의 증명은 형판에 대하여 입증된 법칙의 상에 기초한다.

위의 설명은 플라톤주의의 관점에서 수학적 증명은 수학적 대상을 염두에 두고 있음을 뜻하는 것으로 '삼각형의 내각의 합은 180°이다'와 같은 정리의 증명에서 이용되는 일반적인 삼각형의 그림은 이러한 형판의 역할을 하는 것으로 볼 수 있을 것 같다. 형식주의적 관점에서 원론은 무정의 용어를 설정하지 않고 있다거나, 몇 가지 암묵적인 전제를 이용하고 있다는 비판이 제기될 수 있는 바, 이는 원론이 직관을 완전히 정복하지는 못했음을 의미하는 것으로 해석된다.

이렇듯 대상과 결부하여 수학의 본질이나 수학적 추론을 생각하는 관점에서 형식적 관점이 보다 강화되는 방향으로 전환되는 과정에서 중요한 역할을 한 것이 문자의 등장 및 이로 인한 대수학에서의 형식불역의 원리인 것으로 생각된다. 문자의 발생에 이은 기호적 언어의 발달로 수학적 대상이나 연산의 바탕에 있는 구체적인 의미가 상당히 사라졌으며 그 결과 적용가능성이 방대하게 확장되었다. 그리고 수학자들의 관심의 초점이 계산의 대상에서 계산 그 자체로 이동되면서 대수는 '일반화된 산술'의 범주를 넘어서게 되었다(우정호, 1998). 우정호(2000)에 의하면 현대 대수학의 최초의 싹은 1830년경에 출판된 Peacock의 저서에서 '산술 대수'와 '기호 대수'를 구분한 데에서 찾아볼 수 있으며, 이러한 산술 대수에서 기호 대수로의 확장을 '형식불역의 원리'라고 불렀다. 우정호(1998)는 현대 수학의 현저한 특징으로 수학의 대수와, 곧 대수적 방법에 의한 수학 연구를 들고 있는 바, $\epsilon-\delta$방법에 의한 해석학의 산술화나 해석 기하학에 의한 기하학의 대수화 등은 이러한 경향이 반영된 것으로 볼 수 있을 것이다.

뒤이어 20세기에 접어들면서 수학 연구의 많은 부분은 논리적 기초와 구조를 검증하는 데 전념하게 되며, 공리론에 대한 연구를 탄생시켰다(Eves, 1995). 집합론으로 인한 러셀의 패러독스 등 수학적, 논리적으로 다루기 힘든 역설이 등장하였고, 이는 수학의 기초에 대한 보다 엄밀한 검토를 요구하였다(Hanna, 1983). 그 결과로 논리주의, 직관주의, 형식주의 등의 수리 철학 사조가 등장하게 되었으며, 형식주의에서는 무정의 용어와 공리를 도입하고 이로부터 정리를 전개해 나가는 공리적 방법에 의하여 수학을 구조적으로 체계화하고자 하는 노력을 하게

되었다. 이러한 노력은 고대 그리스에서 유클리드가 했던 것과 유사한 측면을 지니지만, 형식주의에서는 수학을 대상과 관련된 존재론으로부터 완전히 분리하고자 했다는 점에서 원론과 중요한 차이를 지닌다.

2. 수학적 추론의 형식과 대상의 측면에 대한 수학적·교육학적 논의

수학적 추론이 형식적으로만 이루어진다면 어떤 모습이 될 것인가? 이와 관련하여 Hofstadter(박여성 역, 1999)가 형식 체계의 예로 들고 있는 'MIU-체계'의 예를 들어보자. 이 체계는 다음과 같이 설명할 수 있다.

(a) MIU-체계에서는 M과 I, U의 세 문자만 사용하며, 세 글자를 적절히 나열하여 문자열을 만든다. 지금 가지고 있는 유일한 문자열은 MI이다.
(b) 다음 네 가지 규칙에 따라 문자열을 변형할 수 있다.
규칙 1 : 마지막 문자가 I인 경우 끝에 하나의 U를 첨가할 수 있다.
규칙 2 : Mx가 있다고 가정하자. 그러면 Mxx라는 문자열을 만들 수 있다.
규칙 3 : 문자열 중에서 III가 나타나면, III를 U로 바꿀 수 있다.
규칙 4 : 문자열 중에서 UU가 나타나면 그것을 삭제할 수 있다.

이 체계에서는 MI에서 시작하여 MIU, MII, MIIII, MIUIU 등의 문자열을 차례로 만들 수 있지만, MU는 결코 만들지 못한다. 이 체계와 관련된 수학적 대상은 파악하기가 쉽지 않으며, 공리적으로 정의된 규칙에 따라 전개되는 체계의 예로 볼 수 있다.

수학적 활동에서 위와 같이 공리적 방법에 따른 엄밀한 전개에 비판적인 연구를 찾아볼 수 있다. Resnik(1992)은 새로운 결과를 설명하거나 이전의 결과에 대한 대안적인 설명을 제공할 때 수학적 증명을 이용하는 것으로 보고 있으며, 수학적 증명을 공리나 정의 등으로부터 단순히 논리를 적용하는 것으로 보는 관점을 강력히 비판한다. 이러한 비판의 근거는 공리화되지 않은 영역에서 새로운 결과를 설명하고자 시도하는 증명에 있다. 이러한 증명은 바탕에 있는 공리계가 구성되어 있지 않으므로 비형식적으로 볼 수 있으며, 이 관점에서 20세기에 수학 기초론이 확립되기 이전의 증명도 이러한 범주에 들어간다. 그리고 Resnik은 이러한 범주의 증명을 '실행 증명(working proof)'이라고 부른다. Resnik은 실행 증명이 공리적인 증명보다 심리적으로 확신을 덜 준다거나, 결과를 보장하기 위하여 공리화할 필요가 있다고 생각하는 사람은 거의 없다고 본다. 특히 공리적 증명은 그 자체로 증명된 정리의 진리성을 보장하는 것은 아니며, 나아가 새로운 공리는 수학자들에게 회의적으로, 점진적으로 받아들여진다는 점을 지적한다. 이는 증명의 엄밀성은 수학에서 가장 중요한 특성은 아니라는 Hanna(1983)의 지적과 일치하는 것으로 보인다.

이렇듯 공리적 증명이 새로운 지식을 창안하는 데 도움이 되지 않는다는 것은 Otte(1994)가 Tharp가 제시한 예를 이용하여 다음과 같이 설명하고 있는 데에서도 찾아볼 수 있다. 그 예는 다음과 같은 것이다.

> 이야기에 나오는 사람은 Gertrude와 Hamlet뿐이다. Gertrude는 왕비이다. Hamlet은 왕자이고 Gertrude는 Hamlet의 어머니이다.

이 전제로부터 결론을 도출하고자 할 때, 예를 들어 'Gertrude와 Hamlet은 다른 사람이다'와 같은 명제는 논리적으로 도출되지 않는다. 또한 Hamlet의 눈이 무슨 색깔인지, 그의 어머니 Gertrude의 몸무게가 얼마인지는 알 수 없다는

것이다(Otte, 1994). 이것이 공리적 방법의 한계이다. 만약 수학이 개념과 정의에만 기초한다면 수학은 매우 제한적인 수단만을 가지기 쉽고, 순수주의나 인위성에 빠지기 쉬울 것이다. 이러한 논의의 결과로 Otte(1994)는 다음과 같이 주장한다.

> 진보는 주로 객관적인 실재와 관련되어 일어나며 하나의 패러다임이나 하나의 이론적 관점에서 나오는 것이 아니다. 진보는 항상 연속적인 발달과 불연속적인 발달을 아울러 가지는 것이며, 객관적인 실재를 경험하는 한 가지 방식이나 양식에만 의존하는 것은 아니다.

결과적으로 수학에서 공리적 방법에 따른 엄밀한 증명은 수학의 진보에서는 결정적인 역할을 하는 것이 아니라는 점을 알 수 있다. 이러한 관점이 시사하는 바는 수학교육에서 대상과 분리된 순수히 공리적인 방법을 지향하는 것은 바람직한 방향이 아닐 수도 있다는 점이다. 특히 1980년대 이후로 수학교육의 방향은 문제해결 교육으로 그 중심이 옮겨졌으며 학생들의 창의적 경험이 강조되고 있다는 점을 고려할 때, 공리적 방법은 새로운 문제의 해결이나 지식의 창조에서는 가장 중요한 방법이 되지 않을 수도 있다.

한편, 수학교육의 역사에서 수학의 형식적 측면을 가장 강조했던 시기로 '학교 수학 현대화 운동'을 들 수 있을 것이다. 이 시기의 학교 수학에 영향을 준 요인으로 수학의 비약적인 발전과 추상화가 증대되는 경향, 집합론의 출현, 보다 엄밀한 방법의 도입 등을 들 수 있으며, 특히 공리적 접근 방법이 많은 영향을 주었다(Hanna, 1983). Hanna(1983)는 당시에 이용되던 교재 중 UISCM 교재의 일부를 소개하고 있는 바, 이등변삼각형의 둘레의 길이는 $a+b+a$라는 것에서 $2a+b$임을 보이기 위하여 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙, 곱셈의 항등원과 교환법칙을 이용하여 증명해 가는 과정을 볼 수 있다. 특히 Kline이 학교 수학 현대화 운동기의 수업을 풍자한 덧셈의 교환법칙과 관련된 사례는 당시의 모습을 잘 대변해 주고 있다고 생각된다(우정호, 2000). 이러한 수학교육을 통하여 학생들이 결과적인 이등변삼각형의 둘레나 덧셈의 의미를 이해하기보다는 논리적 절차에 주목하게 되는 것은 자명해 보인다.

그러나 Freudenthal(1983)은 수학교육에서 논리 그 자체의 교육을 목표로 하는 것은 바람직하지 않다고 지적하고 있다. 그 이유는 순수한 논리의 교육은 수학이 아닌 논리학의 관점에서 일상적인 상황을 이용하여 더 잘 지도할 수 있다는 것인 바, 학교 수학에서 수학적 증명을 지도하면서 지식의 대상과 결부하여 지도하는 것이 교육적으로 건전한 방법이 될 수 있다고 생각된다. 이러한 입장에서 볼 때 대부분의 초등학생에게 $2+3=3+2$라는 것은 일상적인 상황으로부터 직관적으로 파악될 수 있는 의심없는 사실일 것이며, 새수학에서 덧셈의 교환법칙을 적용하려 했던 시도는 비판받을 수 있을 것이다.

그렇다면 엄밀성과 관련된 학생들의 발달 수준은 어떻게 판단할 것인가? 이와 관련하여 van Hiele의 기하학습 수준 이론은 많은 시사점을 제공한다고 생각된다. van Hiele(1986)은 학생들의 기하학습의 수준을 크게 5수준으로 구분하고 있는 바, 제 1수준부터 제 3수준까지는 주변의 구체물이나 도형 등 시각적 대상과 관련하여 고찰하는 수준이다. 명제가 대상이 되어 증명이 가능한 것은 제 4수준이지만 엄밀한 증명의 필요성이나 공리체계의 가능성을 이해하지 못한다. 그리고 공리 체계의 성질을 이해하게 되는 것은 제 5수준에서이다.

이러한 van Hiele의 이론이 시사하는 바는,

학교 수준에서 공리적 방법은 학생들에게 매우 어렵다는 것과 증명에 이르기 전까지 학생들에게 구체물이나 시각적인 도형과 관련된 많은 경험을 제공해야 한다는 것이다. 특히 수학적 체계에서는 공리나 무정의 용어, 정의에서 시작하여 정리를 증명하면서 체계를 구성해 나가지만 학생들은 이러한 체계의 중간에서 출발하게 되는 것으로 보인다. 즉 학생들은 Freudenthal(1991)의 용어로 '현실'에 있으며, 수학화하는 과정에서 한편으로는 공리나 무정의 용어와 같은 방향으로, 다른 한편으로는 이를 통한 형식적 체계의 이해로 나아가게 되는 것으로 보인다.

III. 수학적 추론 지도의 수준

이 장에서는 먼저 수학적 추론 지도와 관련하여 형식적인 지도 방법에 대한 대안으로 연구된 선행 연구를 살펴보고, 앞서 논의한 형식과 대상의 관점에서 선행 연구를 분석한다. 그리고 이로부터 수학적 추론 지도의 수준에 대한 논의를 전개한다.

1. 추론 지도의 수준에 대한 선행 연구

추론 지도의 수준과 관련된 선행 연구로서 먼저 Miyazaki(2000)의 연구를 들 수 있다. Miyazaki는 증명에 대한 수준을 설정하기 위한 축으로 '내용'과 '표현'을 이용하여 학생들의 증명에서 네 가지 수준을 설정하고 있으며, 여기에 학생들의 사고 과정을 분석하여 두 수준을 첨가하였다. 내용의 축에서는 '귀납 추론'과 '연역 추론'으로 나누고, 표현의 축에서는 '논증의 기능적 언어'와 '그림이나 조작가능한 대상 등 다른 언어'로 나누어 4가지 기본 수준을 설정하였다. 기본 수준은 각각 논증의 기능적 언어를 이용하는 연역 추론(증명 A), 그림이나 조작가능한 대상을 이용한 연역 추론(증명 B), 그림이나 조작가능한 대상을 이용한 귀납 추론(증명 C), 논증의 기능적 언어를 이용한 귀납 추론(증명 D)이다. 여기서 증명 D는 구체적 조작에서의 증명과 형식적 조작에서의 증명으로 세분되며, 이러한 중요한 준거는 문자를 자리지기 역할을 하는 미지수로 보는가 아니면 일반적인 임의 변수로 보는가의 차이이다. 또한 증명 B는 구체적 조작에서의 증명과 형식적 조작에서의 증명으로 나누어진다. 구체적 조작에서의 증명은 포괄적 예를 이용하는 것을 의미하며, 형식적 조작에서의 증명은 구체적 대상에 의존하지 않고 명제 간의 함의 관계를 이해하는 수준으로 본다.

Miyazaki(2000)는 이러한 여섯 수준으로부터 증명 D를 제외한 후, '증명 C → 구체적 조작에서의 증명 B → 형식적 조작에서의 증명 B → 증명 A'의 순서로 증명을 지도할 것을 제안하고 있다. 증명 C에서 구체적 조작에서의 증명 B로 이행하기 위해서는 다양한 활동을 통하여 불변의 성질과 관계를 찾고 이를 확장하는 과정이 필수적이라고 보고 있으며 일반성과 관련된 문제를 학생들에게 제기하게 하고 있다. 여기서 다음 수준인 형식적 조작에서의 증명 B로 이행하기 위해서는 선행 활동이 증명하고자 하는 명제를 어떻게 정당화할 수 있는지를 물어보는 것이 도움이 되며, 다음 수준인 증명 A로 이행하기 위해서는 논증의 기능적 언어의 중요성을 알려줄 필요가 있는 것으로 본다.

이 연구가 주는 시사점은 크게 세 가지로 생각된다. 첫째는 학생들의 증명의 수준을 구분하면서 추론과 관련된 내용과 더불어 논증 언어인가 그림이나 조작가능한 대상인가와 같은

표현의 문제를 중요한 준거로 들고 있다는 점이다. 이는 앞서 논의한 바와 같이 대상의 관점이 학생의 증명 수준에서 중요한 역할을 할 수 있음을 시사한다. 둘째는 귀납 추론인 증명 C에서 연역 추론인 구체적 조작에서의 증명 B로 이행하는 단계에서 일반성과 관련된 문제를 제기하고 있다는 것이다. Miyazaki가 제안하고 있는 구체적 조작에서의 증명 B는 Semadeni (1984)가 제안하고 있는 '활동 증명(action proof)'의 개념과 매우 유사한 것으로 생각되며, 그 요지는 포괄적인 예로부터 불변인 성질을 인식하게 하는 데 있다. 셋째는 형식적 수준에서도 그림이나 조작가능한 대상에 의한 연역 추론의 존재를 설정하고 있다는 것이다. 이는 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움을 해결하는 중간 단계로서 작용하게 될 가능성이 있는 것 같다.

다음으로 살펴보고자 하는 선행 연구는 기하학의 역사적 발생 과정으로부터 증명의 단계를 구분한 Branford의 연구이다(권석일, 2006). Branford는 실험적 증명, 직관적 증명, 수학적 증명의 세 단계를 거쳐서 증명이 발달한 것으로 보고 있다. 실험적 증명은 감각 지각에서 타당성의 근거를 찾으며 특정한 사실만을 보여주지만, 증명의 본질을 이해하기 위하여 반드시 거쳐야 하는 단계이다. 직관적 증명은 감각적 경험에 의존하지만 증명의 일반적인 본질을 찾는 단계로서, 개념적 통찰에 의하여 보편성과 일반성을 어느 정도 확보하는 단계이다. 수학적 증명은 일반성이 확보된 사실들의 체계화를 의미하며, 감각 경험보다는 추상적인 개념에 주로 의존하는 단계이다.

여기서 Branford가 제시하고 있는 직관적 증명의 단계는 위에서 Miyazaki가 제시하고 있는 구체적 조작에서 증명 B와 유사한 점을 지니는 것으로 생각되는 바, 그것은 감각 경험에 의존하지만 보편성과 일반성을 어느 정도 확보한다는 점 때문이다. 그러나 Miyazaki와 다른 점은 그 수단으로서 개념적 통찰을 말하고 있다는 점이다.

이렇듯 가장 낮은 수준으로 경험적 귀납 추론을, 가장 높은 수준으로 연역적 증명을 설정하고, 중간 수준의 존재를 가정하는 입장은 Hoyles(1996)의 연구에 의해서도 지지된다. Hoyles에 의하면 학생들의 증명에 대한 이해는 어떤 계층을 따라서 조직된다고 보는 것이 일반적 입장이며, 가장 낮은 수준은 행동에 의한 경험적 '증명'이나 절차적 정당화이고, 가장 높은 수준은 전제와 여러 성질에 근거한 엄밀한 연역적 논증이나 관계적 정당화라고 한다. 이상의 선행 연구 결과로부터 학생들의 수학적 추론의 수준과 관련지어 형식적 측면과 더불어 대상의 측면이 중요한 준거가 될 수 있음을 알 수 있으며, 핵심적인 문제의 하나로 증명의 일반성과 보편성의 문제를 어떻게 다룰 것인지를 들 수 있는 것 같다. 다음 절에서 이러한 문제를 고려하여 추론 지도의 수준의 문제를 논의하고자 한다.

2. 수학적 추론 지도의 수준

앞에서 살펴본 추론 지도에 관련된 선행 연구를 통하여 대략적으로 공통되는 추론 지도의 수준을 구분해 볼 수 있다. 그것은 '구체적 사례를 통한 귀납 추론의 수준 → 구체적 사례로부터 일반성을 인식하는 수준 → 형식적 언어를 통한 연역 추론의 수준'이다. 이러한 수준의 구분은 추론이 귀납적인가 또는 연역적인가의 기준과 더불어 수학적 대상에 의존하는가 아닌가에 따른 구분으로 제 II장에서의 논의와 관련지어 보더라도 수학적으로 타당한 것으로 생각된다. 이러한 수준의 구분은 매우 대략적인

것으로 보다 세부적인 수준을 나누기 위해서는 많은 연구가 필요한 문제일 것이다.

여기서 수준 구분과 관련하여 우정호(2000)의 다음과 같은 지적을 참고할 필요가 있을 것 같다.

> 연역적 증명은 직관적인 이해가 선행된 후 학생들이 의문이 생겨 필요하다고 생각할 때 도입되어야 하며, 엄밀성은 학생들의 발달 수준에 맞추어야 한다. 엄밀성은 수학적 추론에 친숙하게 되고 수학적 사고가 성숙하면서 분명하다고 생각하던 것에 의문이 생기게 되고 결함이 보이게 되어 보다 엄밀한 증명을 요구하게 되면서 점진적으로 세련되어야 한다. 이는 수학의 역사적 발달과 수학자의 수학적 사고에 부합되는 교육적 조처이다.

여기서 핵심적인 생각은 학생들에게 엄밀한 증명은 학생에게 부과되는 형태로서보다는 학생이 필요성을 느낄 때 도입되어야 하고, 엄밀성의 수준은 점진적으로 세련된다는 것이다. 서론에서 제시했던 하노이 타워 문제에 대하여 대부분의 초등학생들은 1, 3, 7, 15, ⋯라는 수열로부터 '어떤 항의 2배 더하기 1'이 다음 항과 같다는 것을 납득하며 더 이상의 엄밀함을 요구하지 않는다. 이 학생들은 n개의 원반의 움직임을 3단계로 나누어 생각하는 활동은 불필요한 활동이라고 생각할 수도 있다. 만약 그렇다면 학생들이 수열의 규칙으로부터 일반화하는 것의 결함을 볼 때까지 기다려야 할 것이다. 이 점에서 학생들에게 경험적이거나 직관적인 추론으로 해결되지 않는 문제 상황을 제공하여 보다 엄밀한 증명을 도입하는 것이 적절할 수도 있을 것이다. Otte(1994)는 삼각형의 무게중심은 한 점에서 만난다는 정리와 관련하여, 두 중선이 한 점에서 만난다는 것은 직관적으로 자명하지만, 다른 한 중선도 앞의 두 중선의 교점을 통과하는 것은 직관적으로 자명하지 않다고 본다. 이런 경우 학생들은 무엇인가 다른 수단을 찾게 될 가능성이 있다고 본다.

한편 구체적 사례로부터 일반성을 인식하는 수준에서 어떤 지도 방안이 필요하며, 이로부터 형식적 언어를 통한 연역 추론의 수준으로 어떻게 이행시킬 것인지에 관한 논의가 필요할 것으로 생각된다. Dreyfus와 Hadars(1987)는 학생들이 증명에서 잘 이해하지 못하는 증명의 본질 중 하나로 증명의 일반성을 들고 있다. 예를 들어 '삼각형의 내각의 합은 180°이다'와 같은 정리는 특수한 삼각형이 아니라 '모든' 삼각형에 대하여 서술하는 것이며, 이에 대한 수학적 증명은 '모든' 삼각형에 대하여 적용가능한 방법이 되어야 한다.

Otte(1994)는 일반적인 것은 아직 완전히 결정되지 않았으며, 실제로 명확하게 기술할 수 있는 것을 초월한 존재로 보아, 우리는 일반적인 것에 접근하는 구체적 활동이나 직관과 같은 다른 방법이 필요함을 주장하고 있다. 특히 Otte는 지식의 본질적 측면이 일반성인데 이는 선험적인 것에 의존하기 보다는 오히려 객관적 실재에 대한 참조가 본질적이라고 보고 있다. 이러한 Otte의 주장은 수학교육에서 학생들에게 일반성을 이해시키기 위하여 곧바로 형식적 언어로 나가는 것보다는 직관적 경험을 제공해야 한다는 것으로 해석할 수 있다. 그리고 Otte(1994)는 수학적 추론에서 도식을 이용하는 것이 수학적 증명의 형식적 특성에 대한 통찰을 보여 줄 수 있다고 주장한다.

본 연구자는 이러한 Otte의 주장이 매우 설득력이 있다고 생각하며, 통찰의 중요성은 Branford가 직관적 증명의 단계에서 강조한 것이기도 하다. 이와 관련하여 다각형의 대각선의 개수를 구하는 방법을 예로 들어보자. 사각형부터 변을 하나씩 늘여가면서 차례로 대각선

의 수를 조사해보면 2, 5, 9, 14, 20, $\cdots$와 같은 수열을 얻을 수 있다. 그러나 이 수열로부터 n각형의 대각선의 개수인 $\frac{n(n-3)}{2}$를 구한다는 것은 매우 어려워 보이며, 구한다고 하더라도 학생들은 일반성을 인식하기 어려울 것으로 보인다. 일반성을 인식하기 위하여 필연적인 단계는 'n개의 점에서 자신과 이웃한 두 점을 제외한 $n-3$개의 점과 선분으로 연결할 수 있다'는 사실과 '연결한 선분은 각각 두 번씩 세어진다'는 사실을 통찰하는 것이다. 이로부터 위의 공식의 일반성은 다소 자연스럽게 인식될 수 있을 것이다. 또한 교사는 학생들이 다각형에 대각선을 그리는 구체적 경험으로부터 다각형의 각각의 꼭지점에서 출발하는 대각선에 주목하게 함으로써 학생들의 통찰을 도울 수 있을 것으로 생각된다. 이렇듯 수학적 정리나 증명의 일반성의 아이디어는 형식적 언어만으로 파악되기는 어려운 것으로 생각되며 위와 같은 직관적 수준에서의 통찰의 경험이 필요한 것으로 생각된다.

이로부터 학생들이 수학적 증명의 수준으로 이행하기 위해서는 Miyazaki(2000)가 제안한 바와 같이 자신의 활동으로부터 주어진 정리를 정당화해 보게 하는 경험을 통하여 언어적인 설명을 요구하는 일이 필요할 것이다. 이러한 언어적 설명은 기호를 이용한 수학적 증명의 기초가 될 것으로 본다. 이와 더불어 학생들에게 점진적으로 정의, 공리, 정리간의 관계 등을 학습하게 하면서 엄밀성의 수준을 점진적으로 높여가야 할 것이다. Fawcett(1938)의 연구에서는 이러한 수업의 성공적인 사례를 예시하고 있다. 그리고 이러한 과정은 전체적으로 보아 Freudenthal(1991)이 제안한 국소적 조직화의 과정을 거치는 것이 적절할 것이다. 이를 통하여 학생들은 점진적으로 정의화와 공리화의 과정을 경험할 수 있을 것이며, 언젠가는 전반적 조직화 수준까지 도달할 수 있을 것이다.

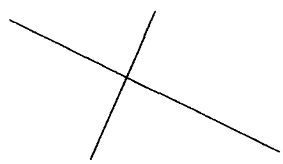
IV. 수학적 추론 수준의 실제 사례 : 영역 나누기 문제

이 장에서는 구체적인 문제 상황을 통하여 점진적으로 엄밀성을 더하면서 수학적 추론을 해 나가는 방안을 예시적으로 보이고자 한다. 이 장에서 다룰 문제를 크게 '영역 나누기 문제'라고 이름 붙일 수 있을 것이다.

1. 영역 나누기 문제 I.

첫 번째 영역 나누기 문제는 다음과 같다.

평면에 직선을 하나 그리면 평면은 두 영역으로 나누어진다.
여기에 직선을 하나 더하면 평면은 세 영역 또는 네 영역으로 나누어진다.
구하고자 하는 것은 직선을 계속 하나씩 더하여 그릴 때 평면이 최대한으로 나누어지는 개수이다.



직선이 n개일 때 평면이 나누어지는 최대 개수를 a_n이라고 하자. a_{n-1}과 n을 이용하여 a_n을 구하는 식을 써 보아라. 그리고 a_{10}을 구하여라.

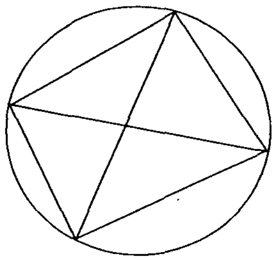
위 문제에서 차례로 직선을 하나씩 추가해

보면 영역의 수는 2, 4, 7, 11, ⋯과 같이 증가함을 알 수 있다. 이로부터 $a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = a_2 + 3$, $a_4 = a_3 + 4$와 같은 식을 얻을 수 있으며 이로부터 $a_n = a_{n-1} + n$이라는 식을 구할 수 있다. 또한 이로부터 $a_{10} = 56$임을 구할 수도 있다. 그러나 이렇게 구한다면 가장 낮은 수준에서의 귀납 추론이 될 것이다. 학생들이 이러한 귀납 추론의 결함을 알게 하기 위해서는 다른 경험이 필요할 것이며, 이를 위하여 두 번째 영역 나누기 문제를 제시한다.

2. 영역 나누기 문제 II

두 번째 영역 나누기 문제는 다음과 같다.

원 둘레에 2개, 3개, 4개의 점을 찍고, 모든 점을 선분으로 연결해 보아라. 그림은 원 둘레의 점이 4개인 경우를 보여 주고 있다.



원은 최대 몇 개의 영역으로 나누어지는가? 지금까지 구한 수를 나열하고, 규칙을 찾아보아라. 생각한 규칙이 맞는지 원 둘레의 점이 5개, 6개, 7개, 8개인 경우도 조사하여 보아라. 만약 처음 생각한 규칙이 잘못되었다면 바른 규칙이 무엇인지 찾아보아라. 이 활동으로부터 원 둘레의 점이 n개인 경우에 n개의 점끼리 모두 연결한 선분에 의하여 원의 내부가 나누어지는 영역의 최대 개수를 a_n이라고 할 때, a_n을 a_{n-1}과 n을 이용하여 어떻게 나타낼지 생각해 보아라. 여기서 구한 결과를 이용하여 원 둘레의 점이 9개, 10개일 때 원이 최대 몇 개의 영역으로 나누어지는지 구하여라.

위의 문제를 해결하기 위하여 원 둘레의 점이 2개, 3개, 4개인 경우를 조사해보면 영역의 최대 개수는 차례로 2, 4, 8임을 확인할 수 있다. 이로부터 학생들은 $a_n = 2a_{n-1}$이라는 추측을 할 수 있다. 그런 다음 차례로 점의 수가 5개, 6개인 경우를 조사해보면 16과 31임을 구할 수 있다. 원 둘레의 점이 6개인 경우에 영역의 최대 개수가 31개임을 확인하면서 학생들은 자신들이 처음에 생각했던 추측이 틀렸음을 알게 된다. 그리고 원 둘레의 점이 8개인 경우까지 조사하여 학생들은 다음과 같은 수열을 얻게 된다.

2, 4, 8, 16, 31, 57, 99

이 수열에서 규칙을 찾는 것은 어려워 보인다. 그러나 첫 번째 영역 나누기 문제에서 규칙을 찾아본 경험에 기초하여 수열의 차이를 생각해볼 수 있고, 여기서 규칙이 보이지 않을 경우 차이의 차이를 계속하여 생각할 수도 있을 것이다. 결과적으로 다음과 같은 규칙을 알 수도 있을 것이다.

a_n :	2	4	8	16	31	57	99
b_n :		2	4	8	15	26	42
c_n :			2	4	7	11	16
d_n :				2	3	4	5

이 수열로부터 점이 9개인 경우와 10개인 경우를 차례대로 163, 256개임을 구할 수 있다. 그러나 이 방법 역시 귀납 추론이라는 점에서 한계를 갖는다. 즉 점이 6개인 경우에 처음의

추측이었던 $a_n = 2a_{n-1}$이 틀렸던 것처럼, 점이 9개나 더 많은 어느 경우부터 위의 추측은 다시 틀릴 가능성이 있다는 것이다. 따라서 궁극적으로 위 수열의 규칙에 대한 통찰이 필요하게 된다.

이 시점에서 앞에서 다루었던 첫 번째 영역 나누기 문제를 다시 돌아볼 수 있다. 왜냐하면 수열만 보고 규칙을 추측한 것이었으므로 틀릴 가능성이 있는 것이다. 이 문제에 대한 일반성을 통찰하기 위해서 필요한 사고는 다음과 같은 것이다.

> 주어진 직선이 5개라고 하자. 여기에 6번째 직선을 그리면 원래 있던 5개의 직선과 한 번씩 만나게 된다. 첫 번째 직선과 만나면서 영역 1개가 늘어난다. 두 번째 직선과 만나면서 영역 1개가 또 늘어난다. 다섯 번째 직선과 만날 때까지 영역은 모두 5개 늘어난다. 그리고 다섯 번째 직선을 통과하면서 영역은 1개 더 늘어난다. 그래서 6번째 직선을 그릴 때 영역은 6개 늘어난다.

이로부터 a_n을 구하기 위해서는 $n-1$개의 직선이 그려진 상황에서 n번째의 직선을 그리면서 생기는 $n-1$개의 교점으로 인하여 $n-1$개의 영역이 추가되고, 마지막 교점을 통과하면서 1개의 영역이 더 생긴다는 일반성을 직관적으로 이해할 수 있게 될 것이다.

이러한 생각은 위의 두 번째 영역 나누기 문제에도 적용될 수 있다. 두 번째 영역 나누기 문제의 풀이에 대한 통찰을 제공하는 핵심적인 사고의 하나는 원 둘레의 점이 1개가 추가될 때 어떤 변화가 일어나는지 살펴보게 하는 것이다. 예를 들어, 원 둘레의 점이 2개에서 3개로 늘어날 때 영역의 수는 2개 증가한다. 이를 세부적으로 보면 원 둘레의 점이 3개로 늘어나면서 직선은 2개 늘어나고, 직선 1개를 그릴 때마다 영역의 수는 1개씩 증가한다. 원 둘레의 점이 3개에서 4개로 늘어날 때 직선은 3개 늘어나고 영역의 수는 4개 증가한다. 이 때 직선 1개마다 늘어나는 영역의 수는 각각 1개, 2개, 1개이다. 이와 같이 직선이 1개 늘어날 때마다 늘어나는 직선의 수와 각각의 직선에 의하여 늘어나는 영역의 수, 결과적으로 늘어나는 전체 영역의 수를 조사하여 다음과 같은 표를 완성할 수 있다.

위의 표로부터 원 둘레의 점이 한 개 늘어날 때 각 직선에 대하여 늘어나는 영역의 수에는 어떤 규칙이 있음을 알 수 있다. 첫 번째 1은 그대로이며, 두 번째 수는 1씩, 세 번째 수는 2씩 차례로 커지며, 항상 마지막에 1을 더한다. 이 규칙으로부터 원 둘레의 점이 9개일 때 각 직선에 대하여 늘어나는 영역의 수는 1+7+11+13+13+11+7+1=64개가 되리라는 예상을

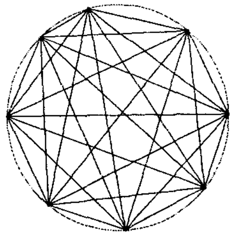
점의 수	늘어나는 직선의 수	각 직선에 대하여 늘어나는 영역의 수	늘어나는 영역의 수
2			
3	2	1+1	2
4	3	1+2+1	4
5	4	1+3+3+1	8
6	5	1+4+5+4+1	15
7	6	1+5+7+7+5+1	26
8	7	1+6+9+10+9+6+1	42

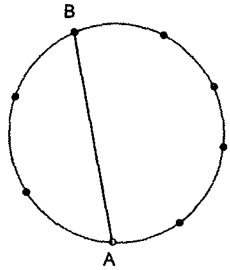
해 볼 수 있다. 그러나 이것도 귀납 추론이다.

여기서 한 가지 상기할 사실은 앞에서 풀었던 직선이 나누는 영역의 수에 대한 문제이다. 즉 위의 표에서 구한 각 직선에 대하여 늘어나는 영역의 수는 각 직선이 만나는 직선의 수에 1을 더한 수라는 것이다. 그래서 이 단계에서 각 직선이 원 둘레의 점과 연결되면서 만나는 선분의 수에 주목하는 것이 도움이 된다. 위의 표에서 각 직선이 만나는 선분의 수는 다음 표와 같이 구할 수 있다.

그리고 이로부터 각 직선이 만나는 선분의 수를 구하는 방법에 관심을 가질 수 있다. 다음 그림을 보자. 이 그림에서 점 A는 원 둘레에 8번째로 추가되는 점이고, 점 B는 원래 있던 7개의 점 중 하나이다. 이 때, 점 A와 점 B를 연결하는 선분은 원래 있던 몇 개의 선분과 만나겠는지 생각해보자.

이로부터 선분 AB가 만나는 직선의 수는 선분 AB의 왼쪽에 있는 점 2개와 선분 AB의 오른쪽에 있는 점 4개를 각각 연결하는 선분임을 알 수 있다. 그리고 그 개수는 $2 \times 4 = 8$(개)이다. 이로부터 점 A의 오른쪽으로 차례로 선분을 그려 나갈 때, 선분이 원래 있던 선분과 만나는 개수는 0×6, 1×5, 2×4, 3×3, 4×2, 5×1, 6×0임을 알 수 있다.





따라서 원 둘레 위의 점이 n개일 때 원이 나누어지는 영역의 최대 개수 a_n은 다음과 같이 표현할 수 있다. 단, 여기서 n은 2인 경우부터 생각하였으므로, a_n이 의미 있는 것은 n이 3 이상인 경우이다. 따라서 a_n은 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\{k(n-2-k)+1\}$$

$$= a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\{(n-2)k-k^2\} + (n-1)$$

$$= a_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} + (n-1)$$

$$= a_{n-1} + \frac{(n-1)(n^2-5n+12)}{6}$$

점의 수	늘어나는 직선의 수	각 직선에 대하여 늘어나는 영역의 수	각 직선이 만나는 선분의 수
2			
3	2	1+1	0+0
4	3	1+2+1	0+1+0
5	4	1+3+3+1	0+2+2+0
6	5	1+4+5+4+1	0+3+4+3+0
7	6	1+5+7+7+5+1	0+4+6+6+4+0
8	7	1+6+9+10+9+6+1	0+5+8+9+8+5+0

이러한 표현은 현행 교육과정 기준으로 고등학생 수준을 요구하는 것으로, 보다 낮은 수준에서는 형식화되기 이전의 아이디어를 활용하여 원 둘레 위의 점의 수가 9나 10인 경우를 구할 수 있다. 즉 9개인 경우는

$$99 + 0 \times 7 + 1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1 + 7 \times 0 + 8 = 163$$

이고, 10개인 경우는

$$163 + 0 \times 8 + 1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 0 + 9 = 256$$

이다. 이 과정은 단지 수의 규칙으로부터 일반적인 규칙을 찾아가는 귀납 추론에 비하여 학생들에게 일반성에 대한 통찰을 제공할 수 있는 설명을 제시해 준다.

그리고 위의 설명으로부터 형식적 증명으로 이행하기 위해서는 점진적인 과정이 필요할 것이다. 우선 위의 설명 과정에서 곱사건과 관련된 경우의 수에 대하여 더욱 면밀히 검토할 수 있다. 또한 문제에서 '최대' 개수를 요구하는 이유가 무엇인지 검토하는 과정에서 평면에서 직선의 위치 관계에 대한 지식을 검토할 수 있다. 이를 통하여 어떤 내용은 정리로, 또 어떤 내용은 공리화할 수 있을 것이며, 필요한 경우 정의화의 경험도 할 수 있을 것이다. 또한 장차 수열의 합을 $\sum$를 이용하여 구하는 방법을 일반화할 수도 있을 것이다.

특히 조합과 관련된 내용을 학습한 후에는 앞에 제시된 두 가지 영역 나누기 문제는 보다 더 새로운 시각에서 통찰할 수 있게 된다. 첫 번째 영역 나누기 문제의 경우는 다음 세 가지 경우로 나누어 풀이가 가능하다.

(a) 원래 있는 영역의 수는 1이다.
(b) 직선을 하나 그릴 때마다 영역은 1개 늘어난다. 따라서 직선이 n개 있으면 늘어나는 영역의 수는 n개 늘어난다.
(c) 직선을 그려 교점이 생길 때마다 영역은 1개 늘어난다. 두 직선이 있으면 교점이 1개씩 생겨나므로, 늘어나는 영역의 수는 ${}_nC_2$이다.

이 세 가지 경우로부터 $a_n = {}_nC_2 + n + 1$임을 알 수 있으며, 이는 $a_n = {}_nC_2 + {}_nC_1 + 1$ 또는 조합의 관계식을 이용하여 $a_n = {}_{n+1}C_2 + 1$로 나타낼 수도 있다.

이러한 생각은 두 번째 영역 나누기 문제에도 적용될 수 있다. 여기서도 영역의 수는 다음 세 가지 경우로 나누어진다.

(a) 원래 있던 영역의 수는 1이다.
(b) 원 둘레의 점과 점을 연결하는 선분을 그릴 때마다 영역은 1개씩 늘어난다. 따라서 원 둘레의 점이 n개이면, 연결하는 선분의 수는 ${}_nC_2$이다.
(c) 두 선분이 서로 교차할 때마다 영역은 1개씩 늘어난다. 두 선분이 교차하여 만나는 교점의 수는 n개의 점 중에서 4개의 점을 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_nC_4$이고, 따라서 두 선분이 교차하여 늘어나는 영역의 수는 ${}_nC_4$이다.

위의 세 가지 경우로부터 두 번째 영역 나누기 문제의 답은 $a_n = {}_nC_4 + {}_nC_2 + 1$로 간단히 나타낼 수 있다. 이 답은 첫 번째 영역 나누기 문제의 답인 $a_n = {}_nC_2 + {}_nC_1 + 1$과 구조적으로 매우 유사하며, 첫 번째 영역 나누기 문제에서는 직선의 수가 n인 반면, 두 번째 영역 나누기 문제에서는 원 둘레의 점의 수가 n이라는 차이가 있다. 이러한 과정을 통하여 영역 나누기 문제와 관련된 학생들의 사고는 점

진적으로 형식화될 수 있다.

3. 논의

지금까지 보여 준 영역나누기 문제의 사례는 본 연구에서 주장하고 있는 추론 지도의 수준의 한 단편을 보여준다. 증가하는 영역의 수의 규칙으로부터 영역의 수를 찾는 귀납 추론은 각각의 경우에 그림이 보여주는 영역의 수에 의존하고 있으며, 이는 거의 전적으로 대상에 의존하고 있는 것이다. 다음으로 일반성을 찾는 과정은 대상에 의존하기는 하지만 일반성을 인식하기 위한 새로운 관점을 요구하며 이로부터 통찰이 일어날 수 있다. 영역 나누기 문제 I에서 일반성에 대한 통찰은 'n번째 직선을 그릴 때 영역은 어떻게 늘어나는가?'와 같은 문제로부터 유발될 수 있으며, 영역 나누기 문제 II에서 통찰은 '한 선분이 다른 선분과 만나는 교점의 수는 선분 양쪽의 점의 수와 어떤 관계가 있는가?'와 같은 문제로부터 유발될 수 있다. 마지막으로 조합과 관련된 아이디어로부터 주어진 문제는 가장 일반적인 수준에서 통찰될 수 있으며, 주어진 그림에 대한 의존도는 가장 낮다고 할 수 있을 것이다.

앞서 제시된 예로부터 알 수 있는 사실은 수학적 대상 그 자체에 머무르는 것은 낮은 수준의 추론이 되기 쉬우며, 수학적 명제의 일반성을 파악하기 위해서는 대상과 관련된 활동에 대한 분석적 사고나 반성적 사고가 필요하다는 것이다. 그리고 주어진 문제나 풀이 상황을 그대로 보는 것이 아니라 다소 새로운 관점에서 바라보는 일이 필요하다는 것이다. 그리고 이러한 새로운 관점이 개입되는 만큼 주어진 대상에 대한 의존도는 줄어드는 것으로 생각된다.

V. 결 론

본 연구는 수학에 대한 형식과 대상의 관점에서 수학적 추론 지도의 수준 문제를 논한 것이다. 수학에서도 대상과 분리된 순수한 형식적 추론은 새로운 지식을 창안하는 데 효과적인 방법이 아니며, 수학교육에서도 이러한 방향을 시도했던 학교 수학 현대화 운동의 실패는 수학교육에서 지도하는 추론 역시 대상과 분리되는 것은 바람직하지 않음을 보여 준다. 또한 여러 선행 연구에서는 추론 지도에서 귀납 추론과 형식적 추론 사이에 감각이나 경험과 관련된 직관적 증명의 수준을 설정하고 있으며, 여기서 핵심적인 활동은 학생들에게 일반성을 인식하게 하는 문제이다. 이러한 일반성의 인식 및 수학적 증명을 위한 아이디어를 얻기 위해서는 학생들의 통찰이 필요하며, 영역 나누기 문제를 통하여 구체적 활동에 대한 통찰을 통하여 일반성을 확보하는 과정을 예시하였다.

증명 지도와 관련하여 학생들의 성취가 매우 낮음을 보여 주는 여러 연구가 제시되고 있는 바, 그 원인의 하나는 귀납 추론에서 증명으로의 급작스런 이행인 것 같다. 서동엽(1999)의 연구에 참가했던 중학교 2, 3학년 학생들 중 일부는 경험적 귀납의 방법과 학교에서 학습하는 증명을 주어진 명제에 대한 독립적인 두 가지 방법으로 인식하고 있었다. 또한 도형에 관한 명제의 증명에 제시된 그림을 일반적인 대표의 그림으로 보는 것이 아니라 귀납적 방법에서 다루었던 특수한 그림으로 인식하는 경향을 보여 주기도 하였다.

본 연구로부터 이러한 결과를 해석해보면, 학생들은 증명을 학습하면서 주어진 그림과 같은 대상과 증명의 형식을 자연스럽게 인식하지 못한다는 것을 알 수 있다. 그리고 그 원인의

하나는 학생들이 수학적 명제나 증명의 일반성을 인식하지 못하는 데에 있는 것 같다. 결과적으로, 보다 점진적으로 대상으로부터 벗어나면서 수학적 추론의 엄밀성과 형식성을 확보하는 방안을 모색해야 할 것이다. 점진적으로 정의나 공리의 필요성을 느끼게 하면서 형식성을 확보해 가야 할 것이며, 이러한 일련의 과정은 Freudenthal의 국소적 조직화 방법을 따르는 것이 한 가지 방법이 될 수 있을 것으로 본다.

수학사를 살펴보면 이집트와 바빌로니아에서 출발한 고대의 수학이 경험적이었고, 고대 그리스에서 공리적 방법의 전통이 생겨나게 된 계기가 소진 과정에 대한 Zeno의 역리의 등장이었으며, 수학에서 대상과 관련된 직관적인 측면을 완전히 배제한 형식주의적 입장이 대두된 것이 20세기 초임을 알 수 있다. 이는 초등학생들이 귀납 추론에 의존하여 결론을 도출하는 일은 자연스러운 일이며, 이로부터 수학의 형식적 체계를 이해하는 수준에까지 이르는 일은 점진적으로 다소 오랜 기간에 걸쳐 일어날 것임을 시사해 주는 것이다. 따라서 귀납 추론만으로는 학생들이 엄밀함에 있어 부족함을 느낄 수 있는 문제 상황을 개발하고, 이로부터 보다 세련되고 엄밀한 수준의 추론의 필요성을 느끼게 하며, 통찰에 의하여 일반성을 인식하게 하고, 이와 더불어 점진적으로 합의 관계를 비롯한 형식적 언어를 세련시키는 일이 수학교육에서 필요하다고 하겠다.

본 연구는 이러한 과정에서 구체적 조작이나 감각적 경험과 관련하여 추론하는 일이 수학적으로나 수학교육학적으로 건전한 일임을 논의한 것이며, 보다 구체적인 수준의 구분은 학교 수학에서 다루어지는 내용 체계 전반을 면밀히 검토하면서 이루어져야 한다고 본다. 또한 수준 구분에 따라 국소적 조직화 방법을 통하여 지도하는 구체적인 방법에 대한 연구도 이루어져야 할 것이다. 이러한 일을 후속 연구로 제안하면서 본 연구를 맺고자 한다.

참고문헌

권석일(2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 : 중학교 수학을 중심으로.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

______(2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. **수학교육학연구, 13**(2), 159-178.

우정호(1994). 증명 지도의 재음미. **대한수학교육학회논문집, 4**(1), 3-24.

______(1998). **학교 수학의 교육적 기초.** 서울 : 서울대학교 출판부.

______(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울 : 서울대학교 출판부.

Davis, P. J. (1972). Fidelity in mathematical discourse : Is one and one really two? *The American Mathematical Monthly, 79,* 252-263.

Dreyfus, T. & Hadas, N. (1987). Euclid may stay - and even be taught. In M. M. Montgomery & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook, pp. 47-58). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Eves, H. (1995). **수학사.** (이우영 · 신항균 공역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1953년 출판).

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof. Reston,* VA : The National Council of

Teachers of Mathematics.

Fischbein, E. (2006). **수학 과학 학습과 직관.** (우정호외 7인 공역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1987년 출판).

Freudenthal, H. (1983). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

______________(1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ganier, R. & Taylor, J. (1996). *100% mathematical proof.* Chichester: John Wiley & Sons.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto: Oise Press.

Hofstadter, D. R. (1999). **괴델, 에셔, 바흐.** (박여성 역). 서울 : 까치. (영어 원작은 1979년 출판).

Klein, M. (1988). **수학의 확실성.** (박세희 역). 서울 : 민음사. (영어 원작은 1980년 출판).

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41,* 47-68.

Otte, M. (1994). Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 299-321.

Resnik, M. D. (1992). Proof as a source of truth. In M. Detlefsen (Ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics* (pp. 6-32). London and New York: Routledge.

Semadeni, Z. (1984). Action proof in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

Steiner, H. G. (1988). Two kind of "Elements" and the dialectic between synthetic-deductive and analytic-genetic approaches in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 7-15.

Thom, R. (1986). 'Modern' mathematics: an educational and philosophic error? In Tymoczko, T. (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 67-78). Birkhäuser : Birkhäuser Boston Inc.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press, Inc.

The Levels of the Teaching of Mathematical Reasoning on the Viewpoint of Mathematical Forms and Objects

Seo, Dong Yeop (Chuncheon National University of Education)

The study tries to differentiate the levels of mathematical reasoning from inductive reasoning to formal reasoning for teaching gradually. Because the formal point of view without the relation to objects has limitations in the creation of a new knowledge, our mathematics education needs consider the such characteristics. We propose an intuitive level of proof related in concrete operations and perceptual experiences as an inter-mediating step between inductive and formal reasoning. The key activity of the intuitive level is having insight on the generality of reasoning. The details of the process should pursuit the direction for going away from objects and near to formal reasoning. We need teach the mathematical reasoning gradually according to the appropriate level of reasoning more differentiated.

* **Key words** : mathematical reasoning(수학적 추론), form(형식), object(대상), generality(일반성), insight(통찰)

논문접수 : 2006. 4. 4
심사완료 : 2006. 5. 6