

지진해일 전파모의를 위한 실용적인 분산보정기법의 개발

Development of Practical Dispersion-Correction Scheme for Propagation of Tsunamis

손대희* · 조용식** · 하태민*** · 김성민****

Sohn, Dae-Hee · Cho, Yong-Sik · Ha, Tae-Min · Kim, Sung-Min

Abstract

In this study, new dispersion-correction terms are added to a leap-frog finite difference scheme for the linear shallow-water equations with the purpose of considering dispersion effects of the linear Boussinesq equations for propagation of tsunamis. The numerical model developed in this study is tested to the problem that the initial free surface displacement is a Gaussian hump over a constant water depth, and the predicted numerical results are compared with analytical solutions. The results of the present numerical model are accurate in comparison with those of existing models.

Keywords : tsunami, linear shallow-water equations, linear Boussinesq equation, dispersion effects, leap-frog finite difference scheme

요 지

본 연구에서는 지진해일의 전파과정을 모의함에 있어 분산을 보다 정확하게 고려하기 위하여 선형 천수방정식을 leap-frog 기법으로 차분화한 후 분산보정항을 추가하여 실질적으로 선형 Boussinesq 방정식과 같은 정도로 분산효과를 고려할 수 있게 하였다. 기법의 정확성을 검증하기 위하여 Gauss 분포의 초기 수면변위를 갖는 문제에 적용하여 해석해와 비교하였고, 그 결과 본 연구에서 개발한 기법이 기존의 기법에 비해서 정확한 결과를 제공하였다.

핵심용어 : 지진해일, 선형 천수방정식, 선형 Boussinesq 방정식, 분산효과, leap-frog 유한차분기법

1. 서 론

지진해일은 그 진행속도가 매우 빠르고 파장이 길어 파형의 큰 변화없이 먼 거리를 진행할 수 있으며, 태평양과 같은 대양에서 지진해일이 발생하게 되면 주변 지역은 물론 멀리 떨어진 지역에서도 심한 범람피해를 초래할 수 있다. 예를 들어, 1960년 칠레연안으로부터 100 km 정도 떨어진 태평양에서 발생한 지진해일은 대략 16시간이 지난 다음 하와이 제도를 강타하였으며, 22여 시간 뒤에 일본의 태평양 연안에 도달하여 범람하였다. 그리고, 2004년 12월 26일 인도네시아 수마트라 지역에서 발생한 지진해일은 수천km 떨어진 소말리아 지역에까지 전파하여 피해를 발생시켰다.

지진해일이 먼 거리를 전파할 때 분산효과와 Coriolis 효과가 중요한 역할을 한다(Kajiura와 Shuto, 1990). 지진해일은 진원지로부터 대양을 가로질러 이동할 수 있기 때문에 경우에 따라서는 지구의 곡률을 고려한 구좌표계를 사용하여 하며, 지진해일의 진행거리가 짧을 경우에는 직교좌표만

을 이용할 수도 있다(Liu 등, 1995). 지진해일의 파장이 짧을 경우, 지진해일 전파시에 국부 가속항에 비교하여 분산효과와 Coriolis 효과가 작게 나타난다(Cho, 1995). 동해의 지진해일은 수십 km의 짧은 파장을 가지만 파장에 비해서 먼 거리를 전파하기 때문에 수치모의를 위해서는 분산효과를 고려할 수 있는 수치모형을 이용하여야 하며, 전파거리만을 고려하였을 때에는 비교적 거리가 짧다고 판단할 수 있어 Coriolis 효과를 무시한 직교좌표를 이용하는 것이 가능하다. 참고로, 우리나라에 피해를 입히는 지진해일들은 대부분 일본 근해에서 발생하여 약 2시간에 걸쳐 우리나라 동해안에 전파하여 오며, 대표적인 과거의 지진해일로는 1983년 동해 중부 지진해일과 1993년 북해도 남서 외해 지진해일을 들 수 있다.

Cho와 Yoon(1998)은 선형 천수방정식을 leap-frog 기법으로 차분하여 일정한 수심에서 수치적인 분산오차를 Boussinesq 방정식의 물리적인 분산항을 대체하도록 수심,

*정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

**정회원 · 교신저자 · 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수(E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

***한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

****한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

격자간격 및 계산 시간간격 사이의 관계식을 유도하였다. 그러나, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식은 유한차분식이 Boussinesq 방정식의 분산항과 일치하는 수치분산을 생성하도록 격자간격과 계산 시간간격을 결정하여야 하기 때문에 실제 지형과 같이 수심이 변하는 지형에서는 수심이 변하는 경우마다 격자간격과 계산 시간간격을 변화시켜야만 하는 문제점이 있어 실제 문제에 적용이 어려웠다. Yoon(2002)은 가상의 격자간격을 이용하여 기존의 유한차분모형을 개선한 분산보정모형을 개발하였다. 그러나, Yoon(2002)이 개발한 모형은 가상 격자간격을 이용하기 위해 3차 보간을 수행해야 하고, 그로 인해 보간오차가 발생하는 문제점이 있었다. 그리고, 윤성범 등(2004)은 파동방정식의 인위적인 분산항을 이용하여 Boussinesq 방정식의 분산효과를 고려할 수 있는 수치기법을 제안하였다.

본 연구에서는 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 leap-frog 유한차분기법의 분산보정항을 수정하여 수심이 변하는 경우에 대해서도 격자간격과 계산 시간간격을 변화시키지 않으면서 Boussinesq 방정식의 분산항과 일치하는 수치분산을 생성할 수 있는 기법을 개발하였다. 그리고, 기존의 지진해일 전 파모형에서 많이 사용해 왔던 선형 천수방정식을 지배방정식으로 선정하여 기법의 적용성을 향상시켰다.

2. 지배방정식과 수치기법

일본 서해에서 발생하여 우리나라 동해안에 영향을 주는 지진해일과 같이 파장에 비해 비교적 먼 거리를 전파하는 원해 지진해일(offshore tsunami)을 모의하기 위해서는 분산을 고려하기 위해 선형 Boussinesq 방정식을 지배방정식으로 사용하는 것이 바람직하다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \quad (3)$$

여기서, ζ 는 자유수면변위, P 와 Q 는 각각 $P=uh$ 및 $Q=vh$ 로 정의되는 x 축과 y 축 방향의 체적흐름율(volume flux), u 와 v 는 각각 x 축과 y 축 방향의 수심평균된 유속, h 는 정수면상의 수심이다. 식 (1)-(3)에서 P 와 Q 를 소거하여 다음과 같은 선형 Boussinesq 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t} - gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = \frac{gh^2}{3} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \quad (4)$$

본 연구에서는 수정기법(modified scheme)을 이용하기 위해(Abbott 등, 1981) 식 (2)-(3)의 오른쪽항, 즉 분산항을 생략한 다음과 같은 선형 천수방정식을 지배방정식으로 사용한다(Cho와 Yoon, 1998).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Immamura와 Goto(1988)는 식 (5)-(7)을 leap-frog 유한차분기법을 이용하여 staggered 격자에서 다음과 같이 차분화하였다.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j+1/2}^n - Q_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{P_{i+1/2,j}^{n+1} - P_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + gh \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{Q_{i,j+1/2}^{n+1} - Q_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + gh \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} = 0 \quad (10)$$

식 (8)-(10)의 차분식에서 사용된 staggered 격자에서는 ζ 는 격자(i, j), 체적 흐름율 P 와 Q 는 각각($i+1/2, j$)와 ($i, j+1/2$)에서 정의되었다. 아울러, 시간에 대해서도 또한 staggered 격자를 사용하였다.

본 연구에서는 수정기법을 사용하여 식 (5)-(7)을 다음과 같이 차분화하였다.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j+1/2}^n - Q_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i+1/2,j}^{n+1} - P_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + gh_{i+1/2,j} \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ & + \frac{\alpha g}{12 \Delta x} h_{i+1/2,j} [\zeta_{i+2,j}^{n+1/2} - 3\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}] \\ & + \frac{\gamma g}{12 \Delta x} h_{i+1/2,j} [(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + \zeta_{i+1,j-1}^{n+1/2}) \\ & - (\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i,j-1}^{n+1/2})] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i,j+1/2}^{n+1} - Q_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + gh_{i,j+1/2} \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \\ & + \frac{\alpha g}{12 \Delta y} h_{i,j+1/2} [\zeta_{i,j+2}^{n+1/2} - 3\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2}] \\ & + \frac{\gamma g}{\Delta y} h_{i,j+1/2} [(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j+1}^{n+1/2}) \\ & - (\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j}^{n+1/2})] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (11)-(13)에서 분산보정계수 α 와 γ 를 각각 0과 1로 정하면, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법과 같아진다. 참고로, 식 (12)와 식 (13)의 보정항들은 Taylor 급수의 전개과정에서 유도한 것이다.

식 (11)-(13)의 모든 항을 Taylor 급수를 이용하여 기준 격자점 (i, j, n)에 대하여 전개한 후 P 와 Q 를 소거하면 다음과 같은 ζ 에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - C_0^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} (1 + \alpha - C_r^2) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^4} \right) \\ & + (1 + \alpha - \gamma^2) \frac{(\Delta x)^2}{C^6} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} = O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2 \Delta t, \Delta x (\Delta t)^2, (\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (14)의 유도과정에서 $\Delta x = \Delta y$ 가 사용되었으며, $C_0 (= \sqrt{gh})$ 와 $C_r (C_0 \Delta t / \Delta x)$ 은 각각 장파의 전파속도와 Courant 수를 나타낸다. 그리고, 식 (12)-(14)의 유도과정은 Cho(1995)를 참고하여 확인할 수 있다.

식 (14)를 식 (4)의 선형 Boussinesq 방정식과 같아지도록 분산보정계수 α 와 γ 를 결정하면 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{4h^2 + gh(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \quad (15)$$

$$\gamma = \alpha + 1 \quad (16)$$

Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법($\alpha=0$)의 경우 식 (4)의 선형 Boussinesq 방정식과 식 (14)가 같아지기 위해서는 다음과 같은 관계식을 만족해야 한다.

$$(\Delta x)^2 = 4h^2 + gh(\Delta t)^2 \quad (17)$$

식 (15)와 (16)은 Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식 (17)의 경우와 다르게 수심이 변하는 경우, 격자간격과 계산 시간간격 대신 분산보정계수 α 와 γ 를 변화시켜 식 (14)가 식 (4)와 일치하도록 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 참고로 본 연구에서 제안한 기법의 안정성 검토는 부록에서 다루었다.

3. 수치모형의 검증

본 연구에서 제안한 기법의 정확성을 검증하기 위해서, 가상 진원에 의해 발생된 초기 자유수면변위가 Gauss 분포를 가지는 지진해일의 전파에 대하여 수치모형을 수행하였다. 그리고 모의 결과를 Carrier(1991)가 구한 선형 Boussinesq 방정식의 해석해와 비교하였다.

초기의 Gauss 분포의 형태를 갖는 초기 자유수면변위는 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta(r, 0) = 2e^{-(r/a^2)} \quad (18)$$

여기서, a 는 Gauss 분포의 반지름이고 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 은 중심으로부터의 거리를 나타낸다. Fig. 1은 Gauss 분포의 형태를 갖는 초기 수면변위의 형상을 나타내고 있으며, x 축과 y 축은 Gauss 분포의 반지름(a)으로 무차원화 되었다.

Carrier(1991)는 선형 Boussinesq 방정식을 풀어서 Gauss 분포의 초기 자유수면변위에 대한 해석해를 구하였다.

$$\zeta(r, t) = \int_0^\infty a^2 k e^{-(ak)^2/4} \cos\left(\frac{\sqrt{ghkt}}{\sqrt{1+(kh)^2/3}}\right) J_0(kr) dk \quad (19)$$

여기서, J_0 는 0차 제1종 Bessel 함수이다. 단순화를 위해 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$h' = \frac{1}{a}h, \zeta' = \frac{1}{a}\zeta, (x, y)' = \frac{1}{a}(x, y), k' = ak, t' = \frac{1}{a}(gh)^{1/2}t \quad (20)$$

식 (20)을 식 (19)에 대입하면, 식 (19)는 다음과 같이 무차원화된 형태로 표현된다.

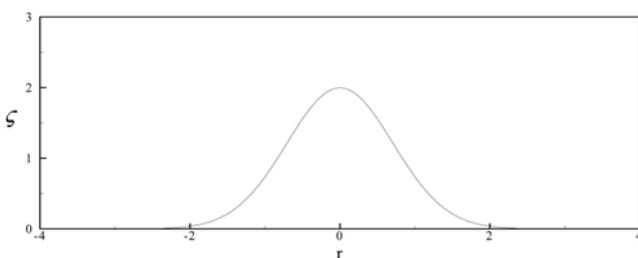


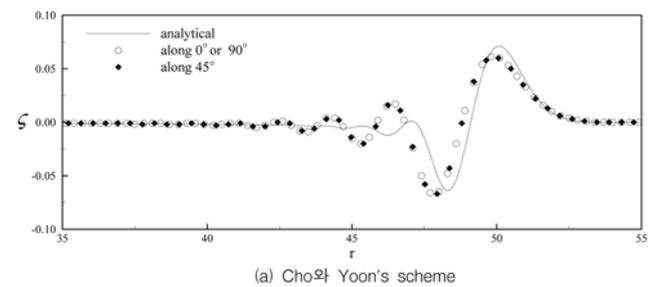
Fig. 1 Gauss 분포의 초기 자유수면변위

$$\zeta(r, t) = \int_0^\infty k' e^{-(K')^2/4} \cos\left(\frac{k't'}{\sqrt{1+(K'h')^2/3}}\right) J_0(K'r') dk' \quad (21)$$

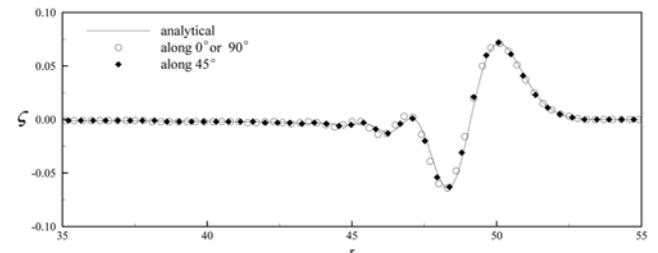
여기서, prime(') 기호는 변수가 무차원화 되었다는 것을 나타낸다. 편리함을 위해 여기서부터는 기호를 생략하기로 한다. 식 (21)은 Gaussian quadrature 등을 이용하여 적분할 수 있다(Press 등, 1986).

실제지형과 같이 수심이 변하는 지형에 대해서는 선형 Boussinesq 방정식의 해석해가 존재하지 않으므로, Cho와 Yoon(1998)이 제안한 관계식 (17)이 만족되지 않는 경우에 대해서 수치모의를 수행하여 그 결과를 Carrier(1991)가 제안한 해석해와 비교하기로 한다. 참고로 모의조건이 관계식 (17)을 만족하는 경우, 본 연구에서 제안한 기법은 Cho와 Yoon의 기법과 동일하게 되므로 따로 검토하지 않았다.

Fig. 2와 Fig. 3에서는 $h=0.1$, 정사각형 격자($\Delta x=\Delta y=0.3$), 계산 시간간격을 적용하였으며 이 조건은 다음과 같은 무차원 관계식을 만족한다.

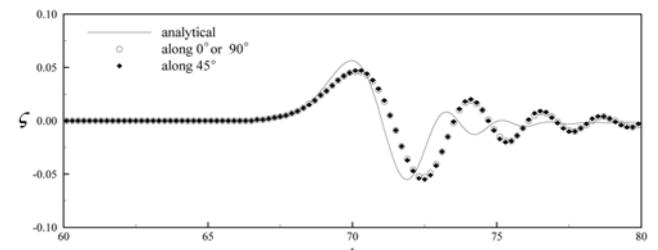


(a) Cho와 Yoon's scheme

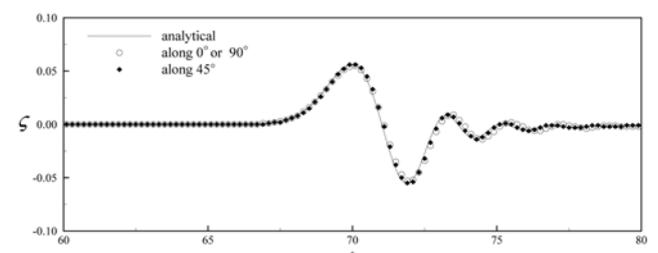


(b) Present scheme

Fig. 2 Gauss 분포 초기 수면변위에 대한 해석해와 수치해의 비교 ($t=50, \Delta x=\Delta y=0.3, \Delta t=0.1, h=0.1$)

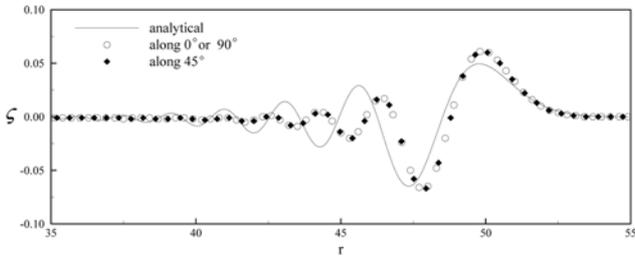


(a) Cho와 Yoon's scheme

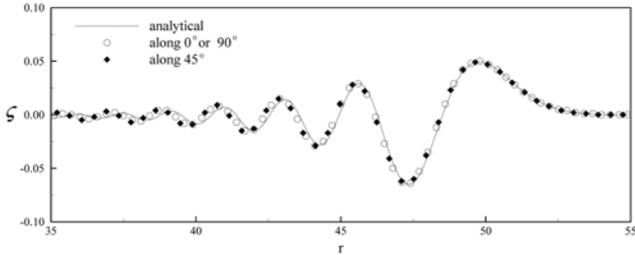


(b) Present scheme

Fig. 3 Gauss 분포 초기 수면변위에 대한 해석해와 수치해의 비교 ($r=70, \Delta x=\Delta y=0.3, \Delta t=0.1, h=0.1$)

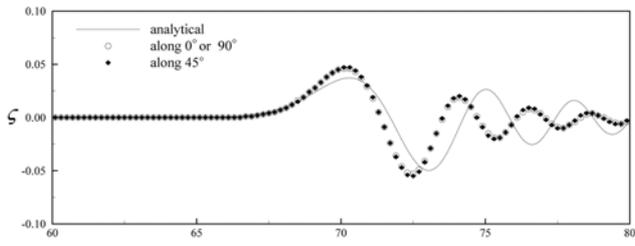


(a) Cho와 Yoon's scheme

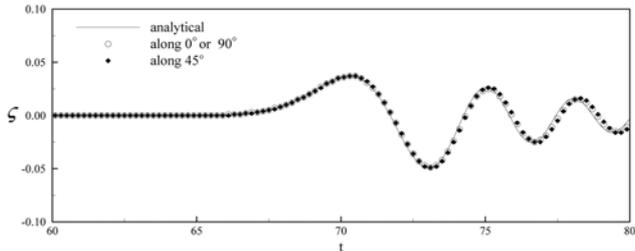


(b) Present scheme

Fig. 4 Gauss 분포 초기 수면변위에 대한 해석해와 수치해의 비교 ($t=50$, $\Delta x=\Delta y=0.3$, $\Delta t=0.1$, $h=0.2$)



(a) Cho와 Yoon's scheme



(b) Present scheme

Fig. 5 Gauss 분포 초기 수면변위에 대한 해석해와 수치해의 비교 ($t=70$, $\Delta x=\Delta y=0.3$, $\Delta t=0.1$, $h=0.2$)

$$(\Delta x)^2 > 4h^2 + (\Delta t)^2 \quad (22)$$

Fig. 2는 $t=50$ 일 때의 모의결과를 해석해와 비교하여 나타낸 것으로, 초기 Gauss 분포의 중심점으로부터의 거리(r)에 따라 결과를 표현하였다. 반면에 Fig. 3은 $t=70$ 인 지점에서 시간에 따른 자유수면변위를 구한 것으로 Fig. 2와 같은 모의조건을 적용하였다. Fig. 2와 Fig. 3에서 확인할 수 있는 것처럼 Cho와 Yoon의 기법에서는 선단파의 파폭이 해석해보다 작게 나타나고 있는데, 이는 Cho와 Yoon의 기법이 분산효과를 해석해보다 크게 고려하였기 때문이다. 반면에 본 연구에서 제안한 기법의 결과는 해석해와 비교적 정확하게 일치하고 있으며, 결과적으로 분산효과를 적절하게 고려하고 있는 것으로 판단된다. 그리고, 본 연구의 기법은 파랑의 진행 방향에 관계없이 신뢰할만한 결과를 주는 것을 알 수 있다.

Fig. 4와 Fig. 5는 식 (17)을 만족하지 않는 조건($h=2.0$, $\Delta x=\Delta y=0.3$, $\Delta t=0.1$)을 적용하여 수치모의를 수행하고 그 결

과를 해석해와 비교하여 나타낸 것이다. 이때의 적용 조건들은 관계식 (23)을 만족하며, Fig. 2와 Fig. 3에 적용된 조건과 비교하여 수심 조건만을 변경시킨 것이다.

$$(\Delta x)^2 < 4h^2 + (\Delta t)^2 \quad (23)$$

Fig. 4와 Fig. 5는 각각 $t=50$ 인 시간에서의 자유수면의 snapshot과 $t=70$ 인 점에서의 시간변화율을 표현한 것이며, 본 연구에서 제안한 기법이 Cho와 Yoon이 제안한 기법에 비해 더 정확한 결과를 제공한다는 것을 확인할 수 있다. 또한, Fig. 4와 Fig. 5의 결과를 통해 Cho와 Yoon의 기법에서는 분산효과가 약간 작게 고려되었지만, 본 연구의 기법에서는 비교적 정확하게 분산효과가 고려되었다고 판단할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 일본 근해에서 발생하여 동해안을 전파하는 지진해일을 모의하기 위하여 기존의 수치모형에서 분산효과를 실질적으로 반영하지 못하는 점을 수정할 수 있는 기법을 제안하였다. Cho와 Yoon(1998)이 제안한 기법은 선형 천수방정식을 대상으로 leap-frog 기법을 적용하여 차분화에서 발생하는 수치분산을 3차 정확도로 선형 Boussinesq 방정식의 물리적 분산항과 같도록 만드는 기법을 제안하였다. 그러나 격자크기와 계산 시간간격, 수심이 유도된 관계식을 만족하는 경우에만 정확도 높은 수치해를 구할 수 있어, 수심이 변하는 지형에서는 일정한 격자크기와 계산 시간간격을 이용할 수 없는 단점이 있었다.

반면에 본 연구에서 제안한 기법은 수심이 변하는 경우에 격자크기와 계산 시간간격을 변화시키지 않는 대신 새로 도입한 계수의 변화를 통해 3차 정확도로 분산효과를 재현할 수 있었다. 그리고 개발한 기법을 이용하여 Gauss 분포 형태의 초기 자유수면변위를 갖는 문제를 모의한 결과, 새로 제안한 기법이 기존의 기법에 비해 넓은 범위의 조건에서 정확도가 높은 결과를 제공한다는 것을 확인할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 기법은 실질적으로 원해 지진해일의 전파모의에 이용하는 것이 가능할 것으로 보이며, 특히 수심이 완만히 변하는 경우에 좋은 결과를 나타낼 수 있을 것으로 판단된다. 개발한 기법은 기본적으로 기존 원해 지진해일의 전파 모형에 많이 사용되던 선형 천수방정식을 지배방정식으로 하고 있어 기존의 수치모형에 대해서 적용이 간단한 장점을 갖고 있다. 그리고, 추후에 본 연구에서 제안한 기법을 이용한다면 좀 더 정확한 지진해일 범람도를 작성할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 논문은 2005년도 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었습니다 (KRF-2005-041-D00812).

참고문헌

윤성범, 임채호, 이종인(2004) 지진해일 전파모 의를 위한 2차원

유한차분 모형의 능동적 분산보정기법. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제24권 제6B호, pp. 577-583.

- Abbott, M.B., McCowan, A.D., and Warren, I.R. (1981) Numerical modeling of free-surface flows that are two-dimensional in plan. *Transport Models for Inland and Coastal Waters*, edited by H.B. Fisher, Academic Press, pp. 222-283.
- Carrier, G.F. (1991) Tsunami propagation from a finite source. *Proc. of 2nd Tsunami Workshop*, NGDC, Hawaii, USA, pp. 101-115.
- Cho, Y.-S. (1995) *Numerical Simulations of Tsunami Propagation and Run-up*. Ph.D. Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY.
- Cho, Y.-S. and Yoon, S.-B. (1998) A modified leap-frog scheme for linear shallow-water equations. *Coastal Engineering Journal*, Vol. 40, No. 2, pp. 191-205.
- Imamura, F. and Goto, C. (1988) Truncation error in numerical tsunami simulation by the finite difference method. *Coastal Engineering in Japan*, Vol. 31, pp. 245-263.
- Kajiura, K. and Shuto, N. (1990) Tsunami. *The SEA*, edited by B. Le Mehaute, and D.M. Hanes, John Wiley & Sons, Inc, Vol. 9, Part B, pp. 395-420.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F. (1982) *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley & Sons, USA.
- Liu, P.L.-F., Cho, Y.-S., Yoon, S.-B., and Seo, S.-N. (1995) Numerical simulation of the 1960 Chilean tsunami propagation and inundation at Hilo, Hawaii. *Recent Development in Tsunami Research*, edited by M.I. ElSabbh, Kluwer Academic Publishers. Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T. (1986) *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, pp. 818
- Yoon, S.B. (2002) Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography. *Journal of Geophysical Research, AGU*, Vol. 107, No. C10, pp. 4(1)-4(11).

(접수일: 2006.5.23/심사일: 2006.7.12/심사완료일: 2006.8.3)

부록. 안정성 검토

본 부록에서는 본 연구에서 제안한 기법의 안정성 검토를 수행한 과정을 기술한다. 우선, 본 연구에서 제안한 유한차분식인 식 (11)-(13)의 해를 다음과 같은 Fourier 급수 형태로 쓸 수 있다고 가정한다(Lapius와 Pinder, 1982).

$$\zeta = \zeta_0 \rho^t e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (24a)$$

$$P = P_0 \rho^t e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (24b)$$

$$Q = Q_0 \rho^t e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (24c)$$

여기서, ζ_0, P_0, Q_0 는 각각 ζ, P, Q 의 초기값이다. 식 (24)를 본문의 식 (11)-(13)에 대입하고, 다음과 같은 표시법을 이용하면: $t = n^0 \Delta t (n^0 = 0, 1, \dots, n, \dots)$, $x = i_0 \Delta x (i_0 = 0, 1, \dots, i, \dots)$, $y = j_0 \Delta y (j_0 = 0, 1, \dots, j, \dots)$ 이래와 같은 관계식을 얻을 수 있다. 참고로, $\rho^{\Delta t}$ 는 amplification factor이다.

$$(\rho^{\Delta t/2} - \rho^{\Delta t/2}) + \zeta_0 + 2ir_x \sin \theta_x P_0 + 2ir_y \sin \theta_y Q_0 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{2}{3} i C_0^2 r_x \sin \theta_x (3 - \gamma \sin^2 \theta_y - \alpha \sin^2 \theta_x) \rho^{\Delta t/2} \zeta_0 + (\rho^{\Delta t} - 1) P_0 = 0 \quad (26)$$

$$\frac{2}{3} i C_0^2 r_y \sin \theta_y (3 - \gamma \sin^2 \theta_x - \alpha \sin^2 \theta_y) \rho^{\Delta t/2} \zeta_0 + (\rho^{\Delta t} - 1) Q_0 = 0 \quad (27)$$

이때, 식 (25)-(27)을 단순화하기 위해 다음과 같은 기호를 사용하였다.

$$r_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}, r_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}, \theta_x = \frac{k_x \Delta x}{2}, \theta_y = \frac{k_y \Delta y}{2} \quad (28)$$

선형시스템 (25)-(27)은 제차(homogeneous)이기 때문에 수학적으로 의미있는 해를 갖기 위해서는 계수행렬의 determinant는 0이 되어야 하며, 따라서 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$(\rho^{\Delta t} - 1)\{\rho^{2\Delta t} + (B - 2\rho)^{\Delta t} + 1\} = 0 \quad (29)$$

위 식에서 다음과 같은 상수 B 는 다음과 같이 정의된다.

$$B = \frac{4}{3} C_0^2 [r_x^2 \sin^2 \theta_x (3 - \gamma \sin^2 \theta_y - \alpha \sin^2 \theta_x) + r_y^2 \sin^2 \theta_y (3 - \gamma \sin^2 \theta_x - \alpha \sin^2 \theta_y)] \quad (30)$$

식 (30)에 본문의 식 (20)을 대입하고, 단순화를 위해 ρ 를 가정하여 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$B = \frac{4}{3} C_r^2 [3(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y) - 2\sin \theta_x \sin^2 \theta_y - \alpha(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)^2] \quad (31)$$

$\rho^{\Delta t} = 1$ 는 안정조건을 만족하므로 식 (29)의 해는 다음과 같다.

$$\rho^{\Delta t} = \frac{2 - B \pm \sqrt{B^2 - 4B}}{2} \quad (32)$$

식 (32)가 안정조건 즉, $|\rho^{\Delta t}| \leq 1$ 을 만족하기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$0 \leq B \leq 4 \quad (33)$$

식 (33)에 식 (31)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\alpha \leq \frac{3(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y) - 2\sin^2 \theta_x \cdot \sin^2 \theta_y}{(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)^2} \quad (34)$$

$$C_r \leq \frac{3^{1/2}}{[3(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y) - \sin^2 \theta_x \sin^2 \theta_y - \alpha(\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)^2]^{1/2}} \quad (35)$$

본 연구에서 제안한 기법은 식 (34)를 만족하기 위해서 분산보정계수 α 의 범위를 가질 때 수치적으로 안정해지며, 본문의 식 (15)에서 확인할 수 있는 것처럼 분산보정계수 α 는 이론적으로 $\alpha \geq -1$ 의 범위를 갖게 된다. 즉, 분산보정계수 α 는 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 의 범위에서 안정조건을 만족하게 된다. 그리고, 분산보정계수 α 가 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 범위의 값을 갖게 될 경우 식 (35)를 통해 검토할 수 있는 것처럼 안정조건은 Courant 수를 이용하여 나타내었을 때, $C_r \leq \infty$ 에서 $C_r \leq 0.612$ 까지 다양한 범위로 나타낼 수 있게 된다. 따라서, 본 연구에서 제안한 기법은 안정조건 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 와 $C_r \leq 0.612$ 을 만족할 경우 수치적으로 안정해진다고 결론지을 수 있다. 참고로, 안정조건 $C_r \leq 0.612$ 은 수심이 0인 경우에 해당하는 것으로 실제 문제에서는 수심이 크게 나타나기 때문에 보다 넓은 범위의 안정조건을 적용할 수 있게 된다.