

# 4차 통계량을 이용한 Matrix Pencil Method

준희원 장우진\*, 왕혁소\*, 주위위\*, 정희원 고진환\*\*

## Matrix Pencil Method Using Fourth-order Statistic

Woojin Jang\*, Yisu Wang\*, Weiwei Zhou\* *Associated Members*,  
Jinhwan Koh\*\* *Regular Member*

### 요약

Array 신호처리에서 복소 지수함수의 합으로 구성된 신호의 파라미터를 추정하는데 고차 통계를 이용할 수 있다. 본 논문에서는 기존의 MPM(matrix pencil method)보다 효과적으로 DOA를 판별하기 위해 MPM에 4차 cumulant와 moment 통계량을 적용하였다. 4차 cumulant 통계량은 선형 배열안테나에 입사하는 신호에 포함된 Gaussian 잡음을 효과적으로 감소시킬 수 있다. Gaussian 잡음이 존재하는 환경에서 기존의 방법과 4차 통계량을 이용한 방법을 시뮬레이션 함으로써 SNR과 DOA 분해능에 대하여 성능을 분석하였다. 결과로써 4차 통계량을 이용한 MPM이 기존의 MPM보다 우수함을 보였으며, 또한 4차 moment보다는 4차 cumulant 적용이 더 우수함을 증명하였다.

**Key Words :** MPM(matrix pencil method), Cumulant, Moment, DOA

### ABSTRACT

In array signal processing, high order statistics can be used to estimate parameters from signal of sums of complex exponential. In this paper, we derive two types of direction finding algorithms which use the fourth-order cumulant and moment of the received array data. Since the fourth order cumulant can suppress the Gaussian noise, the response of MPM has better noise immunity than the conventional approaches. The performance of each method in regard to the probability of resolution and SNR in the presence of the Gaussian noise is investigated. As a result, the proposed method applied to the fourth-order statistic can find DOA more correctly in the presence of the Gaussian noise.

### I. 서론

신호의 DOA 추정을 위한 알고리즘 개발에 관한 연구가 지난 수년간 큰 관심을 가지고 진행되어 왔다. 이러한 DOA를 추정하는 알고리즘에는 MUSIC(MULTiple Signal Classification), root-MUSIC, ESPRIT과 같은 알고리즘이 대표적이며, 대부분 고분해능의 고유구조(eigen-structure)를 이용한 알고리즘으로 다중신호의 DOA 판별법에 입력신호의 2차 통계량을 이용

한다. 즉, 위의 방법들은 2차 통계량으로 입력 공분산 행렬을 이용하였고, 희망신호에 의한 고유벡터(eigenvector)와 잡음신호에 의한 고유벡터가 서로 직교한다는 성질을 이용하여 DOA 추정을 수행한다<sup>[1]</sup>.

2차 통계량보다 고차 통계량을 이용한 방법의 장점이 알려지면서 이를 이용한 알고리즘이 관심을 받고 있다. 특히, 4차 cumulant를 적용하게 되면, 신호에 포함된 잡음이 Gaussian 잡음일 경우에 잡음을 효과적으로 감소시킬 수 있다<sup>[2]</sup>. 최근에는

\* 경상대학교 전자공학과 AWC 연구실 (jwjfly@hotmail.com)

\*\* 경상대학교 전자공학과, 공학연구원, AWC 연구실 (jikoh@gsnu.ac.kr)

논문번호 : KICS2006-01-017, 접수일자 : 2006년 1월 17일, 최종논문접수일자 : 2006년 5월 17일

CDMA 시스템에서의 DOA 추정에 4차 통계량이 사용되고 있다<sup>3, 4</sup>.

본 논문에서 4차 통계량을 적용하게 될 MPM(matrix Pencil method)은 배열안테나에 입사되는 신호가 복소 지수함수의 합으로 근사시킬 수 있을 때 적용할 수 있으며 데이터 행렬의 고유분해 (eigen decomposition)를 이용한다<sup>5, 6</sup>. 이 방법은 다항식을 이용한 복소 지수함수의 근를 구하는 방법보다 낮은 분산을 가지기 때문에 성능도 우수하고 계산하는데 있어서 효과적이다<sup>7, 8</sup>. 처음으로 고차통계량을 MPM에 적용한 HUA<sup>9</sup>는 3차 moment와 같은 고차 통계량을 MPM에 적용하였지만 기존의 방법보다 좋은 성능을 만족시키지 못하였다. Laplace, Uniform, Gaussian 분포처럼 확률밀도함수가 좌우 대칭으로 분포하는 잡음과 같은 랜덤 프로세서에서는 신호의 3차 moment 값은 0(zero)이다<sup>2</sup>. 그러나 복소 지수함수의 합으로 이루어진 신호의 3차 moment 값 역시 0(zero)이기 때문에 기존의 방법보다 성능이 우수함을 증명할 수 없었다. 반면에, 위와 같은 환경에서 신호의 4차 cumulant와 moment 값은 0(zero)이 아니기 때문에 MPM에 적용할 수 있다. 이러한 대칭 분포를 가지는 랜덤프로세서의 경우 고차 통계량에 의한 신호의 상쇄를 막기 위해 3차 보다는 4차 cumulant와 moment를 적용해야 한다. 그리고 이러한 특성을 이용한다면 DOA 추정의 성능을 향상시킬 수 있다.

본 논문에서는 기존의 MPM에서의 원시 데이터 행렬을 이용하는 대신에 4차 cumulant 와 moment 행렬을 이용하여 MPM에 cumulant와 moment를 적용하였다. 그 결과 신호에 포함된 Gaussian 잡음을 성공적으로 제거 할 수 있었으며, 시뮬레이션의 결과를 통해서 고차통계량을 적용한 MPM이 DOA 추정에 대하여 기존 방법인 MPM의 평균값보다 우수한 성능을 보였고, 특히, 잡음의 억제효과에서는 4차 moment보다 4차 cumulant 적용했을 때 성능이 뛰어난 것을 실험적으로 보여주었다.

## II. Matrix pencil method(MPM)

배열안테나에 입사되는 신호의 지연시간 모델을 나타내면 다음과 같다.

$$x(n) = \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i n T_s} = \sum_{i=1}^K R_i z_i^n \quad (1)$$

where  $R_i$  = Residues or complex amplitudes,

$\omega_i$  = Angular frequencies,

$$e^{j\omega_i T_s} = z_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, K, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$\omega_i$ 는 DOA 성분이 포함되고, 신호의 주파수  $f$ 와 광속  $c$ 에 의한 신호의 파장이  $\frac{c}{f}$ , 안테나 사이의 간격이  $d$ 인  $\frac{2\pi f}{c} d \cos \phi_i$ 이다. 따라서 각  $\omega_i$ 를 구함으로써 신호의 DOA를 찾을 수 있다. 여기서, damping factor는 중요하지 않기 때문에 고려하지 않았고,  $K$ 는 안테나에 입사하는 신호의 수,  $N$ 은 안테나 수이다. (1)의 모델로부터 우리가 추정해야 할 파라미터는  $K$ 와  $R_i, z_i$ 이다.

잡음이 없는 데이터로부터,  $N$ 개 안테나의 신호 데이터를 이용한  $(N-L) \times (L+1)$  데이터 행렬  $Y$ 와 행렬  $Y$ 에서 마지막 열과 처음 열을 제거한  $(N-L) \times L$  행렬  $Y_a, Y_b$ 은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$Y = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K R_i & \sum_{i=1}^K R_i z_i & \dots & \sum_{i=1}^K R_i z_i^L \\ \sum_{i=1}^K R_i z_i & \sum_{i=1}^K R_i z_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^K R_i z_i^{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^K R_i z_i^{N-L-1} & \sum_{i=1}^K R_i z_i^{N-L} & \dots & \sum_{i=1}^K R_i z_i^{N-1} \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (2)$$

$$Y_a = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (3)$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (4)$$

여기서  $L$ 은 pencil 파라미터이며  $N/3$ 과  $N/2$ 사이의 값으로 결정된다. Pencil 파라미터  $L$ 은 데이터에 포함하고 있는 잡음에 대해서 매우 효과적인 측정을 하기 때문에 잡음이 포함된 데이터를 다룰 때 중요성을 알 수 있다<sup>5, 6</sup>.

$Y_a$  과  $Y_b$  를 하나씩 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$Y_a = Z_a R_0 Z_b \quad (5)$$

$$Y_b = Z_a R_0 Z_0 Z_b \quad (6)$$

where

$$Z_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(N-L-1)} & z_2^{(N-L-1)} & \dots & z_k^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times K}$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{(L-1)} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_k & \dots & z_k^{(L-1)} \end{bmatrix}_{K \times L}$$

$$Z_0 = \text{diag}[z_1, z_2, \dots, z_k], R_0 = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_k]$$

이제 matrix pencil 파라미터를 고려해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Y_b - \lambda Y_a = Z_a R_0 [Z_0 - \lambda I] Z_b \quad (7)$$

여기서  $\lambda = z_i$ , for  $i=1,2,\dots,K$  일 때, 변수  $z_i$  는 행렬 쌍인  $\{[Y_b]; [Y_a]\}$  의 일반적인 고유값들로 찾을 수 있다.  $z_i$  의 해는 순차적인 고유값 문제로 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_b - \lambda Y_a \\ Y_a^+ Y_b - \lambda I \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $Y_a^+$  는  $Y_a$  의 Moore-Penrose Pseudo-inverse 이다. 즉,

$$Y_a^+ = (Y_a^H Y_a)^{-1} Y_a^H \quad (9)$$

여기서 뒀첨자 H는 conjugate transpose를 의미한다.

결국  $\lambda = z_i$  로 추정되면, 주파수 성분은 다음과 같은 식을 통해서 알아 낼 수 있다.

$$\omega_i = \text{Imag}[\ln(z_i)]/T_s \quad (10)$$

여기서 신호에 얼마나 많은 주파수 성분이 포함되어 있는지 모르기 때문에 K를 결정하기 위해 다

음과 같이 Y행렬을 singular-value decomposition(SVD)하면

$$Y = U \Sigma V^H \quad (11)$$

이고, U와 V는 unitary 행렬이고,  $Y Y^H$  와  $Y^H Y$  의 고유벡터들을 만들면,  $\Sigma$  는 Y의 singular value를 포함하는 대각 행렬이 된다.

$$U^H Y V = \Sigma \quad (12)$$

변수 K를 선택하는 것은 이때에 이루어진다. Singular values의 가장 큰 값을 보면, 일반적으로 K를 넘어서면 singular values의 값은 0(zero)에 근접한다. 여기서 변수 K를 선택한다. Singular value  $\sigma_c$  를 고려하자면,

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} \approx 10^{-p} \quad (13)$$

이다. p는 정해진 신호의 중요한 임계값이다<sup>5,6</sup>.

### III. 4차 통계량을 이용한 matrix pencil method

#### 3.1 4차 cumulant를 이용한 matrix pencil method

각 안테나의 수신된 신호를 4차 cumulant에 적용하기 위한 신호의 지연시간 모델은 다음과 같다.

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+n\tau)} \quad (14)$$

여기서  $n=0,1,2,\dots, N-1$ 이며, N은 안테나 수,  $\tau$  는 이웃하는 두 안테나에 수신되는 신호의 시간지연이다. 만약 각 신호의 평균이 0(zero)이면, 4차 cumulant는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_4 &= \text{Cum}\{x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t)\} \\ &= E\{x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t)\} \\ &\quad - E\{x_n(t), x_{n+1}(t)\}E\{x_{n+2}(t), x_{n+3}(t)\} \\ &\quad - E\{x_n(t), x_{n+2}(t)\}E\{x_{n+1}(t), x_{n+3}(t)\} \\ &\quad - E\{x_n(t), x_{n+3}(t)\}E\{x_{n+1}(t), x_{n+2}(t)\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 “Cum”은 cumulant의 줄임말이다. 식 (15)으로부터 오직 시간지연  $\tau$  만의 복소 지수함수

의 합을 얻기 위해서  $Cum\langle x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t) \rangle$  를  $Cum\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle$  로 치환해야 한다. 그러면 식 (15)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C_4 = Cum\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle \\ = E\{x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t)\} \\ - E\{x_n^*(t), x_n^*(t)\}E\{x_n(t), x_{n+1}(t)\} \\ - E\{x_n^*(t), x_n(t)\}E\{x_n^*(t), x_{n+1}(t)\} \\ - E\{x_n^*(t), x_{n+1}(t)\}E\{x_n^*(t), x_n(t)\} \quad (16)$$

식 (16)을 다시 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$Cum\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle \\ = E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \right\} \\ - E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \right\} E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \right\} \\ - E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+n\tau)} \right\} E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \right\} \\ - E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \right\} E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+n\tau)} \right\} \quad (17)$$

식 (17)의 오른쪽 항목은 다음과 같이  $\tau$  만의 합수로 남게 된다.

$$C_4(\tau) = Cum\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle = -\sum_{i=1}^K R_i^4 e^{j\omega_i \tau} \quad (18)$$

위의 식을 통해서 4차 cumulant의 결과 값도 식 (1)의 정의와 같은 복소지수함수의 합임을 증명하였다. 따라서 4차 cumulant 행렬 C는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C = Cum\left\langle \begin{matrix} x_0^*(t), x_0^*(t), x_0(t) \\ x_1^*(t), x_1^*(t), x_1(t) \\ \vdots \\ x_{N-L-1}^*(t), x_{N-L-1}^*(t), x_{N-L-1}(t) \end{matrix} \right\rangle \\ = \begin{bmatrix} C_4(0) & C_4(1) & \cdots & C_4(L) \\ C_4(1) & C_4(2) & \cdots & C_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_4(N-L-1) & C_4(N-L) & \cdots & C_4(N-1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

4차 cumulant에 적용할 신호 모델은 다음과 같은 복소 지수함수의 합으로 나타낸다.

$$C_4(n) = -\sum_{i=1}^K R_i^4 e^{j\omega_i n \tau} = -\sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^n \quad (20)$$

$$e^{j\omega_i \tau} = z_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, K, n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

N개의 데이터로 이루어진 (N-L)\*(L+1) 행렬 C와 행렬 C의 마지막 열과 첫 번째 열을 제거한 (N-L)\*L 행렬  $C_a, C_b$ 는 다음과 같다.

$$C = \begin{bmatrix} C_4(0) & C_4(1) & \cdots & C_4(L) \\ C_4(1) & C_4(2) & \cdots & C_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_4(N-L-1) & C_4(N-L) & \cdots & C_4(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K R_i^4 & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^L \\ \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-L-1} & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-L} & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-1} \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (21)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} C_4(0) & C_4(1) & \cdots & C_4(L-1) \\ C_4(1) & C_4(2) & \cdots & C_4(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_4(N-L-1) & C_4(N-L) & \cdots & C_4(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (22)$$

$$C_b = \begin{bmatrix} C_4(1) & C_4(1) & \cdots & C_4(L) \\ C_4(2) & C_4(2) & \cdots & C_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_4(N-L) & C_4(N-L) & \cdots & C_4(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (23)$$

행렬  $C_a, C_b$ 는 다음과 같은 행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$C_a = Z_a R_0 Z_b \quad (24)$$

$$C_b = Z_a R_0 Z_0 Z_b \quad (25)$$

이제 matrix pencil 파라미터를 고려해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C_b - \lambda_c C_a = Z_a R_0 [Z_0 - \lambda_c I] Z_b \quad (26)$$

여기서  $\lambda_c = z_i$ , for  $i=1, 2, \dots, K$ 일 때, 변수  $z_i$ 는 일관적인 고유값 문제로 풀 수 있다.

$$\begin{matrix} C_b - \lambda_c C_a \\ C_a^* C_b - \lambda_c I \end{matrix} \quad (27)$$

여기서  $C_a^+$ 는  $C_a$ 의 Moore-Penrose Pseudo-inverse이다. 즉,

$$C_a^+ = (C_a^H C_a)^{-1} C_a^H \quad (28)$$

결국  $\lambda_c = z_i$ 로 추정되면, 식(10)과 유사한 방법으로 주파수 성분을 추정 할 수 있다.

$$\omega_i = \text{Imag}[\ln(z_i)] / \tau_s \quad (29)$$

### 3.2 4차 moment를 이용한 matrix pencil method

각 신호의 평균이 0(zero)이면, 4차 moment는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_4 = \text{Mom}\langle x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t) \rangle \\ = E\{x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t)\} \quad (30)$$

여기서 “Mom”은 moment의 줄임말이다. 식 (30)으로부터 오직 시간지연  $\tau$ 만의 복소 지수함수의 합을 얻기 위해서  $\text{Mom}\langle x_n(t), x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), x_{n+3}(t) \rangle$ 를  $\text{Mom}\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle$ 로 치환해야 한다. 그러면 식 (30)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_4 = \text{Mom}\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle \\ = E\{x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t)\} \quad (31)$$

식 (31)를 다시 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\text{Mom}\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle \\ = E\left\{ \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{-j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+n\tau)} \sum_{i=1}^K R_i e^{j\omega_i(t+(n+1)\tau)} \right\} \quad (32)$$

식 (32)의 오른쪽 항목은 다음과 같이  $\tau$ 만의 합수로 남게 된다.

$$\text{Mom}\langle x_n^*(t), x_n^*(t), x_n(t), x_{n+1}(t) \rangle = -\sum_{i=1}^K R_i^4 e^{j\omega_i \tau} \quad (33)$$

위의 식을 통해서 4차 moment의 결과 값도 식 (1)의 정의와 같은 복소 지수함수의 합임을 증명되었다. 따라서 4차 moment 행렬  $M$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = \text{Mom} \left\langle \begin{matrix} x_0(t) & x_1(t) & \cdots & x_L(t) \\ x_0^*(t), x_0^*(t), x_0(t) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L-1}(t) & x_{N-L}(t) & \cdots & x_{N-1}(t) \end{matrix} \right\rangle \\ = \begin{bmatrix} M_4(0) & M_4(1) & \cdots & M_4(L) \\ M_4(1) & M_4(2) & \cdots & M_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_4(N-L-1) & M_4(N-L) & \cdots & M_4(N-1) \end{bmatrix} \quad (34)$$

4차 moment에 적용할 신호 모델은 다음과 같은 복소 지수함수의 합으로 나타낸다.

$$M_4(n) = -\sum_{i=1}^K R_i^4 e^{j\omega_i n \tau} = -\sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^n \quad (35)$$

$$e^{j\omega_i \tau} = z_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, K, n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$N$ 개의 데이터로 이루어진  $(N-L) \times (L+1)$  행렬  $M$ 과 행렬  $M$ 의 마지막 열과 첫 번째 열을 제거한  $(N-L) \times L$  행렬  $M_a, M_b$ 는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} M_4(0) & M_4(1) & \cdots & M_4(L) \\ M_4(1) & M_4(2) & \cdots & M_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_4(N-L-1) & M_4(N-L) & \cdots & M_4(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K R_i^4 & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^L \\ \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-L-1} & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-L} & \cdots & \sum_{i=1}^K R_i^4 z_i^{N-1} \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (36)$$

$$M_a = \begin{bmatrix} M_4(0) & M_4(1) & \cdots & M_4(L-1) \\ M_4(1) & M_4(2) & \cdots & M_4(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_4(N-L-1) & M_4(N-L) & \cdots & M_4(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (37)$$

$$M_b = \begin{bmatrix} M_4(1) & M_4(1) & \cdots & M_4(L) \\ M_4(2) & M_4(2) & \cdots & M_4(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_4(N-L) & M_4(N-L) & \cdots & M_4(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (38)$$

행렬  $M_a, M_b$ 는 다음과 같은 행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.

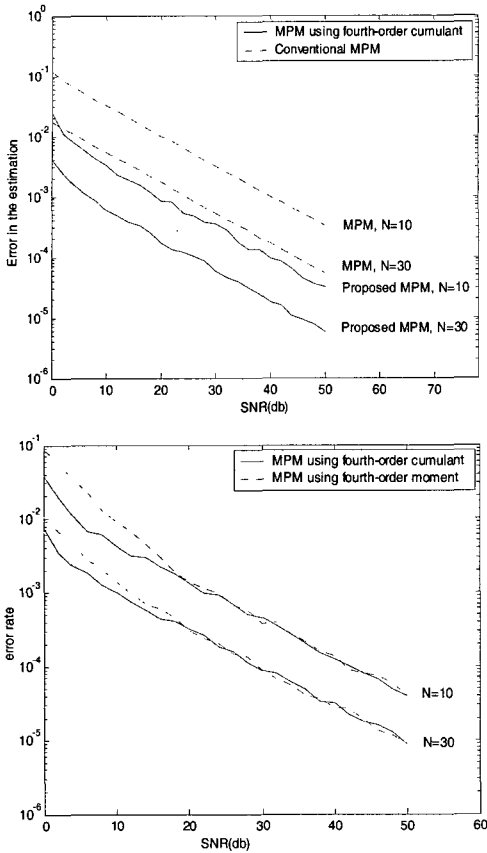


그림 1. 안테나 개수에 따른 SNR 및 에러추정

$$M_a = Z_a R_0 Z_b \tag{39}$$

$$M_b = Z_a R_0 Z_0 Z_b \tag{40}$$

이제 matrix pencil 파라미터를 고려해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_b - \lambda_m M_a = Z_a R_0 [Z_0 - \lambda_m I] Z_b \tag{41}$$

여기서  $\lambda_m = z_i$ , for  $i=1,2,\dots,K$ 일 때, 변수  $z_i$ 는 일반적인 고유값 문제로 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} M_b - \lambda_m M_a \\ M_a^+ M_b - \lambda_m I \end{aligned} \tag{42}$$

여기서  $M_a^+$ 는  $M_a$ 의 Moore-Penrose Pseudo-inverse이다. 즉,

$$M_a^+ = (M_a^H M_a)^{-1} M_a^H \tag{43}$$

$\lambda_m = z_i$ 로 추정되면, 주파수 성분은 다음과 같은

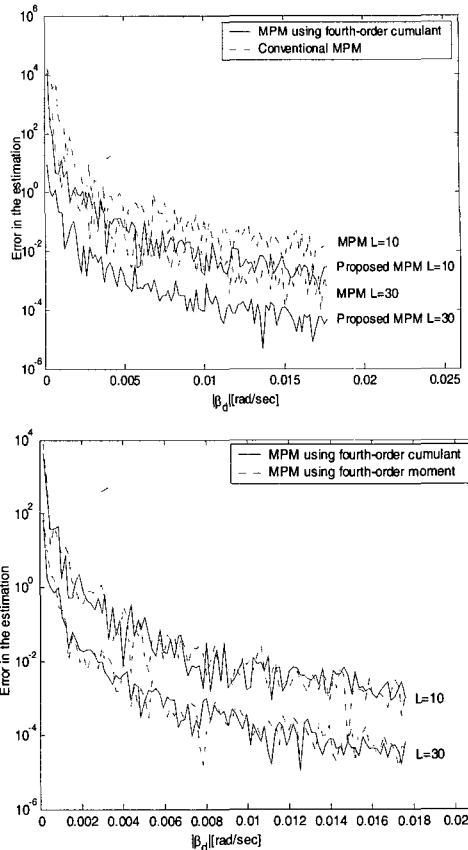


그림 2. Pencil 파라미터 L의 크기에 따른 분해능 및 에러추정 식을 통해서 알아 낼 수 있다.

$$\omega_i = \text{Imag}[\ln(z_i)] / \tau_s \tag{44}$$

#### IV. 성능분석

그림 1은 Gaussian 잡음이 포함되고,  $\beta_1 = \pi/5$ 로 안테나에 입사하는 신호  $u = e^{j\beta_1 n} + \text{noise}$ ; 각 안테나에 수신된 신호의 시간축 인덱스는  $i$ 이고, 각 안테나의 위치는  $n$ th이다.  $\beta$ 는 DOA 성분이 포함되고, 신호의 주파수  $f$ 와 광속  $c$ 에 의한 신호의 파장이  $\frac{c}{f}$ , 안테나 사이의 간격이  $d$ 인  $\frac{2\pi f}{c} d \cos \phi$ 이다.  $i=0,1,2,\dots,99$ ,  $n=0,1,2,\dots,9$ 에 대해 SNR 증가에 따른 측정오차를 보여주고 있다. 그림 1은 안테나 수  $N=10$ 일 때 pencil 파라미터  $L=5$ ,  $5 \times 5$ 행렬을 이용하여 시뮬레이션 하였다. 그림 1을 통하여 기존의 MPM보다는 4차 cumulant를 적용한 방법이 10dB 이상 성능이 우수함을 알 수 있다. 그리고 4차

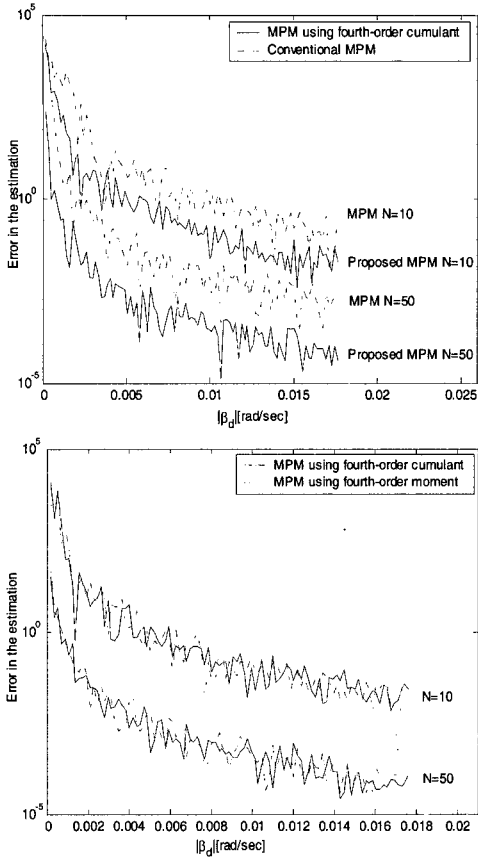


그림 3. 안테나 개수 N에 따른 분해능 및 에러추정

cumulant를 이용하면 특히 낮은 SNR에서 Gaussian 잡음의 영향을 더 많이 억제할 수 있기 때문에 4차 moment를 이용한 방법보다 성능이 우수함을 알 수 있다. 그러나 SNR이 20dB 이상부터는 4차 통계량을 이용한 두 방법의 성능이 대등함을 알 수 있다.

그림 2와 그림 3은 입사각  $\beta_1 = \pi/3$  와  $\beta_2 = \pi/3 + \beta_d$  로 입사하는 신호  $u = e^{j\beta_1 n} + e^{j\beta_2 n} + noise; i = 0, 1, 2, \dots, 99, n = 0, 1, 2, \dots, 59$   $n = 0, 1, 2, \dots, 9, n = 0, 1, 2, \dots, 49$ 에 대해 오차를 보여주는 시뮬레이션 결과 이다. 여기서 y축의 오차는 다음과 같이 정의된다. Error in the estimation =  $\|\beta - \beta_{est}\|_2 / \|\beta_2 - \beta_1\|_2$ 의 여기서  $\beta_{est}$ 는  $\beta_1, \beta_2$ 에서  $\beta = [\beta_1, \beta_2]^T$ 에 대한 측정값이며, 그림 2는 pencil 파라미터 L=10, 10×10 행렬, 그리고 L=30, 30×30 행렬일 때, 그림 3은 N=10 또는 50 일 때  $\beta_d$ 의 Monte Carlo 시뮬레이션을 통한 측정 오차를 보여 주고 있다. 그림 2와 그림 3의 결과를 통해서 고차 통계량을 이용한 MPM이 기존의 MPM보다 성능이 우수함을 알 수 있다.

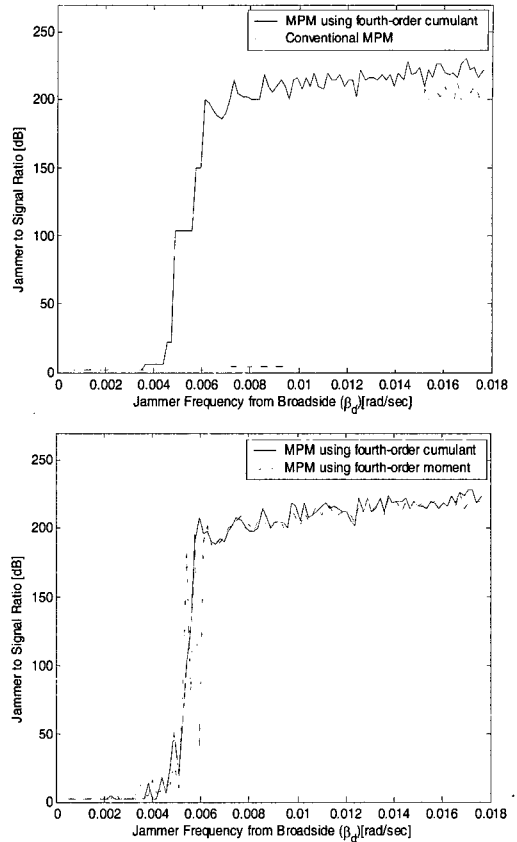


그림 4. 40dB SNR인 잡은 환경에서 신호에 대한 jammer 신호의 비

그림 4는  $\beta_1 = \pi/2$ 의 희망신호와 크기가  $J_{mag}$ 이고 각도가  $\beta_2 = \pi/2 + \beta_d$ 인 jammer 신호를 더한 경우, 신호  $u = e^{j\beta_1 n} + J_{mag} e^{j\beta_2 n} + noise; i = 0, 1, 2, \dots, 99, n = 0, 1, 2, \dots, 49$ 에 대하여  $J_{mag}$ 를 증가시키면서 희망신호의 크기 추정 시 1%오차를 만족하게 하는 최대  $J_{mag}$ 에 대한 신호 비를 나타내는 시뮬레이션 결과를 나타내고 있다. 마찬가지로, 고차 통계량을 이용한 MPM이 기존의 MPM보다 성능이 우수함을 그림 4를 통하여 알 수 있다.

### V. 결론

본 논문에서는 DOA 추정을 위해 기존의 MPM과 4차 cumulant와 moment같은 고차 통계량을 적용한 MPM에 대한 성능을 비교하였다. 시뮬레이션결과 Gaussian잡음을 억제하는 4차 통계량 때문에 SNR에 대해서 기존의 MPM보다는 본 논문에서 제안된 4차 통계량을 이용한 MPM의 성능이 그림 1에서 처

럼 10dB이상 더 우수하였다. 그리고 그림 1에서 나타난 우수한 성능에 의하여 그림 2, 그림 3, 그림 4에서의 두 신호에 대한 DOA분해능에 대해서도 우수한 성능을 보였다. 특히, 그림 1에서 4차 cumulant는 20dB이하의 낮은 SNR에 대하여 4차 moment보다 더 많은 Gaussian 잡음 억제효과 때문에 4차 moment보다 4차 cumulant를 적용하는 것이 더욱 효과적이다.

참 고 문 헌

[1] Rappaport, Theodore S., "Smart Antennas for Wireless Communications", Prentice Hall, 253-284, 1999.

[2] Chrysostomos L. Nikias, A. P. Petropulu, "Higher-Order Spectra Analysis", Prentice Hall, 7-33, 1993.

[3] Liu Wenke; Jin Liang; Hu Junjie, "A DOA estimation algorithm based on cumulant for CDMA system", *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2005. Proceedings. 2005 International Conference on* Volume 1, 585 - 588, Sept. 2005.

[4] Wei Yang; Shixin Cheng, "A cumulant based DOA estimation for S-CDMA with decorrelator in spatial colored noise", *Spread Spectrum Techniques and Applications, 2002 IEEE Seventh International Symposium on* Volume 2, 566 - 570, 2002.

[5] Sarkar, T. K. and Pereira, O. "Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 37, No. 1, 48-55, February, 1995.

[6] Jinhwan KOH, Dongmin LIM, and Tapan K. SARKAR, "DOA Estimation Using Matrix Pencil Method", *IEICE TRANS.*, VOL. E85-A, NO. 1, January 2002.

[7] R. Kumareasn and D. Tufts, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoidal and pole-zero modeling in noise", *IEEE Trans. on ASSP*, 833-840, December, 1982.

[8] D. W. Tufts and R. Kumaresan, "Estimation of frequencies of multiple sinusoids making linear prediction perform like maximum likelihood",

*Proc. Of the IEEE*, 975-989, September, 1982.

[9] Yingbo Hua, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Higher Order Statistics and Matrix Pencil, *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*. VOL. 39. NO. 7, 1691-1692, JULY, 1991.

장 우 진 (Woojin Jang)

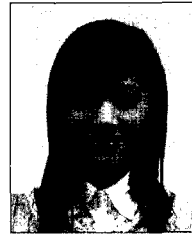
준회원



2004년 8월 경상대학교 전자공학과 졸업  
2004년 9월~현재 경상대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> 어레이 신호처리, 마이크로프로세서, 레이더 신호처리

왕 혁 소 (Yisu Wang)

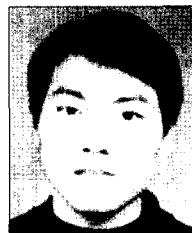
준회원



2004년 8월 안산과기대 전자공학과 졸업  
2004년 9월~현재 경상대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> 어레이 신호처리, 레이더 신호처리

주 위 위 (Weiwei Zhou)

준회원



2004년 8월 안산과기대 전자공학과 졸업  
2004년 9월~현재 경상대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> 어레이 신호처리, 레이더 신호처리

고 진 환 (Jinhwan Koh)

정회원



1999년 시라큐스대학 전기공학 박사졸업  
2003년 4월~현재 경상대학교 공과대학, 공학연구원, 전자공학과의 조교수  
<관심분야> 레이더 신호처리, 적응형 신호처리, 마이크로프로세서