〈 논문 〉

비선형 Ekman 펌핑 모델의 개발

서 용 권† · 박 재 현*

(2006년 2월 2일 접수, 2006년 4월 18일 심사완료)

Development of a Nonlinear Ekman Pumping Model

Yong Kweon Suh and Jae Hyun Park

Key Words: Rotating Flow(회전유동), Nonlinear Ekman Pumping Model(비선형 에크만 펌핑 모델), Momentum-integral Method(운동량 적분법)

Abstract

Developed in this study is a nonlinear Ekman pumping model to be used in simulating the rotating flows with quasi-three-dimensional Navier-Stokes equations. In this model, the Ekman pumping velocity is given from the solution of the Ekman boundary-layer equations for the region adjacent to the bottom wall of the flow domain; the boundary-layer equations are solved in the momentum-integral form. The developed model is then applied to rotating flows in a rectangular container receiving a time-periodic forcing. By comparing our results with the DNS and experimental data we have validated the developed model. We also compared our results with those given from the classical Ekman pumping model. It was found that our model can predict the rotating flows more precisely than the classical linear model.

1. 서 론

유체역학의 연구 분야의 하나로 분류되는 회전유동(rotating flows)은 일반적으로 회전하는 좌표계에 대한 유체의 상대운동이 관심의 대상인 경우를 주로 의미하며 유동은 근본적으로 좌표변환에 따른 인위적인 힘들(원심력, 코리올리스 힘)에 의해서 생겨난다. 이 때 좌표계의 회전속도에 대한 유동속도의 비 즉 로스비 수(Rossby number)가 1보다 충분히 작으면 유동의 속도벡터는 회전축에 수직인 단면에 평행하게 되고자 하는 2방향화 성향(즉, Taylor-Proudman 이론)과 코리올리스 힘, 압력 등과 같은 포텐셜의 상호 작용에 따른 각종 내부 파동(즉 관성진동)이 형성되는 특징을 보인다. 이러한 회전유동은 자연환경은 물론이고 터보유체기계, 액정표시 장치(TFT-LCD) 제조시의 스핀 코팅, 회전식 주조 장치, 원심분리기 등의 공학 및 산업분야 등에 응용될 수 있다.

회전유동에 대한 실질적인 연구는 역사적으로 스핀업(spin-up) 유동의 연구에서 비롯된다. 스핀업 유동의 분야는 Greenspan & Howard[1]의 측면 벽이 존재하지 않는 무한 평판 사이의 축대칭 문제에서부터 시작하여 van Heijst,[2] Zavala Sanson & van Heijst[3]과 Suh & Choi[4]의 비원형 용기 내 스핀업 유동 문제까지 상당한 연구가 진행되어왔다. 특히 Suh & Choi[4]는 Zavala Sanson & van Heijst[3]가 원형용기에 대해 적용한 선두 오더(leading order)의 Ekman 펌핑 모델을 비원형 용기로 확장 적용하였으며, 선두 오더뿐만 아니라 1차 오더(1st order)의 펌핑 모델까지 제시하여 모델 개선에 따른 주유동의 개선 가능성을 보여주었다.

그러나, van Heijst 연구그룹[2,3]과 Suh의 연구그

† 책임저자, 회원, 동아대학교 기계공학부
E-mail : yksuh@dau.ac.kr
TEL : (051)200-7648 FAX : (051)200-7656
* 회원, 동아대학교 대학원 기계공학부

룹[4]에 의해 개발된 Ekman 펌핑 모델은 Ekman 경계층의 방정식을 선형화 하여 해석적으로 해를 구할 수 있는 형태로 만들기 위해 낮은 로스비 수를 가정하였기 때문에 원칙적으로 로스비 수가 낮은 경우에 대해 그 적용성이 타당시 된다. 따라서 이 모델을 이용한 2차원 Navier-Stokes 방정식의 해는 로스비 수가 1에 근접한 경우, 혹은 배경 회전속도가 시간적으로 변동하는 주기유동의 경우 등에는 오차가 상당한 것으로 보고된 바 있다.[5]

따라서 본 연구에서는 이를 근본적으로 개선하기 위해서 Ekman 경계층에 대한 비선형 방정식의 해를 운동량적분법(momentum-integral method)으로 구하고 이로부터 Ekman 펌핑 속도를 구한 뒤 2차원 지배방정식에 적용하는 새로운 수치해석 모델을 개발하고 이를 구체적인 유동 문제에 적용하여 그 타당성을 확인하고자 한다.

2. 지배방정식과 비선형 Ekman 펌핑모델

앞의 서론에서 언급한 바와 같이, 로스비 수가 1보다 충분히 작은 경우 회전유동은 회전축에 수직인 단면(앞으로는 '수평 단면'이라 부름)으로 정렬하고자 하는 성향을 가진다. 따라서 바닥 근처의 Ekman 경계층을 제외한 공간 내 대부분의 영역(앞으로는 '외부 영역'이라 부름; Fig. 1)은 이와 같은 2차원 유동으로 가정하여 지배방정식을 세워 해석해도 좋다. 다만, 바닥의 경계층에서 생겨나는 점성효과로 인해 Ekman 펌핑 효과가 있고 이를 제대로 잘 반영한다면 2차원 방정식만으로 외부 영역에서 발생하는 실제의 3차원 유동을 잘 묘사할 수 있다는 것이 회전유동의 기본 논리이다.

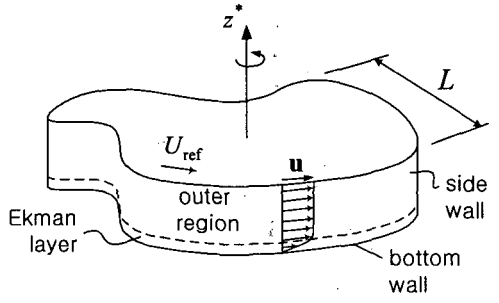


Fig. 1 Sketch of the physical model for a rotating flow in a container

본 연구에서 무차원화를 위해 대표길이를 L, 대표시간을 T라 하고 대표속도 U_{ref}(Fig. 1 참조)를 L/T로 잡고 무차원 와도를 도입하면, 외부 영역의 유동을 지배하는 2차원 와도 방정식의 무차원 형태는 아래와 같다.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+2\left\{\frac{1}{\epsilon}+f+\frac{1}{2}\zeta\right\}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right\} = \frac{1}{Re}\nabla^2\zeta-2\frac{df}{dt} \tag{1}$$

여기서 모든 변수는 무차원이며, t는 시간, x, y는 수평방향 좌표, $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$는 각 방향의 유동속도 성분, $f(t)$는 좌표계의 회전각속도의 변동 성분을 나타낸다; 회전축은 수직 즉 z-방향임, Fig. 1 참조. 와도는

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

와 같이 정의된다. ϵ은 로스비 수로서 좌표계의 대표 회전각속도를 Ω_b라 한다면 $\epsilon=T\Omega_b$가 된다. 그리고 Re는 레이놀즈 수로서 $Re=U_{ref}L/\nu$이다.

식 (1)에서 좌변의 네 번째 항에 나타난 속도장의 발산형태(divergence form)는 Taylor-Proudman 이론에 따라서 수직속도 w가 외부 영역에서 수직좌표 z에 대해 선형적으로 변한다고 가정하면 아래와 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cong\frac{w_E}{h} \tag{3}$$

여기서 $w_E(x,y,t)$는 용기 바닥의 Ekman 경계층에 의한 펌핑 속도를 나타낸다. 유동함수 ψ와 속도 포텐셜 ϕ를 도입하고 각각의 속도성분을

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{4a}$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{4b}$$

으로 표현하면 식 (2)와 (3)에 의해 유동함수와 속도 포텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2\psi = -\zeta \tag{5a}$$

$$\nabla^2\phi = w_E/h \tag{5b}$$

Ekman 펌핑 속도 w_E는 바닥의 경계층 방정식의 해로부터 구해진다. 이를 위해 바닥의 무차원 경계층 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0 \tag{6a}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+W\frac{\partial\tilde{u}}{\partial Z}-2\left\{\frac{1}{\epsilon}+f\right\}\tilde{v}-\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial Z^2} = u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-2\left\{\frac{1}{\epsilon}+f\right\}v \tag{6b}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+W\frac{\partial\tilde{v}}{\partial Z}+2\left\{\frac{1}{\epsilon}+f\right\}\tilde{v}-\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial Z^2} = u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+2\left\{\frac{1}{\epsilon}+f\right\}u \tag{6c}$$

여기서 $Z=z\sqrt{Re}$, $W=\tilde{w}\sqrt{Re}$ 이며, $\tilde{u}(x,y,z)$, $\tilde{v}(x,y,z)$, $\tilde{w}(x,y,z)$는 경계층 내의 속도성분을 나타낸다. 운동량 적분법을 적용하기 위해 수평방향 속도성분을 다음과 같은 함수 형태로 가정한다.

$$\tilde{u}=u[1-G(Z)]-F(Z)q\sin\theta \tag{7a}$$

$$\tilde{v}=v[1-G(Z)]+F(Z)q\cos\theta \tag{7b}$$

여기서 θ는 Fig. 2와 같이 외부 영역의 주류속도벡터 $\boldsymbol{u}$가 x-축과 이루는 각을 나타낸다. 한편, 함수 $F(Z)$와 $G(Z)$는 Anderson 등[6]이 축대칭 용기에 대해 적용한 함수로서 다음과 같다.

$$F=\exp(-Z/\delta_1)\sin(Z/\delta_2) \tag{8a}$$

$$G=\exp(-Z/\delta_1)\cos(Z/\delta_2) \tag{8b}$$

여기서 δ_1과 δ_2는 각각 해당 함수의 모양을 변화시키는 파라미터로서 일종의 경계층 두께라 생각해도 좋다. 고전 Ekman 펌핑 이론에서는 δ_1과 δ_2가 동일하며 더구나 사전에 주어지는 상수 즉 $\delta_1=\delta_2=\sqrt{\epsilon}$ 이다. 본 연구에서 제안하는 개선된 펌핑 모델은 이를 미지의 공간함수로 취급하여 운동량 방정식의 적분에 의해 이를 구하는 방법이라 말할 수 있다. Anderson 등[6]은 이러한 방법을 축대칭 형상의 회전유동에 적용할 때 δ_1과 δ_2를 하나의 미지 함수 δ로 통일시켜 계산을 수행하였다. 그 이유는, 축대칭 형상의 유동문제에서는 운동량 방정식이 하나밖에 없기 때문이다. 그러나 본 연구와 같은 비축대칭 형상의 문제에서는 2개의 운동량 방정식이 주어지므로 미지수도 2개까지 설정할 수가 있고, 따라서 이와 같이 δ_1과 δ_2로 나누어 구하는 방법을 모색하였다.

식 (7a)와 (7b)의 우변 첫 항은 각각 주류방향(streamwise direction; Fig. 2 참조) 흐름을 나타내는 속도벡터의 성분이며, 두 번째 항들은 그에 수직인 횡방향(crosswise direction; Fig. 2) 흐름을 나타내는 속도벡터의 성분이다. 주류 방향 속도의 수직 좌표에 따른 변화는 주로 바닥에서의 마찰작용(또는 점착조건)의 결과이며 횡방향 속도성분은 쉽게 말하여 주류방향 흐름의 선회효과를 나타내기 위한 것이라 말할 수 있다. 횡방향 속도의 크기를 나타내는 q는 $|\boldsymbol{u}|$와 같게 두거나 또는 제 3의 미지수로 할 수 있다. 본 연구에서는 식 (7a) 및 (7b)의 우변 마지막 항에 나타나는 $q\cos\theta$와 $q\sin\theta$를 각각

$$q\cos\theta \equiv u_1=\beta_x u,\quad q\sin\theta\equiv v_1=\beta_y v \tag{9}$$

의 형태로 가정하였다. β_x와 β_y는 측면 벽으로부터의 거리에 따른 함수로서 그 구체적인 형태는 특정 유동에 대한 적용결과를 논할 때 제시하기로 한다. 이것은 용기의 측벽면 근처에서 속도성분의 큰 변화로 인해서 δ_1과 δ_2가 물리적으로 타당하지 않게 되는 경우(예; 수심보다 커지거나 음

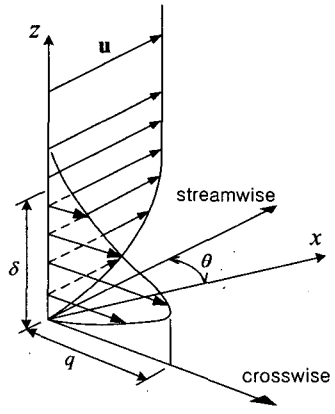


Fig. 2 Sketch for definition of δ, θ and q

의 값을 가지는 것)가 되는 것을 방지하기 위한 것으로 벽면에 가까워질수록 횡방향 속도성분의 영향을 줄인 것이라 할 수 있다.

Ekman 펌핑 속도를 구하기 위해 Ekman 경계층 유동의 지배방정식인 식 (6a)~(6c)에 식 (7a)~(8b)를 대입한 뒤 운동량 적분법(momentum-integral method)을 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$2\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)v\right\}I_1+u_1\left\{\zeta+2\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)\right\}I_2 - \left\{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right\}I_3-\left\{\frac{\partial v_1^2}{\partial x}-\frac{\partial u_1 v_1}{\partial y}\right\}I_4 \quad (10a) - 2u_1\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}I_5-uI_6+v_1I_7=0$$

$$2\left\{u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)u\right\}I_1+v_1\left\{\zeta+2\left(\frac{1}{\epsilon}+f\right)\right\}I_2 - \left\{u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right\}I_3-\left\{\frac{\partial v_1^2}{\partial y}-\frac{\partial u_1 v_1}{\partial x}\right\}I_4 \quad (10b) - 2v_1\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}I_5-vI_6-u_1I_7=0$$

여기서 δ_1과 δ_2의 함수 I_1, I_2, ... 는 아래와 같다.

$$I_1=\frac{\delta_1\delta_2^2}{\delta_1^2+\delta_2^2},\quad I_2=\frac{\delta_1^2\delta_2}{\delta_1^2+\delta_2^2},$$
$$I_3=\frac{\delta_1^3+2\delta_1\delta_2^2}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)},\quad I_4=\frac{\delta_1^3}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)} \quad (11)$$
$$I_5=\frac{\delta_1^2\delta_2}{4(\delta_1^2+\delta_2^2)},\quad I_6=\frac{1}{\delta_1},\quad I_7=\frac{1}{\delta_2}$$

단, 이 식의 유도과정에서 δ_1과 δ_2는 상수로 취급되었다. 물론 위 식 (10a), (10b)를 풀면 δ_1과 δ_2는 (x,y)에 따라 달라지기 때문에 처음부터 이들은 공간 함수로 가정하는 것이 마땅하지만, 문제는 그렇게 하였을 때 관련 수식이 매우 복잡해지며 또한 수치해법의 어려움도 예상된다. 따라서 본 연구에서는 이들을 상수로 취급하고자 하는 것이다. 추후 축대칭 유동문제에 대한 수치해석 결과의 제시에서 이렇게 하여도 큰 오차가 유발되지 않음을 보여주게 될 것이다.

식 (10a)~(10b)로부터 두 미지수 δ_1과 δ_2가 구해지면 경계층 수평단면 상의 Ekman 펌핑 속도 W_E 및 외부 영역의 수평단면 상의 Ekman 펌핑 속도 w_E는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$W_E=-\int_0^\infty\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)dZ \quad (12a)$$

$$w_E=W_E/\sqrt{Re} \quad (12b)$$

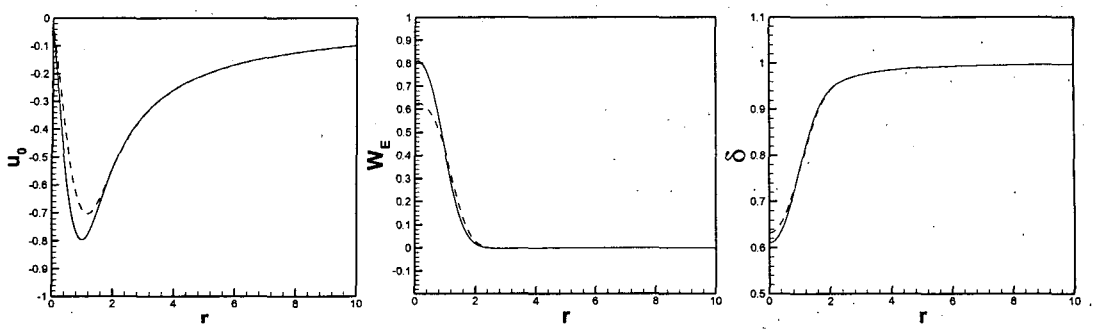
해석결과의 분석을 위해서 외부 영역의 수평단면 상에서 평균한 무차원 공간평균 운동에너지

$$E(z,t)=\frac{1}{A}\int(u^2+v^2)dxdy \quad (13)$$

를 사용한다. 여기서 A는 유동장의 수평단면 상의 무차원 면적을 나타낸다.

본 모델의 특징을 정리하면, Suh & Choi[4]에 의해서 연구된 선형 Ekman 펌핑 모델은 식 (6b)와 (6c)에서 선형항만을 고려하여 해석한 것으로 전 유동장에 걸쳐서 경계층의 두께 $\delta=\sqrt{\epsilon}$ 으로 일정하며 Ekman 펌핑 속도는 $2w_E=\zeta\sqrt{\epsilon/Re}$와 같이 와도(vorticity)에 의해서만 정해지지만, 본 비선형 모델은 경계층 두께를 두 가지로 나누고 주류방향과 그에 수직인 방향의 경계층 흐름 효과를 동시에 고려한 데 특징이 있다. 또한 이 경계층 두께를 공간의 함수로 가정함으로써 지역에 따른 경계층 흐름의 효과를 보다 현실적으로 고려한 것이 특징이라 말할 수 있다.

식 (1)과 (5)의 수치해석을 위해 공간미분에 대해서는 중심차분법으로, 시간미분에 대해서는 4계 룬게-쿠타(Runge-Kutta)법으로 차분화하였다. 식 (5)의 차분화 결과는 ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient)법을 사용하여 해를 구하였으며 δ_1과 δ_2는 식 (10a)와 (10b)로부터 Newton-Raphson법을 사용하여 구하였다. δ_1과 δ_2를 구하는 과정에서, 특히 벽면근처의 박리점(separation point) 부근에서는 어떠한 불명확한 이유로 해가 존재하지 않는 경우도 발생하는데, 이 때는 주위의 격자점에서 구해진 δ_1과 δ_2로부터 평균한 값을 적용하는 방법을 사용하였다. 격자계로서는 ζ, ϕ, ψ가 같은 지점에서 정의되는 표준 균일 격자계(standard uniform grid system)을 사용하였다. 수치해석은 다음의 순서로 수행하였다.



(a) Radial velocity (b) Vertical velocity (c) Boundary layer thickness

Fig. 3 Numerical solution of the source-sink vortex. The solid curves show the results given by treating δ as a function of r while the dashed lines by treating it as a constant in deriving the equation for δ like (10a) and (10b) in the text

① 식 (1)에 의해 와도 ζ를 구한다.
② (5a), (5b)를 풀어서 ϕ, ψ를 구한다.
③ 식 (4a), (4b)로 u, v를 구한다.
④ 식 (10a), (10b)를 풀어서 δ_1과 δ_2를 구한다.
⑤ 식 (12)로 Ekman 펌핑 속도 w_E를 구한다
⑥ 원하는 시점까지 ①~⑤를 반복한다.

3. 적용 예

3.1 축대칭 소스-싱크 와동에 대한 수치해

본 연구에서 제안한 비선형 Ekman 펌핑 모델법의 타당성을 점검하기 위하여 우선 회전 원형 실린더 내의 축대칭 소스-싱크 와동(source-sink vortex flow)에 적용하여 보았다. 본 유동모델에서 경계층 두께는 r의 함수 즉 $\delta=\delta(r)$이다. Anderson 등[6]은 δ의 r에 관한 미분을 0으로 처리하지 않고 그대로 두고 계산을 수행하였으나, 본 연구에서는 앞서 언급한 이유로 δ의 r에 관한 미분은 0으로 처리하여 이에 따른 오차를 검증하였다. 사용한 경계층 내부 영역의 속도 곡선은 $u(r,Z)=u_0F(Z/\delta)$, $v(r,Z)=v_0[1-G(Z/\delta)]$, $v_0=[1-\exp(-r^2)]/r$이다. Fig. 3은 반경방향 속도 u_0, 경계층 끝의 수직방향 속도 W_E 및 경계층 두께 δ를 나타낸 것으로서, 계산의 단순화를 위해 δ를 상수인 것처럼 가정하여도 큰 오차가 발생하지 않음을 확인할 수 있다.

3.2 Slip 경계조건을 적용한 직사각형 용기내의 주기유동에 대한 수치해

앞에서 제시한 Anderson 등[6]의 소스-싱크 와동은 축대칭 형상이다. 이제, 비축대칭 형상에 대한 비선형 Ekman 펌핑 모델법의 타당성을 검증하기 위해서 직사각형 용기 내의 주기유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 본 연구에서 사용된 유동 모델과 좌표계는 Fig. 4와 같다. 가로가 $aL(x^*$-방향), 세로가 $L(y^*$-방향)인 직사각형 용기에 동점

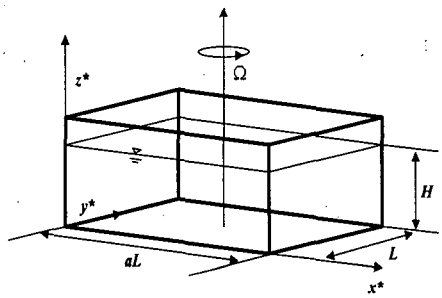


Fig. 4 Schematic of a model rotating flow within a rectangular container

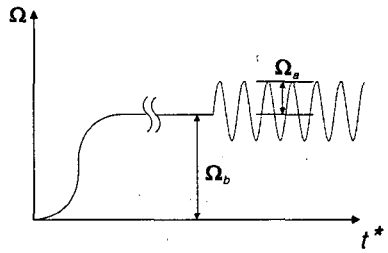


Fig. 5 Angular velocity of the turn table for the model rotating flow

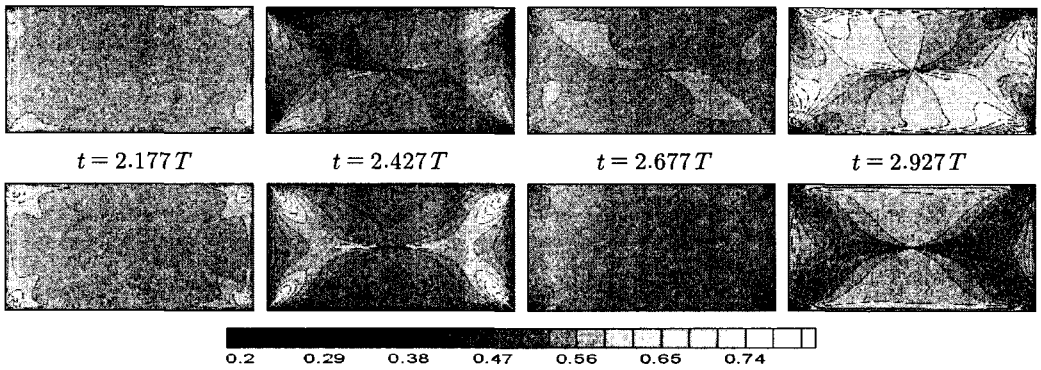


Fig. 6 The boundary layer thickness δ_1(top) and δ_2(bottom) obtained for the periodic rotating flows within a rectangular container at Re=2356, $\epsilon = 0.3$, $h = 0.4$ and $\omega = 0.4$ by using the slip boundary condition

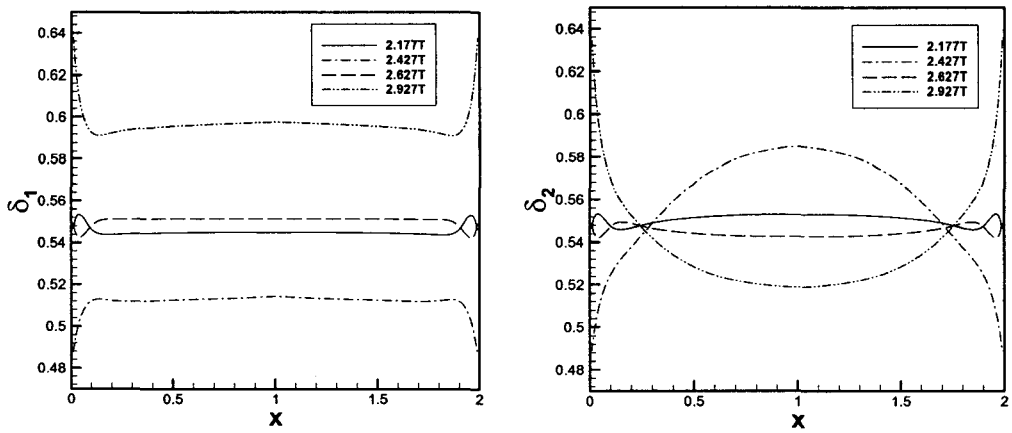


Fig. 7 Distribution of the boundary layer thickness δ_1(left) and δ_2(right) on $y = 1/2$ at the same parameter set in Fig. 6

성계수 ν인 유체가 수심 H만큼 담겨져 있고, 용기는 중심축 둘레로 회전한다. 이 때, 회전 각속도는 $\Omega(t) = \Omega_b + \Omega_a \sin\omega^* t$ 와 같이 배경회전(background rotation) Ω_b에 진폭 Ω_a, 각속도 ω^*로 변동하는 각속도가 덧붙여진다(Fig. 5).

이 경우, 식 (1)에 사용된 무차원 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon = \frac{\Omega_a}{\Omega_b},\quad Re = \frac{L^2\,\Omega_a}{\nu},\quad \omega = \frac{\omega^*}{\Omega_a},\quad h = \frac{H}{L} \tag{14}$$

위 파라미터 기호들은 앞에서 사용한 기호와 동일하게, ε은 로스비수(Rossby number), Re는 레이놀즈수(Reynolds number)이다. 그리고, h는 무차원 수심이며, 무차원 회전각속도의 변동 성분은 $f = \sin\omega t$로 정의된다. 한편 측면 벽으로부터의 거리에 따른 벽면 효과를 고려한 β_x와 β_y는 상수 k를 사용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\beta_x = 1 - 2\exp(-k)\cosh[k(1-x)] \tag{15a}$$

$$\beta_y = 1 - 2\exp(-k/2)\cosh[k(1/2-y)] \tag{15b}$$

이것은 벽면 근처 얇은 층에서는 β_x, β_y가 0에 가까운 값을 가지고 벽면에서 멀어질수록 1에 가까운 값을 가지도록 한 것이다. β_x, β_y가 작은 값을 갖는 층은 상수 k가 클수록 얇아지며 따라

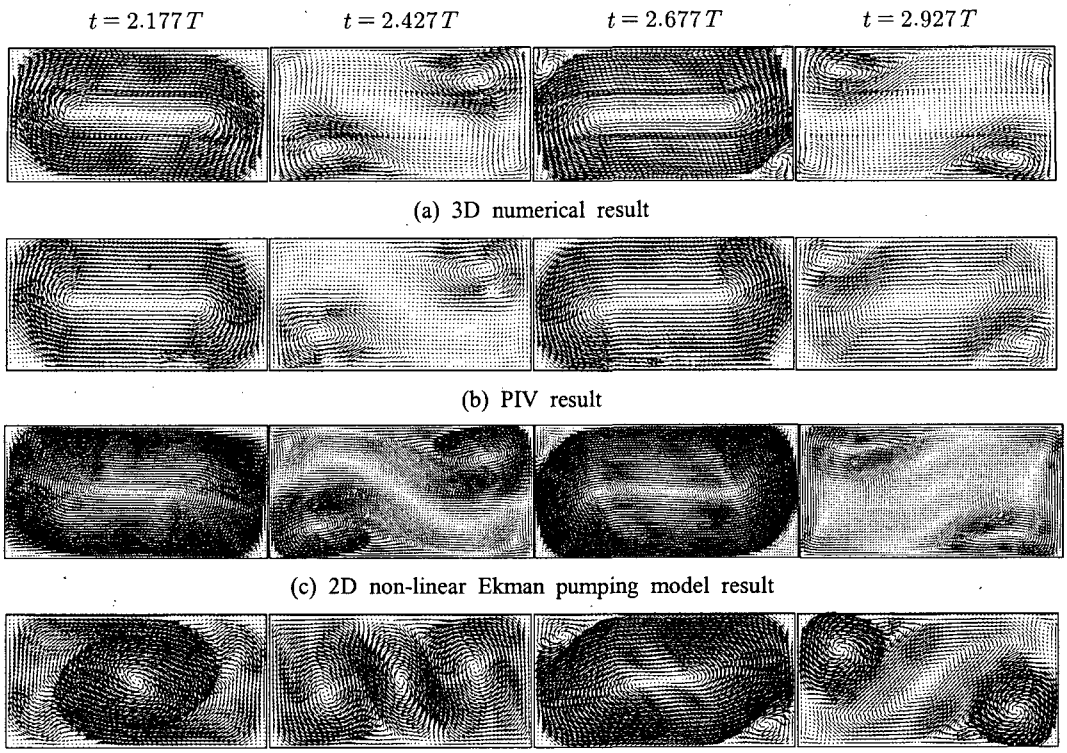


Fig. 8 Velocity vectors on the horizontal plane [on the free surface for the cases (a) and (b)] at Re=2356, $\epsilon = 0.3$, $h = 0.4$ and $\omega = 0.4$. In addition, for (c), $\beta_x = \beta_y = 1$ is used

서 레이놀즈 수에 따라서 k를 증가시키는 것이 타당할 것으로 예측할 수 있다.

경계조건으로 미끄럼 조건을 적용하였는데, 그 이유는 미끄럼 조건을 적용하면 벽면으로부터 유동박리가 발생하지 않으므로 용기 내 유동은 매우 단순하며 이에 따라 복잡한 와동의 형성에 따른 또 다른 문제점들로부터 피할 수 있어, 개발된 코드를 검증하는 데 적합할 것으로 예측되기 때문이다.

Fig. 6은 a=2, Re=2356, $\epsilon = 0.3$, $h = \omega = 0.4$, $\beta_x = \beta_y = 1$ 일 때, 경계층의 두께 δ_1과 δ_2의 한 주기 동안의 변화를 전체 수평 단면 상에서 나타낸 것이며, Fig. 7은 $y = 1/2$의 중심선에서의 x방향 좌표에 따른 δ_1과 δ_2의 공간분포의 시간변화를 보인 것이다. 벽면 근처를 제외한 중심부에서는 매끄러운 분포와 완만한 변화를 보이지만, 벽면 근처에서는 공간적 시간적 변화가 매우 크다. 그러나 시공간 전체에 걸친 평균으로 보면 고전 Ekman 경계층 이론으로 예측한 값인 $\delta_1 = \delta_2 \cong \sqrt{\epsilon} = 0.548$ 에 근사하여 코드의 전반적인 타당성도 확인할 수 있다.

3.3 No-slip 경계조건을 적용한 직사각형 용기 내의 주기유동에 대한 수치해

이제, 앞과 동일한 모델에서 경계조건을 점착조건(no-slip condition)으로 하였을 경우의 수치해석 결과를 제시한다.

Fig. 8은 한 주기 동안의 속도벡터를 나타낸 것으로서, 비교를 위해 3차원 수치해석 결과, PIV법에 의한 실험결과 그리고 선형 Ekman 펌핑 모델에 의한 2차원 수치해석 결과를 동시에 제시하였다. 우선, 이 유동모델에 대해 3차원 수치해석 결과(Fig. 8a)는 실험결과(Fig. 8b)와 아주 잘 맞는 것으로 보고된 바 있다.[5] 한편, 본 연구에 의한 비선형 Ekman 펌핑 모델에 의한 2차원 해석 결

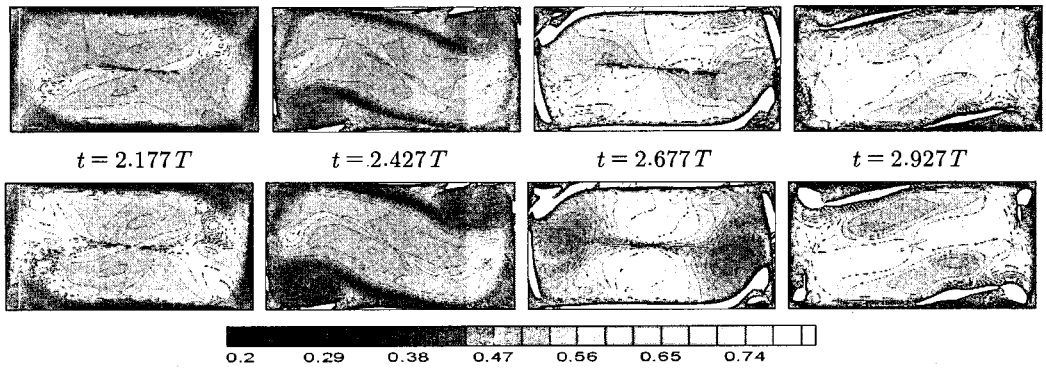
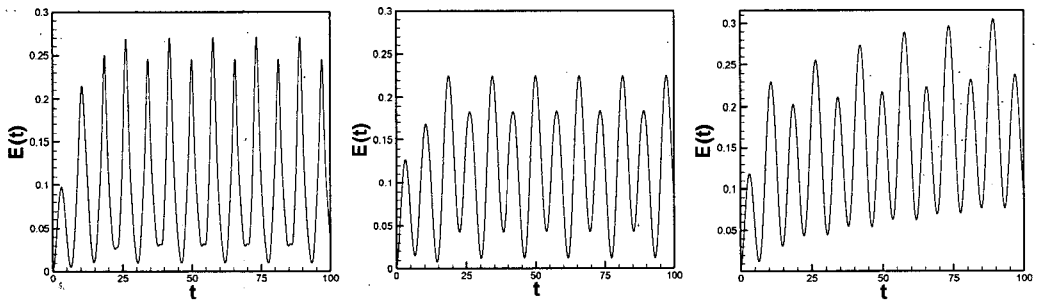


Fig. 9 The boundary layer thickness δ_1(top) and δ_2(bottom) obtained for the periodic rotating flows within a rectangular container at Re=2356, $\epsilon = 0.3$, $h = 0.4$, $\omega = 0.4$ and $\beta_x = \beta_y = 1$ by using the no-slip boundary condition



(a) 3D numerical result (b) 2D non-linear Ekman pumping (c) 2D linear Ekman pumping

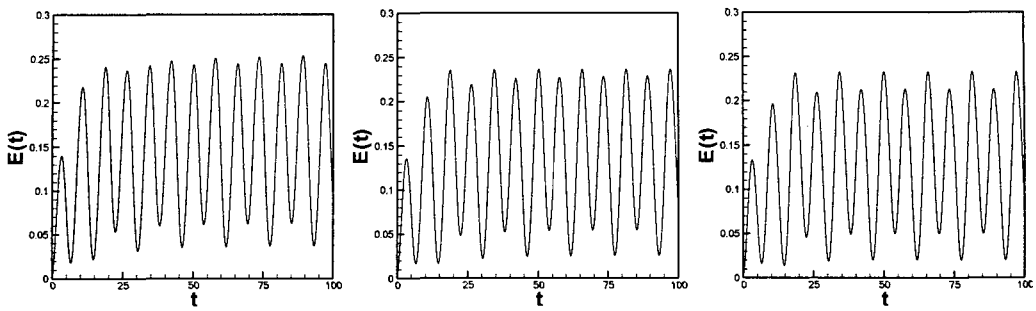
Fig. 10 Time history of the spatially averaged kinetic energy $E(t)$ at the same parameter set as in Fig. 8

과(Fig. 3c)도 정성적으로 3차원 혹은 실험 결과와 잘 맞는 것을 확인할 수 있다. 비선형 Ekman 펌핑 모델의 결과가 속도벡터의 진한 분포를 보이는 이유는 다른 그림에 비해 격자 수가 많기 때문이다. 반면에 선형 Ekman 펌핑 모델의 결과는 이들과 정성적으로 상당한 차이를 보이고 있다. 이는 본 연구에서 개발한 비선형 모델이 상당한 개선효과를 가진다는 것을 입증하는 셈이다.

Fig. 9는 경계층의 두께인 δ_1과 δ_2의 분포를 나타낸 것으로, 앞의 미끄럼 조건의 결과(Fig. 6)와 비교하여 볼 때, 국소적으로 경계층 두께의 변화가 더욱 심하다는 것을 확인할 수 있다.

주유동의 성장 및 발달에 결정적인 영향을 미치는 Ekman 펌핑 속도 즉 w_E는 식 (12a)와 (12b)를 통해 알 수 있는 바와 같이 경계층 두께에 비례한다; 선형 이론에 의하면 $2w_E = \zeta\sqrt{\epsilon/Re}$ 이고 $\delta = \sqrt{\epsilon}$ 이므로 이 사실을 간접적으로 이해할 수 있다. 따라서 Ekman 펌핑 속도를 보다 정확히 수치모사하기 위해서는 유동장내에서 와도의 변화뿐만 아니라 유동의 변화에 따른 바닥의 경계층 두께의 변화도 함께 고려해야 함을 앞의 결과를 통해 알 수 있다. Suh & Choi[4]에 의해서 개발된 선형 Ekman 펌핑 모델의 경우, 유동장내의 와도의 영향은 고려하였으나 경계층 두께의 변화는 고려하지 않았으므로 로스비 수가 큰 경우 혹은 주기유동과 같이 지속적으로 경계층의 두께가 변화하는 경우에 대해서 수치모사의 결과가 정확하지 못하다.

Fig. 10은 공간평균 운동에너지 $E(t)$의 시간변화를 비교한 것이다. 3차원 수치해석 결과(Fig. 10a)와 비교해 볼 때 비선형 Ekman 펌핑 모델의



(a) k=30 (b) k=50 (c) k=70

Fig. 11 Effect of the parameter k on the time history of the spatially averaged kinetic energy $E(t)$. All the other parameters except k are the same as in Fig. 8

결과(Fig. 10b)는 전반적으로 에너지가 3차원 결과에 비해서 약간 낮은 값을 보이지만 조기에 주기유동의 형태로 발달되어 가는 과정은 3차원 해석 결과와 유사하다. 그러나 선형 Ekman 펌핑 모델의 경우(Fig. 10c)는 천이과정이 매우 길며 더구나 에너지의 값이 전반적으로 더욱 증가하는 양상을 보인다. 이러한 운동 에너지의 증가는 Fig. 8(d)에서 나타난 바와 같이 실제와 달리 와들의 혼합을 일으켜 전적으로 다른 형태의 유동을 예측하게 되는 것이다.

3.4 벽면효과에 대한 고려

앞 절에서 제시한 데이터는 벽면효과를 적용하지 않았을 때의 결과($\beta_x = \beta_y = 1$)이다. 벽면 효과를 고려하기 위해 높은 k 값에 대해 식 (15a)와 (15b)로 계산한 β_x, β_y를 식 (9)에 적용하여 계산하여 보았다. 유동장의 결과는 Fig. 8(c)에서 제시한 것과 정성적으로 크게 차이나지 않는다. 그러나 Fig. 11에서 보는 바와 같이 공간평균운동에너지의 변화모양은 k에 따라 달리 나타난다. 벽면의 효과를 적용하지 않았을 때의 결과($\beta_x = \beta_y = 1$)와 비교했을 때, 에너지 레벨이 전반적으로 높아짐을 알 수 있으며 이는 3차원 수치해석 결과에 더욱 접근해 가는 경향을 보인다. 따라서 벽면효과의 고려는 이같은 정량적인 개선을 위해 필요하다.

Table 1은 레이놀즈수와 k 값의 변화에 따라서 수치계산의 수렴, 발산을 나타낸 것이다. Re<3000 일 때, k 값의 변화가 수치계산의 수렴, 발산에 영향을 주지 않았으나, Re>3000 일 때는 k 값에

Table 1 Parameter map showing the computationally stable or unstable cases for various Re and k

k \ Re	2000	2356	3000	3500	3700	4000	4500
10	●	●	×				
20	●	●					
25			●				
30	●	●					
35			×	×	×		
40	●	●	×	●	●		
45			●	×	×	×	×
50	●	●	●	×	×	●	×
55				×	×	×	×
60	●	●		×	×	×	×
65						×	×
70	●	●				×	×

따라서 수렴, 발산의 빈도가 달랐으며 Re>4500 일 때는 k 값에 상관없이 발산하였으며 특히 선형 Ekman 펌핑 모델이 수렴하는 격자수와 시간간격을 적용하여도 비선형 Ekman 펌핑 모델의 경우는 발산하였다. 이는 Re가 커질수록 벽면 근처에서의 경계층 두께의 변화가 Ekman 펌핑 속도뿐만 아니라 유동장의 전체의 수렴, 발산에 큰 영향을 미치기 때문이라고 생각되며 이에 대한 추가적인 연구가 필요하다고 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서는 운동량적분법을 통해서 비선형 Ekman 펌핑모델을 유도하여 직사각형 용기 내의 주기유동에 대해 적용하였으며 이를 통해 다음의

결론을 얻을 수 있다.

(1) 본 연구를 통해서 개발된 2차원 비선형 Ekman 펌핑 모델은 경계층 두께의 변화를 고려한 것이며 이를 주기유동에 적용한 수치해석 결과는 실험 및 3차원 수치해석 결과와 잘 일치한다.

(2) 축대칭 유동 모델에 적용한 결과 경계층 두께의 공간좌표에 대한 미분을 고려하지 않아도 결과는 크게 차이나지 않는다.

(3) 적절한 지수함수를 사용하여 벽면효과를 고려하면 3차원 해석결과에 정량적으로 접근해 가는 경향을 보이므로 보다 효과적이다.

(4) 높은 레이놀즈 수에서 나타나는 수치해석적 불안정성을 해결하기 위한 추가적인 연구가 필요하다.

후 기

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.(KRF-2004-041-D00130)

참고문헌

(1) Greenspan, H.P. and Howard, L.N., 1963, "On a Time Dependent Motion of a Rotating Fluid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 385~404.

(2) van Heijst, G.J.F., 1989, "Spin-up Phenomena in Non-axisymmetric Containers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 171~191.

(3) Zavala sanson, L. and van Heijst, G.J.F., 2000, "Nonlinear Ekman Pumping Effects in Rotating Barotropic Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 412, pp. 75~91.

(4) Suh, Y.K. and Choi, Y.H., 2002, "Study on the Spin-up of Fluid in a Rectangular Using Ekman Pumping Models," *J. Fluid Mech.*, Vol. 458, pp. 103~132.

(5) Suh, Y.K., Choi, Y.H., Kim, S.K. and Lee, D.Y., 2000, "Study on Fluid Flow in a Rectangular Container Subjected to a Background Rotation with a Rotational Oscillation Using PIV System," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 24, No. 6, pp. 845~851.

(6) Andersen, A., Lautrup, B. and Bohr, T., 2003, "An Averaging Method for Nonlinear Laminar Ekman Layers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 487, pp. 81~90.