

탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동해석

Vibration Analysis of Thick Plates with Concentrated Mass on Elastic Foundation

김 일 중* · 이 용 수† · 오 속 경**

Il Jung Kim, Yong Soo Lee and Soog Kyoung Oh

(2006년 1월 24일 접수 ; 2006년 5월 8일 심사완료)

Key Words : Concentrated Mass(집중질량), Vibration(진동), Tapered Ratio(변단면률)

ABSTRACT

This study is undertaken for the vibration analysis of tapered thick plate with concentrated mass on elastic foundation. The boundary condition of the plate is analyzed with the 4-sides simply supported and 4-fixed basis. This study find out the frequency following the change in size for each foundational variable on Pasternak foundation, one of the two-parameter elastic foundation parameter that considered the shear layer to the Winkler foundation parameter. The concentrated mass is applied with the consideration of mass of the entire plate, and the change of frequency is studies on each location with the consideration of reacting for the three locations for concentrated mass. And, in order to find out the change of frequency on the thickness of the plate, it considered tapered ratio that linearly changes depending on the length of the plate with the thickness of the plate in x-direction, and the tapered ratio has changes with 4 types ($\alpha = 0.25, 0, 5, 0.75, \text{ and } 1.0$). For the interpretation, the program using finite element method (F.E.M.) is used and the element coordination is used the 8-node serendipity element. Therefore, the purpose of this study is to find out the characteristics of plate vibration under the mechanical vibration or external vibration factor to facilitate as the basic data of the design to secure the stability.

기 호 설 명

$a \times b$: 판 의 크기
 D : 판의 휨강성
 E : 탄성계수
 h : 판 두께
P1, P_c, P2 : 위치에 따른 집중질량

m : 판 전체 질량
 SFP : 전단지반 파라미터
 WFP : Winkler 지반 파라미터
 ρ : 단위 체적당 질량
 ν : 푸아송 비
 w : 수직처짐
 θ_x : x방향 회전각
 θ_y : y방향 회전각
 ω : 판의 고유진동수

† 책임저자; 정회원, 원광대학교 건축학부
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6709, Fax : (063) 843-0782
* 정회원, 전북과학대학 건축·토목 계열
** 정회원, 원광대학교 건축학부

현대 건축물은 고층화, 대형화 되어가고 있으며 건축물이 요구하는 기능에 따라 다양한 기하학적 형태를 나타내고 있다. 건축물이 대규모화 되고 형태도 다양해짐에 따라 지하구조물의 형상도 다양해지고 있으며 지하구조물의 경제성과 역학적인 효율성을 높이기 위해 변단면으로 시공되기도 한다. 최근 지진의 발생 빈도가 점차 증가됨에 따라 지진동 등이나 기계화에 따른 기계진동과 같은 외력에 의한 진동에 관한 연구의 필요성이 증대되고 있다.

이 연구에서는 건축구조물의 온통기초(mat foundation)를 후판으로 고려하고, 판의 두께가 판의 길이에 따라 선형적으로 변화하는 변단면을 고려하였으며, 지반은 탄성지반으로 이상화 하였다. 또한 기계진동 등과 같은 외부 진동에 대한 영향을 파악하기 위해 판에 집중질량을 작용시켜 이에 따른 진동 특성을 파악하여 기계 진동 등이 작용하고 지반에 지지된 변단면 판의 진동 특성을 규명하고자 한다.

Laura는 1985년⁽³⁾ Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석을 행하였으며, 같은 해 J. A. G. Horenberg는 modal constraint법을 이용하여 판의 동적 해석⁽⁴⁾을 행하였다. K. H. Low는 집중질량을 받는 판의 진동 특성⁽¹⁾에 대해 1993년 발표하였다. 국내에서 변단면 후판에 관한 연구는 활발하지 않은 상태이며, 후판에 관한 연구를 살펴보면 2005년에는 김일중이 비균질 Pasternak 지반위에 놓인 집중질량을 갖는 후판의 자유진동해석⁽⁷⁾을 수행한 있다.

이 연구에서는 탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동해석으로 지지된 탄성지반은 Winkler 지반 모형에 전단층을 고려한 two-parameter 탄성 지반 모형중의 하나인 Pasternak 지반으로 모형화하여 전단지반변수에 따른 진동수를 파악하였다. 판에 작용시킨 집중질량의 크기와 위치변화에 따라 진동수를 파악하였으며, 판의 변단면율과 지지조건에 따른 진동해석을 수행하였다.

2. 유한요소법에 의한 후판의 고유진동

가상 일의 원리를 이용하여 탄성지지된 집중질량을 받는 변단면 후판의 진동방정식을 얻는다.

2.1 탄성 지반

탄성지반은 Fig. 1과 같이 지반을 수직 스프링으로 이상화한 Winkler지반과 변위의 연속성을 고려하기 위한 전단층으로 이상화 한 Pasternak지반 모형을 사용하였으며, Pasternak지반을 구성하는 Winkler지반 매개변수(WFP)와 전단지반매개변수(SFP)는 다음과 같이 정의된다.

$$WFP = \frac{k_w a^4}{D}, \quad SFP = \frac{k_g a^2}{D} \quad (1)$$

여기서,

k_w : Winkler 지반 강성

k_g : 전단지반 강성

a : 판의 크기

D : 판의휨강성

2.2 판요소의 변위함수 구성

(1) 변단면 후판 요소

판은 Fig.2와 같이 두께 h 가 판의 길이에 따라 1 방향에 대해 선형적으로 변하는 변단면 후판으로 두께에 대한 함수는 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \quad (2)$$

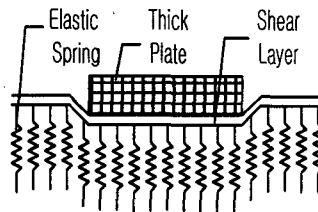


Fig. 1 Modeling of Pasternak foundation

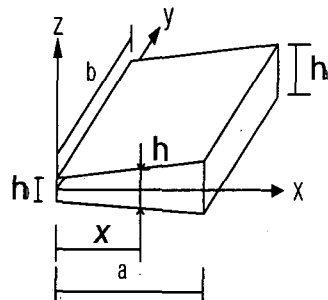


Fig. 2 Tapered thick plate

여기서, h_0 는 $x=0$ 일 때 판의 두께,

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad f(\xi) = 1 + \alpha\xi,$$

$\alpha = (h_a - h_0)/h_0$: Tapered ratio

h_a 는 $x=a$ 일 때 판의 두께,

변단면 후판의 힘 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \quad (3)$$

여기서, $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu^2)$

ν : 푸아송 비

(2) 판요소의 변위 함수

판 요소의 크기를 $a \times b$ 로 정의 할 때 무차원 좌표계는 $\xi = (x - x_c)/a$, $\eta = (y - y_c)/b$ 이고 Fig. 3과 같이 8절점 serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (4)$$

여기서,

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} \dots w_8 \theta_{x8} \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

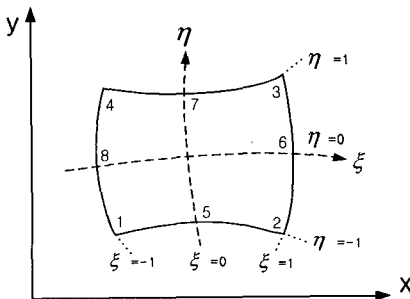


Fig. 3 8-node serendipity element

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} [(1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i) (1 - \xi_i^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i) (1 - \eta_i^2)] \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

2.3 판의 강성 행렬 및 질량행렬

가상일의 원리 $\delta(T - U) = 0$ 을 적용하기 위해 변단면율과 집중질량을 고려한 판요소의 운동에너지 (T_e)와 지반에 대한 항을 포함한 변형에너지 (U_e)를 구하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(h \bar{w}^2 + \frac{h^3}{12} \bar{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \bar{\theta}_y^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} m_c(a_1, b_1) \bar{w}^2(a_1, b_1) \quad (5a)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} M^T x dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Q^T \psi dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w w^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w w^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w w^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_g [w^2_{,x} + w^2_{,y}] dx dy \quad (5b)$$

여기서,

$$\bar{w}(a_1, b_1) = \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{x=a_1, y=b_1}$$

m_c : 집중질량크기

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \dot{\theta}_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial t}, \quad \dot{\theta}_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial t}$$

$$M = [M_x \ M_y \ M_{xy}], \quad Q = [Q_x \ Q_y]$$

$$x = \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \right]^T$$

$$\phi = [-\phi_x, -\phi_y]^T = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right]^T$$

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

식 (5a)는 판 요소의 회전관성과 집중질량까지 고려한 운동에너지를 나타낸 식이고, 식 (5b) 우변의 첫째 항은 판 요소의 횡변형에너지, 둘째 항은 전단 변형에너지, 셋째 항은 Winkler지반에 대한 에너지, 넷째 항은 전단지반에 대한 에너지를 나타낸다.

식 (5a) 우변의 첫째 항은 다음과 같이 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(h \bar{w}^2 + \frac{h^3}{12} \bar{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \bar{\theta}_y^2 \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left[\bar{w} \ \bar{\theta}_x \ \bar{\theta}_y \right] \\ & \quad \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{bmatrix} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \ \bar{\delta}^T \overline{m_e} \ \delta dx dy \\ &= \frac{1}{2} \ \bar{\delta}_e^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \ N^T \overline{m_e} \ N dx dy \ \delta_e \\ &= \frac{1}{2} \ \bar{\delta}_e^T m_e \ \delta_e \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$\overline{m_e} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix}$$

$$m_e = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \ N^T \overline{m_e} \ N dx dy : \text{질량행렬}$$

$$\delta = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T,$$

$$\delta_i = [w_i \ \theta_{\xi} \ \theta_{y_i}]^T,$$

$$\delta_e = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_8]^T$$

식 (5a) 집중질량이 고려된 우변 둘째 항도 다음과 같이 고칠 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_c(a_1, b_1) \bar{w}^2(a, b_1) \\ &= \frac{1}{2} m_c(a_1, b_1) \bar{w}_e^T \overline{N^T N} \bar{w}_e \Big|_{y=b_1}^{x=a_1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\bar{w}_e^T m_c(a_1, b_1) \overline{N^T N} \bar{w}_e \right]_{y=b_1}^{x=a_1} \\ &= \frac{1}{2} \bar{w}_e^T m_p \bar{w}_e \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$\bar{w}_e = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_8]^T$$

$$m_p = m_c(a_1, b_1) \overline{N^T N} \Big|_{y=b_1}^{x=a_1} : \text{집중질량행렬}$$

식 (5a)의 우변을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \bar{\delta}_e^T m_e \delta_e + \frac{1}{2} \bar{w}_e^T m_p \bar{w}_e \quad (8)$$

식 (5b)의 첫째 항은 다음과 같이 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} M^T x dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^T D_f^T x dx dy \\ &= \frac{1}{2} \bar{\delta}_e^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_f^T D_f^T B_f dx dy \ \delta_e \\ &= \frac{1}{2} \bar{\delta}_e^T K_{ef} \delta_e \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\chi = B_f \delta_e = [B_{f1}, B_{f2}, \dots, B_{f8}] \delta_e \quad (10)$$

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial N_i / \partial y \\ 0 & -\partial N_i / \partial y & -\partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

(i=1, 2, \dots, 8)

$$K_{ef} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_f^T D_f^T B_f dx dy$$

식 (5b)의 두 번째 항도 마찬가지로 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Q^T \psi dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi^T D_s^T \psi dx dy \\ &= \frac{1}{2} \delta_e^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_s^T D_s^T B_s dx dy \delta_e \\ &= \frac{1}{2} \delta_e^T K_{es} \delta_e \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$D_s = \frac{Eh}{2(1+\nu)\chi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi = B_s \delta_s = [B_{s1}, B_{s2}, \dots, B_{s8}] \delta_s \quad (12)$$

$$B_{si} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & -N_i & 0 \\ \partial N_i / \partial y & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

(i=1, 2, \dots, 8)

$$K_{es} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_s^T D_s^T B_s dx dy$$

$\chi = \frac{6}{5}$: 전단 보정계수

식 (5b)의 셋째 항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w w^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w w_e^T \overline{N^T N} w_e dx dy \\ &= \frac{1}{2} w_e^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w \overline{N^T N} dx dy w_e \\ &= \frac{1}{2} w_e^T K_{fw} w_e \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$w_e^T = [w_1, w_2, \dots, w_8]$$

$$K_{fw} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_w \overline{N^T N} dx dy$$

식 (5b)의 네 번째 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_g (w_{,x} + w_{,y}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w_e^T k_g \left\{ \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right) \right\} w_e dx dy \\ & \quad + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) dx dy w_e \\ &= \frac{1}{2} w_e^T K_{fs} w_e \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{fs} = & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_g \left\{ \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right) \right\} dx dy \end{aligned}$$

따라서 식 (5b)를 행렬형태로 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \delta_e^T K_{ef} \delta_e + \frac{1}{2} \delta_e^T K_{es} \delta_e + \frac{1}{2} w_e^T K_{fw} w_e + \frac{1}{2} w_e^T K_{fs} w_e \quad (15)$$

2.4 고유치 방정식

판의 고유진동수를 얻기 위해 판요소의 운동에너지식과 변형에너지식에 변분을 취하고 전체 판요소에 대해 조합하면 판의 고유진동수를 얻을 수 있는 고유치방정식을 얻을 수 있다.

식 (5a)를 행렬형태로 나타낸 식 (8)과 식 (5b)를 행렬형태로 나타낸 식 (15)의 변분을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\delta T_e = \delta (\delta_e^T) m_e \delta_e + \delta (w_e^T) m_p w_e \quad (16)$$

$$\delta U_e = \delta (\delta_e^T) [K_{ef} + K_{es}] \delta_e + \delta (w_e^T) [K_{fw} + K_{fs}] w_e \quad (17)$$

전체 유한요소에 대해 조합하여 운동에너지 및 변형에너지 변분을 구하면 다음과 같다.

$$\delta T = \delta (\Delta^T) [M_e + M_p] \Delta \quad (18)$$

$$\delta U = \delta (\Delta^T) [K + K_f] \Delta \quad (19)$$

여기서,

- Δ : 전체 판의 절점 변위
- M_e : 전체 판의 질량 행렬
- M_p : 전체 판의 집중 질량 행렬
- K : 전체 판의 휨 및 전단 강성 행렬
- K_f : 전체 판의 지반 강성 행렬

가상일의 원리에 식 (18)과 식 (19)를 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta (T - U) = \delta (\Delta^T) [\omega^2 (M_e + M_p) - (K + K_f)] \Delta = 0$$

위 식에서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$(K + K_f) - \omega^2 (M_e + M_p) = 0 \quad (20)$$

식 (18)에서 ω^2 은 고유값이 되고, ω 는 판의 고유 진동수를 나타낸다.

3. 유한요소해석의 적용

3.1 비교분석

탄성지지된 집중 질량을 갖는 변단면 후판의 진동수를 구하기 위해 유한요소법을 적용하였으며, 본 해석 이론 및 유한요소해석의 신뢰성을 검증하기 위해 기존해와 비교하였다. Table 1은 중앙에 집중질량 $P_c = (\rho a^2)/4$ 가 가해진 후판의 고유진동수를 Leissa⁽⁶⁾의 해와 비교한 것이다. Leissa는 Dirac Delta함수를 이용하여 판의 진동 해석을 하였으므로 고려한 함수의 항수에 따라 값의 차이가 있을 수 있으며, 4차 항까지 고려한 Leissa의 해와 본 해와 비

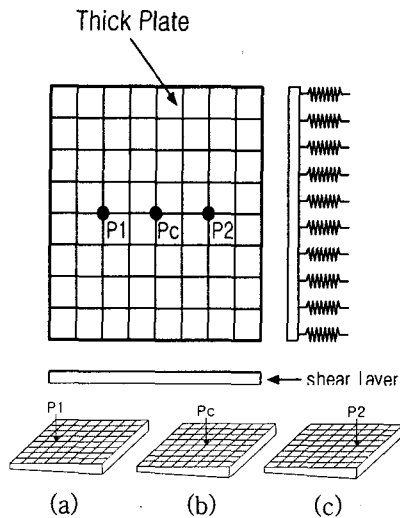


Fig. 4 Position of concentrated mass

Table 1 Comparison natural frequency present and Ref. (6) ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$) (position of concentrated Mass: center, 50 cm × 50 cm, t=0.455 cm, all side simple supported)

Ref. (6)		This study
Mode number	Frequency	Frequency
1	13.96	13.76
2	13.89	
3	13.81	
4	13.79	

교한 결과 0.22%의 오차를 보였다.

Table 2는 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 taper ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 이 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

Table 3은 Winkler지반 매개변수(WFP)와 전단지반 매개변수(SFP)의 변화에 따른 4변 단순지지 정방형 후판의 고유진동수를 본 해석해와 기존해를 비교한 것이다. Table 2에 의하면 기존해와 본 해석해의 최대 오차가 0.22% 정도임을 알 수 있으며, Winkler지반 매개변수가 큰 경우 전단지반 매개변수 유무에 따른 고유 진동의 변화가 크지 않으나 (WFP = 104, SFP=0일때 $\lambda^2 = 98.7452$, WFP = 104, SFP = 10일때 $\lambda^2 = 99.6619$ 로 λ^2 의 차이는 별로 없다.)

Table 2 Natural frequency of tapered thick plates
($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0}$)

α (taper ratio)	Ref. (2)	This study	Error(%)
0.2	21.59051	21.58787	0.01
0.4	23.54861	23.45184	0.19
0.6	25.37844	25.29344	0.33
0.8	27.23463	27.08043	0.56

Table 3 Comparison natural frequencies versus foundation parameters by present and Ref.(5) ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$) (position of concentrated mass: center, 100 cm×100 cm, $t=20.0$ cm, all side simple supported)

SFP	WFP	Ref.(5) (simply supported)	This study (errors)
0	0	17.4486	17.4345 (0.08%)
	10	17.7208	17.7071 (0.08%)
	102	20.0042	19.9952 (0.05%)
	103	35.5028	35.5161 (-0.04%)
	104	98.5331	98.7452 (-0.22%)
10	0	22.2117	22.1956 (0.07%)
	10	22.4261	22.4104 (0.07%)
	102	24.2698	24.2580 (0.05%)
	103	38.0638	38.0741 (-0.03%)
	104	99.4473	99.6619 (-0.22%)

* SFP=Shear foundation parameter
* WFP=Winkler foundation parameter

Winkler지반 매개변수가 작은 경우 전단지반 매개변수 유무에 따른 고유 진동수의 변화가 커짐을 알 수 있다. (WFP=10, SFP=10일때 $\lambda^2=17.4345$, WFP=0, SFP=10일때 $\lambda^2=22.1956$ 로 λ^2 의 약 27% 정도 증가)

3.2 집중 질량에 대한 판의 진동

신뢰성이 검증된 유한요소해석법을 이용하여 탄성 지지된 집중 질량을 받는 변단면 후판의 진동수를 구하였다. 판은 대칭성을 고려하여 판의 1/2만을 8×4요소로 분할하여 해석하였다.

이 연구를 위한 해석 조건은 다음과 같다.

탄성계수(E) : 2.1×10^5 kgf/cm²

단위체적당질량(ρ) : 2.1443×10^{-3} kg/cm³

푸아송 비(ν) : 0.167

변단면률(α) : 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0

판의 크기($\bar{a} \times \bar{b}$) : 4.0×4.0 m

판의 두께(h_0) : 10 cm

WFP : 0, 20, 50, 100, 200, 500, 1000

SFP : 5

집중질량크기 : 0 ~ 0.5* m (kg)

판의 지지상태 : 4변 단순지지, 4변고정지지

Fig. 5~10은 탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 판의 지반매개변수(WFP, SFP), 집중질량의 크기와 위치변화, 판의 변단면률에 따른 진동수의 변화를 그래프로 나타낸 것이다.

먼저 Fig. 5는 WFP=100, SFP=5.0인 판에 Fig. 4(b)와 같이 집중질량이 중앙에 작용한 경우 집중질량의 크기와 판의 변단면률에 따른 고유진동수를 각 지지조건에 따라 나타낸 그림이다. 그림에서 보는 바와 같이 단순지지된 변단면판에 집중질량이 작용하지 않는 경우(mass=0) 판의 변단면률(α)이 커질수록 판의 고유진동수가 커지는 것을 알 수 있다. 판에 집중질량이 작용하는 경우는 집중질량이 작용하지 않는 경우에 비해 판의 고유진동수가 급속히 감소함을 알 수 있으며, 집중질량비가 커짐에 따라 각 변단면률의 진동수는 작아지는 양상을 보이다가 집중질량비가 어느 일정치에 이르면 각 변단면률에 따라 일정한 고유진동수 값에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6은 Fig. 5와 같은 조건에서 판의 경계조건만 고정지지의 변화시켰을 경우 변단면 판의 고유진동수로 단순지지의 고유진동수에 비해 더 크게 나타났으나, 집중질량과 변단면률에 따른 고유진동수 변화는 단순지지와 유사한 변화 양상을 보이다가 집중질량이 큰 경우($mass=0.5$) 고유진동수는 단순지지의 값과 거의 유사한 값을 보임을 알 수 있다.

Fig. 7은 변단면률(α)을 0.5, $WFP=100$, $SFP=5.0$ 으로 일정하게 한 경우에 대해 Fig. 4(a)~(c)에서 보는 바와 같이 집중질량의 위치변화에 따른 고유진동수 변화를 그래프로 나타낸 것이다. Fig. 7에서 보듯 집중질량이 커짐에 따라 변단면판의 고유진동수는 감소하였다. 집중질량이 판의 중앙에 작용하는 경우와 집중질량이 판 두께가 얇은 부위에 작용하는 경우는 거의 비슷한 고유진동수 값을 보였으며, 판의 두께가 두꺼운 부분에 집중질량이 작용하는 경

우는 위 두 경우에 비해 큰 고유진동수 값을 보임을 알 수 있다.

Fig. 8은 단순지지된 변단면판에 $WFP=100$, $SFP=5.0$, $mass=0.2$ 로 일정한 경우 변단면률과 집중질량이 작용하는 위치에 따른 변단면판의 고유진동수 변화를 그래프로 나타낸 것이다.

이 경우 동일조건인 변단면률에 대해 집중질량이 판의 중앙에 작용하는 경우가 가장 낮은 고유진동수를 나타냈으며, 판의 두께가 얇은 곳에 집중질량이 작용하는 P1의 경우보다 판의 두께가 두꺼운 집중질량이 작용하는 P2의 경우 고유진동수가 높게 나타났다. 판의 중앙에서 가장 낮은 진동수를 보인 것은 판의 진폭에 영향을 크게 주는 부분이 중앙으로 집중질량이 작용하여 판의 진동에 영향을 미친 것으로 보인다.

Figs. 9 ~ 10은 변단면판의 $WFP=100$, $SFP=0.02$

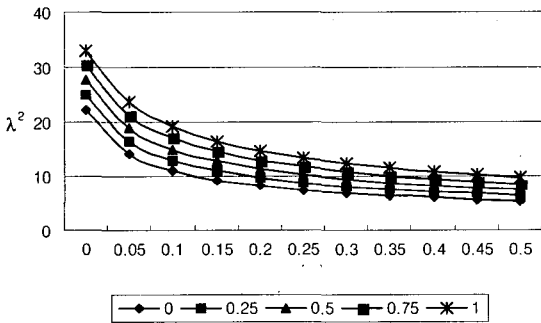


Fig. 5 Variation of natural frequencies (position of concentrated masses : center, $WFP=100$, $SFP=5.0$, $\alpha=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$, all side simple supported)

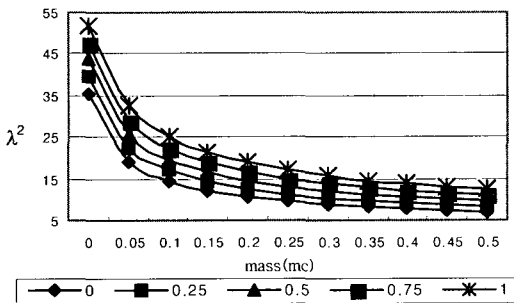


Fig. 6 Variation of natural frequencies (position of concentrated masses : center, $WFP=100$, $SFP=5.0$, $\alpha=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$, all side fixed)

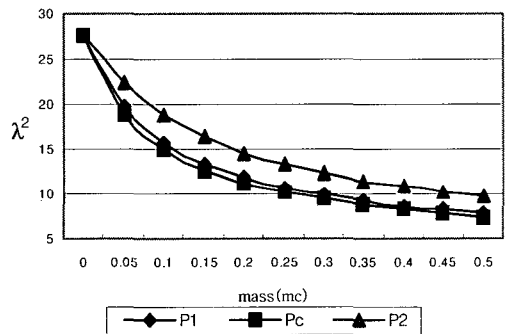


Fig. 7 Variation of natural frequencies versus vibrations concentrated masses (all side simple supported)

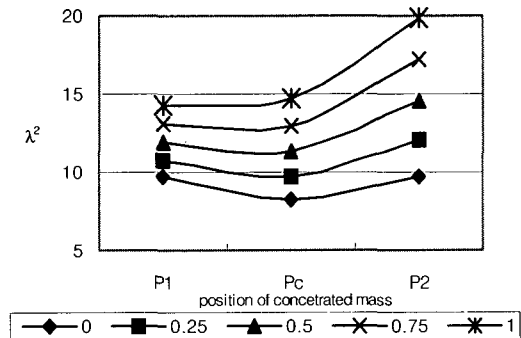


Fig. 8 Variation of natural frequencies versus vibrations of position of concentrated masses

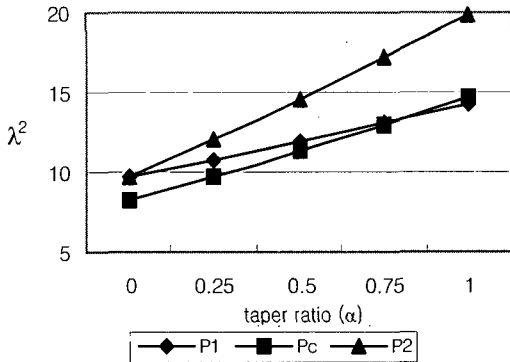


Fig. 9 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(α) (all side simple supported)

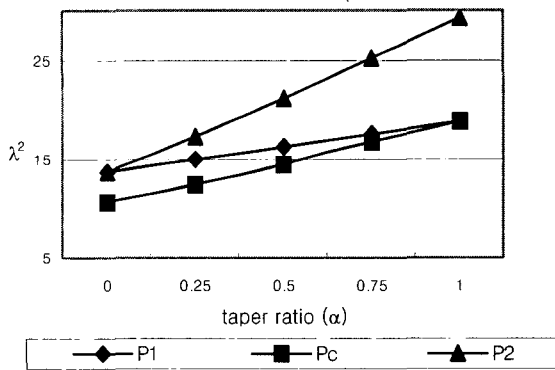


Fig. 10 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(α) (all side fixed)

으로 일정한 경우 변단면률과 집중질량의 작용위치변화와의 관계를 나타낸 것이다. 변단면 판의 고유진동수는 변단면률이 증가함에 따라 선형으로 증가하는 것을 볼 수 있다. 집중하중이 P2에 작용하는 경우와 Pc에 작용하는 경우 변단면률이 커짐에 따라 판의 고유진동수도 급격하게 증가하는 것을 볼 수 있으나 집중하중이 P1에 작용하는 경우 변단면률이 커짐에 따라 판의 고유진동수는 완만하게 증가하는 것을 볼 수 있으며, 이러한 각 집중질량 위치에 따른 고유진동수의 변화 양상에 의해 단순지지의 경우는 TR=0.75이상인 경우에서 Pc의 고유진동수가 P1보다 오히려 크게 나타났고, 고정지지의 경우는 TR=1.0인 경우 Pc와 P1의 고유진동수가 거의 같아지는 것을 볼 수 있다. 이는 집중질량이 작용하는

Table 4 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation parameter (all side simple supported, $SFP=5.0$).

Position	WFP						
	0	20	50	100	200	500	1000
P1	11.00	11.20	11.47	11.89	12.61	14.23	16.00
Pc	10.23	10.46	10.78	11.29	12.19	14.37	16.91
P2	13.39	13.65	14.03	14.61	15.64	17.97	20.55

Table 5 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation parameter (all side fixed, $SFP=5.0$).

Position	WFP						
	0	20	50	100	200	500	1000
P1	15.77	15.82	15.96	16.14	16.49	17.38	18.54
Pc	14.03	14.13	14.28	14.52	14.99	16.23	17.95
P2	20.66	20.77	20.93	21.19	21.67	22.92	24.54

위치가 판의 강성이 다르므로 그에 따른 판의 전체 진동수에 미치는 영향정도가 다르기 때문인 것으로 판단된다. 따라서 진동수에 영향을 집중질량의 위치는 변단면률이 큰 쪽에 집중질량이 작용할 경우 판의 진동수에 영향이 적은 것으로 보인다.

Table 4와 5는 판을 지지하는 탄성지반의 강성변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸 표이다. 탄성지반 매개변수(WFP)가 증가함에 따라 각 집중질량의 위치의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다. 집중질량이 P2에 작용하는 경우는 P1, Pc에 비해 높은 고유진동수를 보였으며, 단순지지의 경우는 WFP = 200을 초과한 경우 집중질량이 P1에 작용한 경우보다 Pc에 작용한 경우의 고유진동수가 오히려 더 크게 나타나는 것을 볼 수 있으나, 고정지지의 경우는 고유진동수 크기는 집중하중이 Pc, P1, P2 순서로 크게 나타났으며 단순지지와 같이 고유진동수의 반전은 보이지 않았다.

4. 결 론

이 연구는 탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동해석에 관한 연구이다. 탄성지반은 전

단지반과 Winkler 지반이 고려된 Pasternak 지반으로 모델링하였으며, 판의 변단면률과 판에 작용하는 집중질량의 크기 및 위치 변화에 따른 고유진동수를 산정하여 이에 따른 고유진동수의 변호를 검토하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 집중질량만을 갖는 판, 지반위에만 놓여진 판, 탄성지지된 집중질량을 갖는 판과 변단면률과 지반을 고려한 판의 고유진동수를 구하고 기존해와 각각 비교한 결과 0.56% 이하의 적은 오차를 보였다.

(2) 변단면률에 따른 진동수의 변화는 변단면률이 나 판의 지지 상태에 따라 모두 비슷한 감소양상을 보였다. 집중 질량이 증가함에 따라 고유진동수는 일정한 값에 수렴하여 감을 알 수 있다.

(3) 변단면률에 대해 집중질량이 판의 중앙에 작용하는 경우가 가장 낮은 고유진동수를 나타냈으며, 판의 두께가 얇은 곳에 집중질량이 작용하는 P1의 경우보다 판의 두께가 두꺼운 집중질량이 작용하는 P2의 경우 고유진동수가 높게 나타났다.

(4) 변단면 판의 고유진동수는 변단면률이 증가함에 따라 선형으로 증가하는 것을 볼 수 있다.

(5) 탄성지반 매개변수(WFP)가 증가함에 따라 각 집중질량의 위치에서의 고유진동수도 증가하였다. 단순지지의 경우는 WFP 가 커짐에 따라 각 집중질량 위치 P1, P_c, P2 순서로 WFP 가 작을 경우와 달리 고유진동수가 크게 나타났으며, 고정지지의 경우에는 집중하중의 작용위치 P_c, P1, P2 순서로 고유진동수가 크게 나타났다.

후 기

이 연구는 2006년 원광대학교 교내 연구비에 의해 수행된 것입니다.

참 고 문 헌

(1) Low, K. H., Ng, C. K. and Ong, Y. K., 1993, "Comparative Study of Frequencies for Carrying Mass," ASCE J. Engng Mech. ASCE Vol. 119, No. 5, pp. 917 ~ 937.

(2) Kukreti, A. R., Farsa J. and Bert, C. W., 1996, Differential Quadrature and Rayleigh-Ritz Method to Determine the Fundamental Frequencies of Simply Supported Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness, J. of Sound and Vibration, pp. 103 ~ 122.

(3) Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., 1985, "Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method," J. of Sound and Vibration, Vol. 101, pp. 307 ~ 315.

(4) Horenberg, J. A. G. and Kerstens, J. G. M. 1985, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," Computers and Structures, Vol. 101, pp. 317 ~ 324.

(5) Matsunaga, H., 2000, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations," Journal of Engineering Mechanics, pp. 27 ~ 34.

(6) Leissa, A., 1993 "Vibration of plates," Acoustical Society of America.

(7) Kim, I. -J., 2005, "Free Vibration of Thick Plates with Concentrated Masses on In-homogeneous Pasternak Foundation," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 4 pp. 281 ~ 289.