한국소음진동공학회논문집 제16권 제7호, pp. 769~776, 2006.

Legendre 다항식을 이용한 주파수 응답 함수의 곡선접합과 모드 매개변수 규명

Modal Parameter Identification from Frequency Response Functions Using Legendre Polynomials

박 남 규† · 전 상 윤* · 서 정 민* · 김 형 구* · 장 영 기* · 김 규 태*
Nam-Gyu Park, Sang-Youn Jeon, Jeong-Min Suh, Hyeong-Koo Kim, Young-Ki Jang and Kyu-Tae Kim

(2006년 4월 20일 접수 ; 2006년 6월 5일 심사완료)

Key Words : Modal Parameter Identification(모드 매개변수 규명), Curve-fitting(곡선접합), Legendre Polynomial(Legendre 다항식)

ABSTRACT

A measured frequency response function can be represented as a ratio of two polynomials. A curve-fitting of frequency responses with Legendre polynomialis suggested in the paper. And the suggested curve-fitting algorithm is based on the least-square error method. Since the Legendre polynomials satisfy the orthogonality condition, the curve-fitting with the polynomials results to more reliable curve-fitting than ordinary polynomial method. Though the proposed curve-fitting with Legendre polynomials cannot cover all frequency range of interest, example shows that the suggested method is quite applicable in a limited frequency band.

1. 서 론

고유진동수, 감쇠 및 모드형상과 같은 모드 매개변수(modal parameter)는 선형 구조물의 동 특성을 결정하며, 모드 매개변수를 구하기 위해서는 주파수 분석기(FFT analyzer)를 이용해 구조물의 주파수 응답 함수를 측정해야 한다. 그러나 모드 매개변수를 주파수 분석기 자체로는 규명할 수 없으며, 측정된 신호의 후처리 과정을 통하여 구한다. 후처리 과정은 시간 영역과 주파수 영역에서 구현할 수 있으며, 각 영역에서는 여러 가지의 방법이 존재한다[1]. 모드 매개변수를 추출할 수 있는 후처리 과정이 포함된 주파수 분석기는 대부분이 고가이며, 주파수 분석기만을 단독으로 사용하여 모드 매개변수를 구하기 위해서는 주파수 분석기로부터 수집된 자료를 이용하여 사용자가 직접 후처리해야 한다.

주파수 영역에서의 모드 매개변수는 각 모드간의 간섭이 심하지 않은 경우, 1자유도 모델을 가정하여 circle-fitting 방법으로 매개변수를 추정할 수 있다[1,2]. 모드간의 간섭이 심한 경우는 다자유도 모델을 가정하여 매개변수를 추정하며, 모드의 수에 따라 여러 개의 유리분수(rational fraction)의 합으로 근사화할 수 있다. 유리분수는 주파수 영역에서 다항식으로 표현할 수 있으며, 다항식의 미정계수를 추정하여 구조물의 매개변수를 규명할 수 있다.

이때 미정계수의 추정은 오차를 최소화하는 최소자승오차(least-square error)의 방법으로 구할 수 있으나, 주어진 데이터는 항상 잡음(noise)을 수반하므로 수치적 안정성 문제가 중요하다. 즉, 주어진 데

† 책임저자 ; 정회원, 한국원자력연료(주)
E-mail : nkpark@knfc.co.kr
Tel : (042) 868-1197, Fax : (042) 868-1149
* 한국원자력연료(주)

이터의 상태에 의해 최소자승오차 방법으로 구한 결과는 달라지므로, 최소자승오차의 개념을 도입한 기존의 방법들은 곡선접합 시의 오차를 최대한 보상하고자 여러 가지의 방법을 동원하였다. Richardson, Formenti[3,4]는 Forsythe 다항식을 이용하여 수치적인 불안정성을 해소하고자 하였다. Jung 등은[5] 시간영역에서의 규명방법으로 대표적인 Prony 방법[2]과 주파수영역에서의 circle-fitting을 반복 계산하여 해의 신뢰도를 향상시키고자 하였다. 또한 최소자승오차의 방법으로 구한 해를 초기치로 설정하여 비선형 최적화 문제의 해를 찾아 신뢰성을 향상시킨 매개변수 규명방법이 제안되기도 하였다[6].

이 연구에서는 Legendre 다항식을 이용한 주파수 응답함수의 곡선 접합 방법을 논하였다. Legendre 다항식은 서로 직교하는 성질을 갖는 대표적인 다항식으로, 일반적인 다항식(ordinary polynomial)에 비해 양질의 곡선접합(curve fitting) 결과를 제공한다. Richardson, Formenti[3]에 의해 제안된 방법 역시 서로 직교하는 Forsythe 다항식을 이용하나, 그 알고리즘은 컴퓨터로 구현하기 까다롭다. 이 연구에서는 Legendre 다항식의 계수를 최소자승오차의 방법으로 구하였고, 곡선접합의 결과로부터 모드 매개변수를 규명하는 과정을 설명하였으며, 수치예제 및 실험예제를 통해 제안된 방법에 의한 매개변수 규명결과를 제시하였다.

2. 주파수 응답함수의 다항식 곡선접합

구조물의 응답 특성은 주파수 응답함수로 나타낼 수 있으며, 입력과 출력의 비로 정의된다. 다 자유도계의 경우, 자유도의 개수만큼 공진 점이 존재하며 주파수 응답 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_{i,e}(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi_i^k\phi_e^k}{\Omega_k^2-\omega^2+j2\omega\Omega_k\varsigma_k} \tag{1}$$

여기서 $H_{i,e}$는 가진 위치 'e'와 측정위치 'i' 에서의 주파수 응답 함수를 의미한다. ϕ_i^k 는 위치 'i' 에서의 k번째 모드(mass normalized mode)를 의미하며, Ω_k는 k번째의 고유진동수, ς_k 는 k번째의 감쇠비를 의미한다. 또한 j 는 허수를 의미하며 ω는 주파수(circular frequency)이다. 또한 Laplace공간 '$s(=j\omega)$' 에서 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_{i,e}(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{r_k}{s-p_k}+\frac{r_k^*}{s-p_k^*}\right]\Bigg|_{s=j\omega} \tag{2}$$

여기서 p_k 는 시스템의 극(pole)을 의미하며, 위의 식 (1)과 비교하면 $-\varsigma_k\Omega_k\pm j\Omega_k\sqrt{1-\varsigma_k^2}$ 과 동일함을 알 수 있다. r_k 는 나머지(residue)를 의미하며, 상첨자 '$*$' 는 켤레 복소수를 의미한다. 식 (1)과 (2)는 근본적으로 동일하며, 식 (2)에서 보듯이 n개의 자유도를 갖는 구조물은 $2n$개의 극을 갖는 다항식으로 근사할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 식 (2)로부터 다음과 같은 다항식의 꼴로 표현이 가능하다[3].

$$H_{i,e}=\frac{\sum_{k=0}^{m}a_k s^k}{\sum_{k=0}^{2n}b_k s^k} \tag{3}$$

여기서 a_k , b_k 는 다항식의 계수이며 실수이다. 식 (3)과 같이 측정된 주파수 응답함수를 다항식으로 근사화했을 때의 오차는 다음 식 (4)와 같이 정의할 수 있다.

$$\varepsilon=\sum_{k=0}^{m}a_k s^k-H_{i,e}\sum_{k=0}^{2n-1}b_k s^k-H_{i,e}s^{2n} \tag{4}$$

여기서 분모는 최고차항 b_{2n}으로 정규화 되었음을 가정하였다. 따라서 샘플 주파수의 개수가 L인 경우 위의 식 (4)는 식 (5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & j\omega_1 & \cdots & (j\omega_1)^m\\ 1 & j\omega_2 & \cdots & (j\omega_2)^m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & j\omega_L & \cdots & (j\omega_L)^m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{Bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}H_{i,e}(\omega_1) & j\omega_1H_{i,e}(\omega_1) & \cdots & (j\omega_1)^mH_{i,e}(\omega_1)\\ H_{i,e}(\omega_2) & j\omega_1H_{i,e}(\omega_2) & \cdots & (j\omega_2)^mH_{i,e}(\omega_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ H_{i,e}(\omega_L) & j\omega_LH_{i,e}(\omega_L) & \cdots & (j\omega_L)^mH_{i,e}(\omega_L)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{2n-1}\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}(j\omega_1)^{2n}H_{i,e}(\omega_1)\\ (j\omega_2)^{2n}H_{i,e}(\omega_2)\\ \vdots\\ (j\omega_L)^{2n}H_{i,e}(\omega_L)\end{Bmatrix} \tag{5}$$

또한 식 (5)를 간략히 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} - \{g\} = [A]\{x\} - \{g\} \quad (6)$$

따라서 오차의 크기($\|\{\varepsilon\}\|^2$)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\|\{\varepsilon\}\|^2 = \{x\}^T real\left([A]^H [A]\right)\{x\} - \{x\}^T real\left([A]^H \{g\}\right) - real\left(\{g\}^H [A]\right)\{x\} + real\left(\{g\}^H \{g\}\right) \quad (7)$$

여기서 상첨자 'H'는 Hermitian을 뜻하며, '$real(\bullet)$'은 복소수의 실수부를 의미한다. 오차의 크기를 최소화 하는 미지수 $\{x\}$를 찾기 위해 식 (7)을 미분하면 최소자승오차의 해는 다음 식 (8)을 만족해야 함을 알 수 있다.

$$[A_r]\{x\} - \{g_r\} = \{0\} \quad (8)$$

여기서 $[A_r]$은 $[A]^H[A]$의 실수부를 의미하며, $\{g_r\}$은 $[A]^H\{g\}$의 실수부를 의미한다. 위의 식은 전형적인 최소자승오차의 해를 구하는 문제로, 일반적인 해는 $[A_r]$의 역함수를 구하여 찾을 수 있다. 그러나 주어진 $[A_r]$의 차수가 부족(rank deficiency)하거나 불안정한 경우의 해는 신뢰도가 떨어진다.

3. Legendre 다항식 곡선 접합

Legendre 다항식을 이용하여 주파수 응답 함수를 표현할 수 있으며, 이때 식 (3)은 다음과 같이 바뀐다.

$$H_{i,e} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(s)}{\sum_{k=0}^{2n} b_k P_k(s)} \quad (9)$$

여기서 $P_k(s)$는 k차(k-th order) Legendre 다항식을 의미한다. 따라서 식 (5)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(j\omega_1) & P_1(j\omega_1) & \cdots & P_m(j\omega_1) \\ P_0(j\omega_2) & P_1(j\omega_2) & \cdots & P_m(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(j\omega_L) & P_1(j\omega_L) & \cdots & P_m(j\omega_L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{i,e}(\omega_1)P_0(j\omega_1) & \cdots & H_{i,e}(\omega_1)P_{2n-1}(j\omega_1) \\ H_{i,e}(\omega_2)P_0(j\omega_2) & \cdots & H_{i,e}(\omega_2)P_{2n-1}(j\omega_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{i,e}(\omega_L)P_0(j\omega_L) & \cdots & H_{i,e}(\omega_L)P_{2n-1}(j\omega_L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_{2n}(j\omega_1)H_{i,e}(\omega_1) \\ P_{2n}(j\omega_2)H_{i,e}(\omega_2) \\ \vdots \\ P_{2n}(j\omega_L)H_{i,e}(\omega_L) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

단, 여기서 정의된 ω의 구간은 Legendre 다항식의 직교성을 만족하는 −1과 1사이에 정의되어야 하나, Legendre 다항식이 갖는 대칭 또는 반대칭성(skew-symmetric)을 고려하여 0과 1사이의 구간으로 변환하여야 한다.

일반적인 다항식을 이용한 경우와 마찬가지로, 식 (8)을 이용하면 다항식의 계수를 결정할 수 있다. 그러나 Legendre 다항식의 경우, 각 다항식에서 갖는 최고 차수 및 각 차수에 대한 계수가 서로 다르므로 Legendre 다항식의 차수별 계수를 미리 정의해 주어야한다. 이것은 Legendre 다항식의 여러 표현 방식 가운데 다음과 같은 관계를 이용하여 규정할 수 있다[7].

$$P_n(s) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} s^{n-2m} \quad (11)$$

여기서, M은 정수 n이 짝수이면 $n/2$이고, 홀수이면 $(n-1)/2$이다.

다항식 계수의 규명으로부터 특정 주파수 응답함수를 Legendre 다항식을 이용해 모사한 후, 식 (2)와 같이 시스템의 극(pole)과 나머지를 이용해 다항식을 풀어 쓸 수 있다. 따라서 식 (1)과 (2)의 관계로부터 고유진동수(damped natural frequency)와 감쇠비는 다음과 같이 쓸 수 있다[1].

$$\omega_k = imag\,(p) \quad (12\text{-}1)$$

$$\varsigma_k = -\frac{real\,(p)}{|p|} \tag{12-2}$$

식 (12)에서 '$imag(\bullet)$' 는 허수부를 의미하며, '$|p|$' 는 주어진 극(pole) p의 크기를 의미한다.

전술한 바와 같이 식 (2)의 나머지(residue)는 모드형상과 관련이 있으며, k번째 모드 형상의 경우 다음과 같이 쓸 수 있다[1].

$$[r] = Q_k \{\phi\}\{\phi\}^T \tag{13}$$

여기서 Q_k는 모드의 정규화에 관련된 계수이고, r은 나머지(residue)를 의미한다. 비례감쇠를 가정한 모델의 나머지는 이론적으로 허수부만 존재한다. 질량에 대해 정규화된 모드(mass normalized mode)는 구조물의 변경이나 예측 시에 필요한 변수이며, 이때의 Q_k는 다음 식 (14)과 같이 쓸 수 있다[1].

$$Q_k = \frac{1}{j2\omega_k} \tag{14}$$

따라서 식 (13)과 식 (14)로부터 질량에 대해 정규화된 모드를 구할 수 있으나 반드시 가진점에서의 응답함수(driving point frequency response function)를 측정하여야 고유모드를 결정할 수 있다.

4. 예제 및 고찰

4.1 수치예제

Fig. 1은 2자유도계의 모델이며, 비례감쇠($10^{-5}[K]$)를 가정하였다. 5 %의 잡음(random noise)을 가정한 경우의 주파수 응답함수와 제시한 곡선접합방법으로 구한 주파수 응답함수는 Fig. 2와 같다. 4차 및 3차의 Legendre 다항식으로 식 (9)의 분모와 분자를 가정하였다. 규명된 다항식의 계수들을 이용하여, 모드매개변수는 식 (12)~(14)로부터 구할 수 있으며 Table 1, 2와 같은 결과를 얻을 수 있다.

결과에서 보듯이 고유진동수의 오차는 미소하지만, 감쇠의 경우 두 번째 감쇠비는 첫 번째 감쇠비에 비해 오차가 크다. 이것은 Fig. 2(a)에서 보듯이 두 번째 피크의 기울기가 급격해 곡선접합 시 오차가 발생한 것으로 볼 수 있다. 곡선접합으로 구한 나머지(residue)는 Table 1과 같으며 식(13), (14)의 관계로부터 구한 질량에 정규화된 모드는 Table 3과 같다. 정규 모드(normal mode)의 경우, 나머지의 실수 부분은 이론적으로 '0' 이 되어야 하나 곡선접합 과정의 계산상 실수부가 존재하는 것으로 나타났다. Table 1에서 보듯이 나머지의 실수부분은 허수부에 비해 그 절대적 크기가 매우 작으며 Table 3은 허수부만을 이용하였을 때의 결과이다.

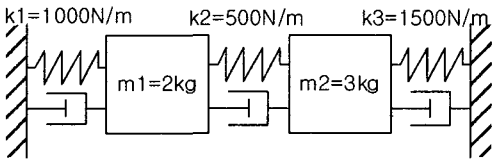
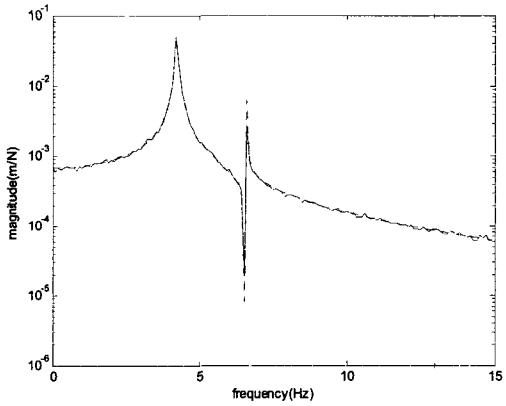
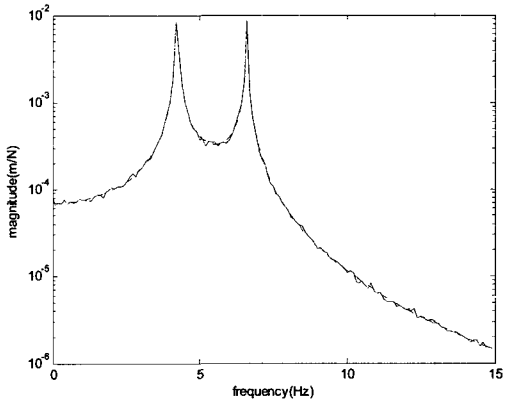


Fig. 1 Lumped parameter model



(a) Point frequency response function($H_{1,1}$)



(b) Cross frequency response function($H_{2,1}$)

Fig. 2 Frequency response function(solid) and curve-fitted results(dotted)

Table 1 Identified poles and residues of the lumped model

	Poles		Residues	
	Real	Imag	Real	Imag
$H_{1,1}$	-0.00341	26.58185	7.06×10^{-7}	-0.00896
	-0.00341	-26.58185	7.06×10^{-7}	0.00896
	-0.00886	41.38287	-5.85×10^{-7}	-0.00027
	-0.00886	-41.38287	-5.85×10^{-7}	0.00027
$H_{2,1}$	-0.00376	26.58223	5.48×10^{-8}	-0.00156
	-0.00376	-26.58223	5.48×10^{-8}	0.00156
	-0.00808	41.35250	-5.68×10^{-8}	0.00100
	-0.00808	-41.35250	-5.68×10^{-8}	-0.00100

Table 2 Identified damped natural frequencies and damping ratios of the lumped model

		ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	ς_1 (%)	ς_2 (%)
True		26.58	41.35	0.013	0.011
Curve-fitte	$H_{1,1}$	26.58	41.38	0.013	0.021
	$H_{2,1}$	26.58	41.35	0.014	0.019

Table 3 Identified mass normalized modes

d.o.f.	First mode		Second mode	
	True	Curve-fitting	True	Curve-fitting
1	-0.691	-0.690	-0.147	-0.149
2	-0.120	-0.120	0.565	0.555

4.2 실험예제

두께 1.6 mm의 강판을 대상으로 실험을 수행하였고 대상물의 형상은 Fig. 3과 같다. 12번 위치에서 가진하였고, 가속도계를 이용하여 30개의 측정점에서 주파수 응답함수를 측정하였다. 가속도는 변위의 미분이 두번 필요하므로 식 (3)의 양변에 s^2를 곱한 결과와 동일하다. Fig. 4는 가진점에서의 응답함수이며, 실측된 결과와 곡선접합에 의한 결과를 비교하였다.

곡선접합 대상 주파수 구간은 약 0 ~ 300 Hz 로 설정하였다. 이 구간에는 최소 6개의 모드가 존재하므로 최소 12차의 다항식을 고려하여야 하며, 고차 모드의 영향을 반영하기 위해 최고 14차 Legendre 다항식을 고려하였으나, Fig. 4(a)에서 보듯이 측정된 결과와 많은 차이가 존재한다. 이 오차는 다항식의 차수를 높여도 많은 변화가 없는데, 이것은 다항식의 차수 증가는 식 (10)에서 보듯이 고차항의 계수 규명과 관계가 있다. 즉 규명해야 할 고차항의 개수가 증가하면서 식 (11)의 Legendre 다항식의 고차항의 계수도 점점 증가한다. 따라서 식 (10)의 행렬을 구성하는 각 원소들의 크기의 비가 달라지며, 역변환 시 오차를 유발한다. 따라서 제안한 방법으로 비교적 넓은 주파수 대역을 대상으로 적용하기가 용이하지 않음을 알 수 있다.

이 경우, 주파수 구간을 상대적으로 협소하게 설정하면 Fig. 4(b),(c)와 같이 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있다. 적절한 주파수 폭의 설정은 이 논문에서 다루지는 않았으나, 모드의 밀집도(modal density)가 좌우하는 것으로 추정된다.

일반 다항식(ordinary polynomial)으로 곡선접합을 하면 Fig. 5(a)와 같이 비교적 협대역에서 차수를 증가 시켜 정확도를 향상시킬 수 있다. 그러나 동일한 차수를 갖는 Legendre 다항식을 이용한 방법과 비교하면 Fig. 5(b)와 같이 일반 다항식을 이용한 방법은 오차가 많이 개입함을 알 수 있다. Legendre 다항식을 사용한 경우와 동일한 차수를 갖는 일반적인 다

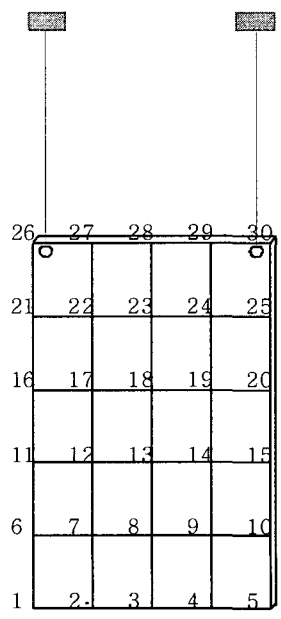
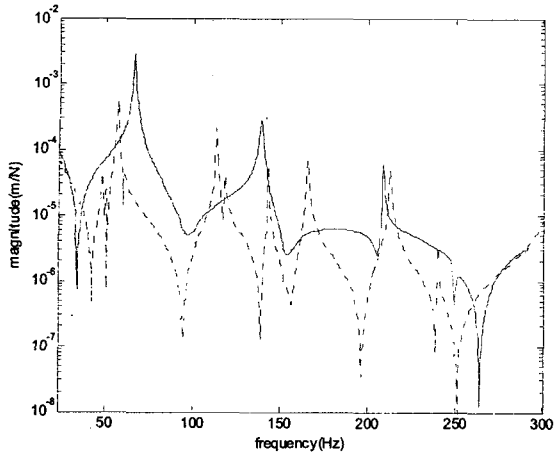
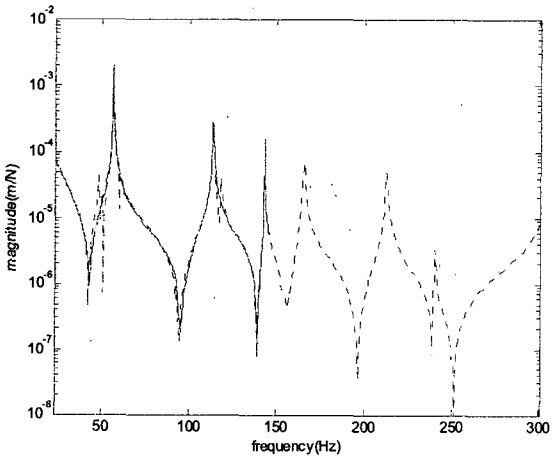


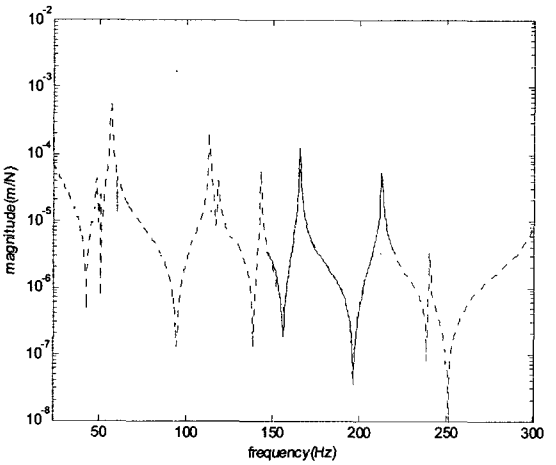
Fig. 3 Steel plate (280×400×1.6 mm)



(a) Broad band curve fitting



(b) First narrow band curve fitting

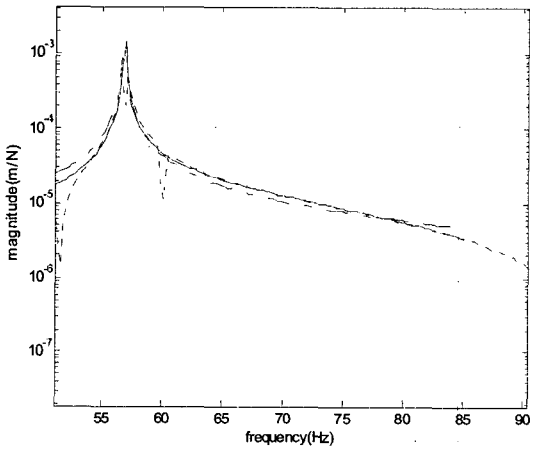


(c) Second narrow band curve fitting

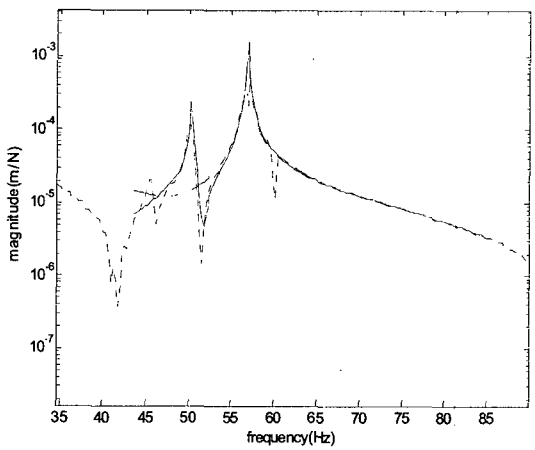
Fig. 4 Measured(dotted) and curve fitted(solid) FRF ($H_{12,12}$)

항식을 이용하여 구성한 $[A_r]$의 조건수(condition number)는 상대적으로 매우 높아서(약 10^{22}배) 역변환 과정 시 많은 오차가 개입할 수 있음을 간접적으로 알 수 있다.

곡선접합으로 구한 고유진동수 및 감쇠비는 Table 4와 같으며, 이 결과는 각 위치에서 규명된 매개변수들의 평균이다. 전술한 수치예제와는 달리, 이 예제에서 구한 나머지(residue)의 실수부는 허수부에 비해 0.1 ~ 0.2배 정도인데, 이것은 정규 모드가 아닌

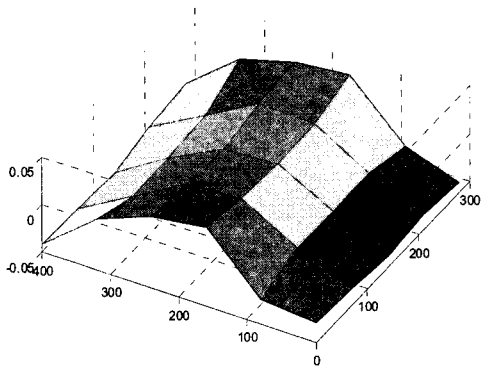


(a) 10^{th} order(solid) and 4^{th} order(dash dot) *ordinary polynomial fitting results*

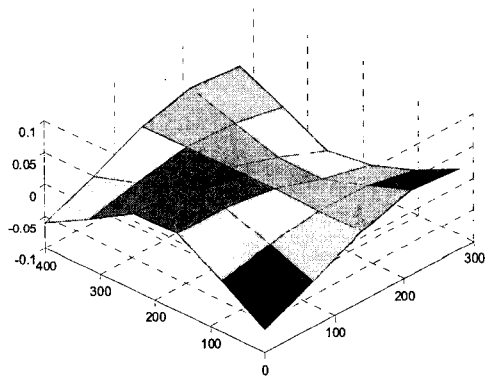


(b) 10^{th} order Legendre polynomial(solid) and 10^{th} order ordinary polynomial(dash dot) fitting

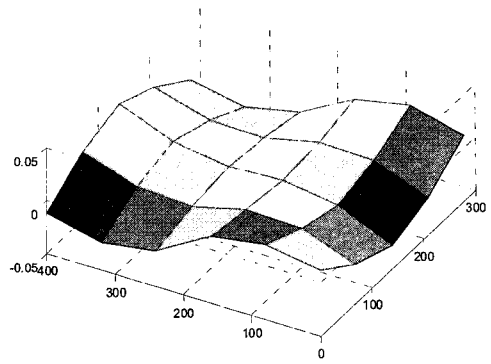
Fig. 5 Measured(dotted) and curve fitted(solid or dash dot) with ordinary and Legendre polynomials



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 6 Identified plate modes

Table 4 Identified natural frequencies and their damping ratio of the plate

	1st	2nd	3rd
Natural fr.(Hz)	55.98	115.26	143.36
Damping(%)	1.51	0.17	0.048

위상차가 존재하는 복소모드임을 의미한다. 위상차를 고려하지 않은 처음 3개 모드의 결과는 Fig. 6과 같다.

5. 결 론

모드 매개변수의 규명은 구조물의 응답 특성 측정이 선행되어야 하며, 측정된 응답신호의 곡선접합 과정을 통하여 구할 수 있다. 모드해석 전용 프로그램이 내장된 주파수분석기는 대부분 고가이므로, 전용 프로그램이 없는 사용자는 직접 모드 매개변수를 규명하여야 한다.

이 연구에서는 측정된 주파수 응답함수를 Legendre 다항식을 이용해 곡선접합(curve-fitting)하는 후처리 작업에 관하여 논하였다. Legendre 다항식은 서로 직교하는 특성이 있으므로 일반적인 다항식에 의한 결과보다 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있고 예제를 통해 이를 확인할 수 있었다.

제안된 방법을 수치 예제와 실험예제를 통해 적용성을 검증하였으며, 비교적 넓은 주파수 구간에 대해서는 제시한 방법의 신뢰성이 저하됨을 고찰하였다. 따라서 협소한 주파수 대역을 대상으로 하는 것이 바람직하며, 이 연구에서 구한 해를 초기치로 설정하여 최적화 문제의 해를 구한다면 더욱 신뢰성 있는 결과를 제공할 것으로 기대된다.

후 기

이 연구는 산자부 및 과기부의 지원으로 수행되었으며, 저자들은 관계기관 및 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Heylen, W., Lammens, S. and Sas, P., 1997, "Modal Analysis Theory and Testing" , Katholieke Universiteit Leuven.

(2) Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., 1998, "Theoretical and Experimental Modal Analysis" , Research Studies Press LTD.

(3) Richardson, M. H., Formenti, D. L., 1982, "Parameter Estimation from Frequency Response

Measurements Using Rational Fraction Polynomial", Proceedings of the 1st Int. Modal Analysis Conference, pp. 167 ~ 181.

(4) Richardson, M. H., Formenti, D. L., 1985, "Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements Using the Rational Fraction Polynomial Method", Proceedings of the 3rd Int. Modal Analysis Conference, pp. 390 ~ 397.

(5) Jung, W. B., Kim, J. Y., Kim, H., 1996, "Robust Modal Parameter Identification Using Total Least Square Method", KSME (A), Vol. 20, No. 3, pp. 843 ~ 849.

(6) Kim, S. B., Spencer, B. F., Jr., Yun, C. B., 2005, "System Identification of MIMO Systems Considering Analytically Determined Information", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 6, pp. 712 ~ 717.

(7) Kreyszig, E., 1999, "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, Inc., New York.