韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2006. 5. 제 45권, 제 2호, 177-189.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2006, Vol. 45, No. 2, 177-189.

예비초등교사의 사다리꼴 넓이 표상에 대한 교수학적 분석

이 종 욱 (개포초등학교)

Ⅰ. 들어가는 글

예비초등교사들이 현장에서 초등수학을 가르치기 위해 교육대학에서 이수하는 수학과목은 수학교육의 이론과 실제로 구분할 수 있다[1]. 수학교육관련 이론 부분에서는 수학교육의 제이론으로 수학교육학의 본질, 수학학습 심리학, 수학교육 평가, 수학과 교육과정의 변천, 수학과 교수·학습방법에 대한 내용을 다루고 있으며, 수학교육의 실제에 관한 부분에서는 초등수학의 영역별 내용으로 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수를 다루고 있다(강지형 외, 2002). 수학교육의 이론은 교육학의 여러 과목과 중복되는 부분이 많으며 특히 교육심리학과 많은 관련성을 가진다. 예비초등교사들이 초등학생을 가르치는 것과 직접적인 관계가 있는 것으로 보이는 것은 수학교육의 실제와 관련한 과목이다. 이 과목을 이수한 이후 예비초등교사들은 4학년에서 수업 실무 실습을 받게 되고 교사 임용과 함께 직접 교육현장에서 수학을 가르치게 된다. 다시 말하면, 초등학교의 수학 내용을 가르치기 위해 그들이 경험하는 초등수학의 내용은 단 한 학기 동안 이루어지는 주당 2~3시간의 수학과목 수업이 전부가 될 수 있다는 것이다.

교육에서 교사가 차지하는 역할의 중요성을 깊이 인식하면서 전문성을 갖춘 초등교사를 양성하기 위해 교육대학에서는 많은 노력을 하고 있다. 이런 노력의 일환으로 교육대학의 교육과정을 다시 살펴보고 있지만, 수학 내용의 전문성과 관련하여 초등교사양성대학의 교육과정 및 수업의 흐름에 몇 가지 문제점이 있다. 신준식(2003)은 이론 중심의 일방적인 설명식 수업, 교육과정의 내용이 초등수학을 가르치는 데 필요한 배경 지식으로 부적절하다는 것, 그리고 교수-학습의 이론과 실제의 균형이 이루어지지 않음을 초등수학교육 수업의 문제점으로 지적하였다. 교육대학의 수학과 수업을 운영하는 데 이와 같은 문제점이 있지만, 교사교육에서 가장 중요한 부분이 '교사'라는 입장에서 보면 교육과정의 개편보다 더 중요한 부분은 교사교육을 담당하는 교사 교육자가 될 수 있다.

교사가 되기 위해 요구되는 지식 가운데는 자신이 알고 있는 수학 내용을 학생이 이해하도록 변환해서 설명하는 능력이 포함된다. 교사는 표상이라 불리는 것에 대해 충분히 알아야 하며, 학생을 위해 사용할 수 있어야 하고, 학생들이 나타내는 표상을 이해할 수 있어야 한다.

그러나 최근의 한 연구(이종욱, 2005a)에 의하면 초등교사들은 분수를 그림으로 나타내는 것에는 능숙하지만 분수의 연산, 특히 나눗셈을 실생활 상황이나 그림으로 표현하는 것에는 어려움을 가지는 것으로 나타났다. 이런 어려움은 곧바로 학생을 가르치는 상황에 반영되어 분수의 나눗셈을 개념적 이해를 통한 학습이 아니라 절차 지향적 학습이 되도록 만들게 된다.

분수의 연산뿐만 아니라 자연수의 연산에서도 예비초등교사들은 문장제를 수식으로 나타내는 것에는 익숙하지만 수식을 문장으로 나타내는 의미론에서는 어려움을 가지고 있었다(이종욱, 2003). 자연수의 덧셈과 뺄셈에서 합병이나 비교와 같이 두 집합의 관계에 대한 언어적 표상 능력이 부족하였으며 예비초등교사들은 특히 뺄셈에서 전통적인 계산 절차로 설명하는 경향이 높았다.

---

* 2005년 10월 투고, 2006년 3월 심사 완료.
* ZDM분류 : B59
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 표상, 예비초등교사, 사다리꼴 넓이

1) 교육대학에 따라 교양 필수과목으로 수학의 기초(부산교대는 수와 논리, 서울교대는 현대수학의 기초 광주교대는 수학)를 1학년에서 이수하며, 전공 필수과목으로 수학과 교수법, 수학과 교재연구(부산교대), 수학교육 Ⅰ,Ⅱ(공주교대, 광주교대), 초등수학교육의 이해, 초등수학교육의 실제(서울교대), 초등수학교육 Ⅰ-이론, 초등수학교육Ⅱ-실제(춘천교대)를 2학년 또는 3학년에 2~3시간씩 이수한다(황혜정, 신항균, 임민경, 2003).

앞의 두 연구에서 살펴보면, 예비초등교사나 현직교사가 시각적 표상과 언어적 표상 능력이 부족할 때 각 표상들 사이의 연결성을 보여줄 수 없었으며 개념에 대한 분명한 이해는 각 표상을 분명하게 나타낼 수 있을 때 가능하다는 것을 알 수 있다.

초등학교 교과서의 구성을 보면 먼저 '생활에서 알아보기'에서 실생활 상황을 언어적 표상으로 제시하고 있으며, 이것을 바탕으로 '활동'에서는 그림이 있는 시각적 표상을 경험하게 되고 '익히기'에서 기호적 표상을 정착시키게 된다. 그러나 문제는 교사들이 표상의 일방성, 즉 여기서는 언어적, 시각적, 기호적 표상으로 전개되는 순서에 무의식적으로 따르면서 표상들 사이의 연결성을 인식하지 않는다는 것이다. 더 자세히 말하자면 '익히기'에서 제시된 기호적 표상을 학습의 주요한 목표로 인식하면서 이러한 기호적 표상을 다시 언어적 표상이나 시각적 표상으로 나타내어 보는 활동이나, 시각적 표상을 기호적 표상과 적합하게 연결시키는 과정이 부족하다는 것이다.

장차 교사가 될 학생들은 은연중 자신이 학생 시절에 경험했던 교사의 수업 방법에 영향을 받게 되며, 교육대학의 수학과목 수업을 하는 교육자도 학생이 경험하는 것의 예외가 될 수 없다. 교사에게 요구되는 지식은 마찬가지 논리로 교사 교육자에게도 요구된다.

교사 교육자는 그들의 학생인 예비교사가 나타내는 표상을 이해하고 있어야 하며, 이렇게 될 때 앞에서 살펴본 바와 같은 여러 가지 문제점들을 해결할 수 있는 적절한 교수법을 개발할 수 있을 것이다.

본 연구에서는, 먼저 연구자가 교육대학에서 수학과목 수업을 하면서 예비초등교사들이 나타내는 사다리꼴의 넓이 표상 방법을 설명할 것이다. 다음으로, 이러한 수업을 하면서 연구자가 가지는 사다리꼴의 넓이 표상에 대한 반성에 대해 설명하고자 한다. 따라서, 이 연구는 연구에 참여한 예비초등교사 40명뿐만 아니라 연구자 본인이 연구 대상이 되며, 연구자와 예비초등교사가 함께 만들어 가는 수학 수업을 통해 연구가 이루어졌다.

연구자가 이전에 이 강좌에 대한 수업을 할 때는 교사의 일방적인 설명식 수업을 진행하였다. 2시간 중 1시간은 교사 중심의 설명식 수업을 하고, 나머지 1시간은 학생들이 진행하는 수업과 학생 수업에 대한 토론으로 이루어졌다. 이런 수업을 진행하면서 학생을 가르치는 교사로서 연구자는 나의 학생에 대한 지식이 많이 부족하다는 것을 느끼게 되었다. 예비초등교사인 나의 학생들은 사다리꼴의 넓이를 어떻게 표상하고 있으며, 그들이 표상들 사이의 연결성을 가질 수 있도록 하려면 어떻게 해야 하는가는 계속되는 의문이었다.

이러한 의문점을 해결하기 위해서, 초등수학의 측정 영역 가운데 사다리꼴의 넓이는 다양한 방법으로 공식을 유도할 수 있다는 점을 이용하여 학생들의 표상 방법을 알아보기로 하였다. 처음에는 간단한 지필 시험을 통해서 나타나는 학생들의 반응을 분석하는 것으로 한정짓고자 하였다. 그러나 연구자의 궁극적인 목적은 나의 학생들이 초등학교에서 사다리꼴의 넓이를 가르칠 때 개념적 이해를 통한 수업을 할 수 있도록 하는 것이었다. 교사인 나는 그들이 사다리꼴의 넓이에 대한 각 표상들을 연결짓는 경험을 가지도록 해야 했다. 이를 위해 학생 중심의 토론식 수업을 진행하였으며, 교사는 학생들이 자신의 방법을 정당화할 때 이를 격려하여 활발한 논의가 이루어 질 수 있도록 하였다. 학습지에 학생들이 나타낸 표상을 분석하는 대신에, 학생들이 학습지에 나타낸 방법을 교실에 있는 칠판에 나타내면서 설명하도록 하였고 다른 학생의 의견에 대해 자신의 의견을 자유롭게 표현하도록 했다.

학생들이 자신의 해결 방법을 설명하거나 다른 학생이 나타낸 표상에 대해 논의하는 수업의 전 과정을 녹화하여 이러한 수업을 통해 그들이 나타내는 시각적, 언어적, 기호적 표상을 분석할 수 있었다.

따라서, 본 연구에서는 첫째 교육대학에서 수학 수업을 하면서 나타나는 예비초등교사의 사다리꼴 넓이 표상 방법을 분석하고자 하며, 둘째 학생들이 나타낸 시각적, 언어적, 기호적 표상을 분석하여 이러한 표상들을 서로 연결하는 분명한 방법을 찾는 연구자의 반성을 탐구하고자 한다. 이러한 연구를 통해 이루어지는 예비초등교사의 표상 방법에 대한 분석과 탐구는 예비초등교사 교육을 위한 발전적인 교수학적 방법을 제공할 것이다.

Ⅱ. 표상

수학을 가르치고 배울 때 표상은 의사소통의 수단이나 대상으로 나타나게 된다. representation을 번역하면서

표현 또는 표상으로 나타내는데, 그 의미는 상당히 넓게 해석될 수 있다. 일반적으로 받아들이기에는 표현은 인식 주체의 외적인 대상으로, 표상은 인식 주체의 내적인 실체로 규정하고 싶지만 대부분의 경우에는 문맥에 따라 그 의미를 달리 파악해야 할 정도로 쉽게 다가서는 개념이 아니다. 전자는 수학적 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적 대상을 지칭하며 후자는 주체의 정신적 실체인 이미지, 관념 등을 뜻하는 것으로 볼 수 있지만(Janvier, 1987; von Glasersfeld, 1987; 김연식, 장혜원, 1996, p.185에서 재인용), 본 연구에서는 representation의 원어를 '표상'이라는 용어로 통일하여 부르기로 한다.

표상은 어떤 형태로 수학적인 개념이나 관계를 획득하는 것과 관계되기도 하며 형태 그 자체와도 관련이 있는 과정과 결과 모두에 관한 것이다. 표상은 수학을 행하는 인간의 마음 속에서 내적으로 일어나는 과정 및 결과이며 외적으로 관찰될 수 있는 것에도 적용된다. 그러나 다이어그램, 그래프 표시, 기호적 표시와 같은 몇 가지 표상이 오랫동안 학교 수학의 일부분이 되면서 이런 표상들과 다른 것들이 마치 그 자체로 목적인 것처럼 가르치고 배우게 되었다.

학교 수학을 위한 원리와 규준(NCTM, 2000)에서는 표상은 수학적 개념과 관계에 대한 학생들의 이해를 도움에 있어, 자신과 타인에게 수학적인 접근방법을 논의하고 자신의 이해를 의사소통함에 있어, 서로 관련이 있는 수학적 개념들 사이의 연결성을 인식함에 있어, 그리고 모델링을 통하여 현실적 문제 상황에 수학을 적용함에 있어 본질적인 요소로 보아야 한다고 주장하였다.

1. 교수법적 내용 지식

교수법적 내용 지식은 수학적 지식과 함께 학생들이 전형적으로 나타내는 개념과 오개념에 대한 지식, 학생들이 개념을 이해하도록 실생활 상황이나 그림 또는 기호를 사용하여 다양한 방법으로 개념을 표상하는 지식을 포함한다(이종욱, 2005b). 여기서 교사는 학생들이 이해하고 있는 개념을 어떻게 표상하는가에 대한 지식을 가져야 한다.

학생들은 문제를 해결하면서 자신이 이해하는 의미있는 방법으로 표상할 수 있으며 그림, 구체물, 기호와 같은 표상을 사용하여 자신들의 사고를 조직하고 표현하게 된다. 이렇게 학생의 생각을 나타내어 주는 표상은 구두로 나타내거나, 그림이나 구체적인 학습 자료를 사용하여 모델화할 수도 있다.

교실에서 수학 문제를 학생들이 이해하고 해결하는 데 영향을 미치는 표상에는 크게 두 가지 유형이 있다. 하나는 학생들에게 지식을 전수하는 데 교사가 사용하는 교수적인 표상으로 설명, 예제, 모델 등이 여기에 속한다고 볼 수 있으며, 나머지 하나는 수학에 관한 개념을 이해하기 위해 시도하거나 문제를 해결하기 위해 시도하는 표상으로 학생들 자신이 구성하는 인지적 표상이 그것이다. 첫 번째 표상은 학습자의 외부에 있고(즉, 교사와 학습자 사이에 의사소통으로 공유하는 것), 반면에 두 번째는 학습자의 내부에 있으며 다른 사람들과 공유되지 않을 수도 있다(NCTM, 2001; 최창우, 2004, p.26에서 재인용)

수학 수업 상황에서 학생의 인지 과정에 나타나는 표상은 다시 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 하나는 수학 문제 해결시 문제에 접근하는 단계에서 생기는 표상이고, 다른 하나는 수학적 개념에 대해 구성한 개념 표상이다. 문제 해결에 있어서는 주로 제시된 표상에 대응하여 구성한 감각적 표상이 보다 본질적인 역할을 하며, 표상의 해석, 산출, 번역에서의 학생의 오류나 어려움을 다루게 된다. 또한 시각적 표상이 중요한 역할을 하게 된다. 반면, 개념적 사고 활동에 있어서는 일반적으로 외부 원인을 갖지 않는 관념적 표상이 본질적인 역할을 하며 개념 이미지와 개념 정의로 생각하고 의미론적 영역에 기초한 개념 표상의 다양성을 다루게 된다.

교사가 학생의 개념 표상을 이해하는 것은 효과적인 수학 교수-학습을 위해 매우 의미 있는 지식이 된다. 교사가 학생의 부정확하거나 불완전한 개념 표상에 대해 명확히 알고 있다면 학생의 인지 과정에 대해 보다 잘 이해할 수 있을 뿐만 아니라 학생의 오개념 및 오류의 원인을 찾는 데 보다 용이할 수 것이며 나아가 잘못된 개념 표상 형성을 사전에 미리 방지할 수 있는 적절한 교수법을 계획할 수 있기 때문이다. 또한 학생이 문제 해결에서의 실패나 교사가 기대했던 것을 하지 못하는 원인 중 하나가 학생이 개념 예로 간주하는 수학적 대상

간의 불일치에 있다는 것을 생각할 때 학생이 지닌 다양한, 특히 갈등적인 개념 이미지를 표출하는 것은 교사가 학생들의 반응에 보다 민감하게 대처하고 표상 발달을 개념으로 안내하는 데 도움이 될 것이다.

2. 시각적 표상과 언어적 표상

Goldin(1988)의 인지 모델에 따르면 단어, 문장 수준에서 자연 언어를 처리하는 능력인 언어적·구문적 표상 체계에 반해 이미지 체계는 비언어적·의미적 정보와 관련되므로 언어적 문장제의 의미충실한 해석을 위해서는 양쪽이 모두 필요하다. 즉 언어적 표상에 대한 해석을 위해서는 언어적 표상만으로는 부족하며 시각적 표상과의 통합에 의해 더욱 의미 있는 해석이 가능하게 된다(김연식, 장혜원, 1996).

외적으로 관찰 가능한 표상 체계를 시각적, 언어적, 기호적 표상으로 분류하면, 삼각형 그림, '삼각형', △ABC는 각각의 예가 된다. 특히 시각적 표상은 구체적 그림이나 도형 표상뿐 아니라 표상 규약이 요구되는 다이어그램이나 상징적 특성이 강한 그래프, 표 등을 포함하는 넓은 의미로 사용된다. 언어적 표상은 일상 언어로 된 표현을, 기호적 표상은 수학 기호를 사용한 표현을 의미한다.

Skemp(1986)는 수학에서 사용되는 기호 체계를 이분화하여, 언어-대수적 기호와 시각적 기호로 나누어 제시하고 있다. Skemp에 의해 시각적 기호로 제시되고 있는 시각적 표상은 직관적 사고와 관련하여 수학적 사실을 즉각적으로 이해하도록 도와주며, 문제해결 과정에서도 유용한 단서나 해결책을 제공해 주는 도구이다. 이러한 의미에서, 수학적 개념, 원리, 법칙 또는 수학 문제의 시각적 표상은 수학적 사실이나 수학 문제에 대한 이미지를 형성하는 과정이며, 이러한 이미지를 이용하여 수학적인 발견이나 이해에 효과적으로 사용된다. 따라서, 시각적 표상에서 수학교육의 관심은 수학적 개념이나 문제를 이해하거나 문제를 해결하기 위한 도구로서, 적절한 시각적 표상을 학생들에게 제공해 주거나 그들 스스로 시각적 표상을 이끌어 낼 수 있도록 하는 것이다(이대현, 2003)

시각적 표상은 단지 그림을 통한 수학적 사실이나 문제의 표현만을 의미하지는 않는다. 시각적 표상은 수학적 사실과 문제해결에 통찰과 의미를 부여해 준다. Wertheimer는 수열의 합을 계산하는 Gauss의 방법을 소개하면서 문제의 구조적인 특성을 이해하기 위하여 다음과 같이 시각적인 표상을 제안하였다.

1 2 3 . . . 98 99 100

이 때 수들은 각 쌍들의 합이 101이고 50쌍이 된다. Wertheimer는 짝짓는 과정은 같지만 구조적으로 다른 시각적인 접근방법을 지적하였다. 계산을 간단하게 하기 위하여 동일한 수들을 반대 순서로 늘어놓은 수열을 생각하였다.

1	2	3	. . .	98	99	100
100	99	97	. . .	3	2	1

여기서 중요한 것은 먼저, 문제의 구조를 단순화하여 직관적으로 지각할 때 서로 다른 시각적 표상을 사용했다는 것이다. 그리고 이렇게 서로 다른 시각적 표상을 통해 발견할 수 있는 기호적 표상이 다르다는 것이다. 첫 번째 예에서는 $\frac{n}{2}(n+1)$이고 두 번째 예에서는 $n\frac{n+1}{2}$ 이다. Wertheimer에 의하면, 이 두 가지 형태의 공식은 수학적으로는 동일하지만 구조적으로 그리고 심리적으로 다르다(구광조, 오병성, 전평국 역, 1995).

시각적 표상이 수학 교수-학습에 더 효과적이기 위하여, 시각적 표상은 수학적 사고의 다른 유형이나 다른 표상의 형태와 연결되어야 한다. 또한 시각적 표상은 문제해결 과정에서 오류를 일으키기도 한다는 것을 알아야 한다.

표상은 다양한 형태로 표현될 수 있는데 패턴 블럭이나 성냥개비와 같이 물리적인 형태로 분수를 나타낼 수도 있으며, 수직선이나 원, 직사각형의 형태로 또는 표, 그래프, 나아가 수학적 기호를 포함하는 상징으로 표현될 수 있다. 수학은 개념, 문제해결, 알고리즘, 추론, 의사소통의 측면을 갖고 있으며 이러한 수학을 학습자가 이해하고 사용하기 위해서는 수학적 언어[2)]가 필요하다. 의사소통과 관련해서는 자신의 생각을 말로써 표현

하거나 문자로 적어 표현할 수도 있으며 타인이 나타내는 표상을 듣고 읽으면서 상대방의 개념을 이해할 수 있다.

언어는 음성 또는 문자를 수단으로 하여 사상이나 감정을 표현하여 전달하는 활동으로(이희승, 1996), 시각적 표상은 개념적 내용을 완전히 표현하기에 부족한 면이 있다. 수학적 언어에는 일상언어와 상징의 요소가 포함되어 있는데 학교 수학에서 일상언어는 학년이 낮을수록 수학적 내용을 설명하고 예시하는데 많이 사용되고 있으며 Freudenthal(1978)은 수학적 언어의 수준을 설정하면서 일상언어의 사용을 하위 수준으로 언급하였다. 그러나 학생들은 일상 생활에서 사용하는 언어뿐만 아니라 수학 사회에서 규정한 상징을 사용하여 수학을 학습해야 한다. 의미가 압축된 상징을 이해하고 사용해야 하는 것은 학생들이 수학을 어렵게 여기는 이유 중 하나이므로, 학교 수학에서는 교수학적 변환을 거쳐 학생들의 학습 수준과 심리적 수준에 맞게 용어를 정의하고 개념을 설명한다(김선희, 이종희, 2003).

Ⅲ. 사다리꼴의 넓이에 대한 표상

본 연구는 부산교육대학교의 전공필수과목인 수학과 교재연구 수업을 진행하면서 이루어졌다. 이 수업은 초등수학의 내용에 대한 이해를 목적으로 개설되며 주 2시간씩 2학년 학생들을 대상으로 이루어진다. 1학년에서 대학교양수학을 배운 학생들이 초등교사로서 초등학교의 수학 내용을 가르치기 위한 수학적 지식을 획득할 수 있는 수업이다.

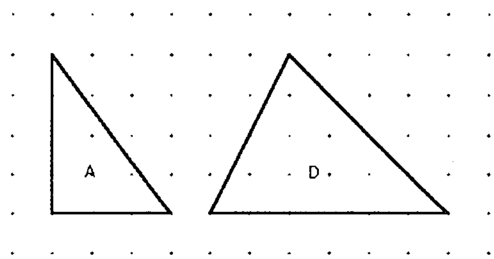
2005년 9월 8일 2학년 학생 40명이 연구에 참여하였으며, 학생들은 4명씩 소집단을 만들어 교사(교사 교육자)가 제시하는 문제에 적절한 해결 전략을 탐구하였다.

서로 지식을 구성하고 공유할 수 있으며 학습자들간의 토론을 통해 자신의 견해를 분명히 제시, 설명, 옹호, 반박할 수 있었다. 소집단 활동에서 어느 정도 해결이 되면 전체활동이 진행되는데 여기서는 학급 전체에서 자신의 방법을 설명하였다. 교사는 옳고 그름을 판단하지 않으며 촉진적 역할을 하였다.

교실에는 1대의 비디오를 설치하여 교사와 학생들이 교실 앞에서 자신의 방법을 설명하는 것을 녹화하였다. 비디오 테이프로부터 내용을 전사하였으며 이 자료를 통해 교실에서 학생들이 나타내는 표상을 분석하였다.

1. 삼각형의 넓이

과제1. 다음 두 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 설명하시오.



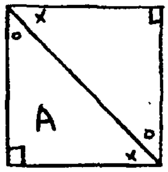
<그림 1> 격자점 위의 삼각형 A와 D

사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 탐구하기 이전에 학생들은 삼각형의 넓이 구하는 일반적인 방법을 찾고 이것을 공식으로 발전시키는 과제를 해결하였다. <그림 1>에서와 같이 모눈종이 위에 직각삼각형과 예각삼각형을 제시하고 학생들에게 넓이를 찾아내는 전략을 탐구하도록 시간을 주었다. 제시한 두 삼각형 이외의 일반적인 삼각형의 넓이를 찾아내는 것에도 적용할 수 있는 전략을 찾아내는 것을 목표로 하였다. 학생들은 주로 2가지 방법을 사용하였다. 합동인 도형을 더 그려서 직사각형을 만드는 것과 삼각형을 분할해서 새로운 모양을 만드는 것이다.

1) 합동인 도형 추가하기

삼각형 A와 같이 직각삼각형을 탐구하면서, 학생들은 합동인 삼각형을 하나 더 추가하여, 직사각형을 만들었다. 직사각형의 넓이는 쉽게 결정되며 삼각형의 넓이는 직사각형의 반이 된다고 하였다.

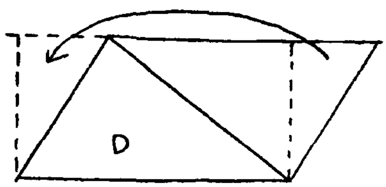
2) 이 글에서 수학적 언어는 수학적 상징을 제외한 말이나 문자로, 즉 수학적 기호를 말로 나타내는 대화의 측면이나 그림의 상황을 설명하는 말, 또는 자신의 수학적 사고를 말이나 글로 나타내는 것을 수학적 언어로 본다.



<그림 2> 합동인 직각삼각형 추가하기

경희: 이게 직각삼각형인데 여기에 두 변에 평행이 되게 줄을 긋습니다. 그러면 이것은 직각이 되고 이것은 각각 엇각이 되기 때문에 합동이 됩니다. 그러면 이 사각형은 세로 곱하기 가로가 되고 삼각형은 그 반이 됩니다.

예각삼각형에 대해서도 마찬가지의 방법을 사용한 학생들은 합동인 삼각형을 하나 더 추가하여 직사각형이 아닌 평행사변형을 만들었다. 평행사변형의 넓이를 어떻게 구하는가에 대해 학생들은 분할과 합성의 전략으로 직사각형을 만들었다(그림 3).

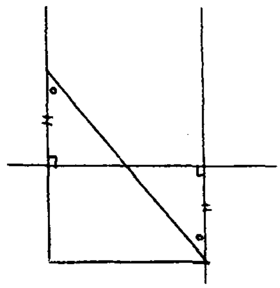


<그림 3> 합동인 예각삼각형 추가하기

직각삼각형과 예각삼각형을 합동인 삼각형을 추가하여 원래 삼각형의 2배에 해당하는 모양을 만들었기 때문에 결과적으로 삼각형의 넓이는 최종적으로 만들어진 도형 넓이의 $\frac{1}{2}$이라는 사실을 밝히면서 삼각형의 넓이 구하는 공식이 $A=\frac{1}{2}bh$라는 것을 이끌어 낼 수 있었다.

2) 분할과 합성

연구자는 <그림 3>에서처럼 평행사변형을 직사각형으로 변환하는 과정에서 학생들이 사용한 분할과 합성의 전략을 지적하면서, 삼각형을 이와 같은 전략에 따라 분할하여 새로운 모양으로 변환하도록 요구했다. 학생들은 삼각형의 높이를 $\frac{1}{2}$로 분할하여 모양을 합성하였다(그림 4).



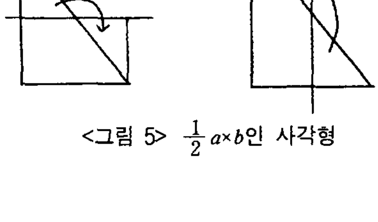
<그림 4> 높이를 분할하여 합성하는 방법

분할과 합성의 전략을 칠판에 설명하도록 했을 때 다음과 같이 설명하였다.

미선: 높이의 반을 자릅니다. 그러면 이 공간에 이 삼각형이 딱 맞게 됩니다. 이 작은 사각형의 넓이는 밑변 곱하기 높이의 반이 됩니다.
교사: 그런데 이것(절단한 위 삼각형)이 이것(아래 삼각형)이라고 어떻게 말할 수 있습니까?
경수: 두 변이 평행하기 때문에 이때는 이 각(∘로 표시한 각)과 이 각이 같습니다. 그리고 높이의 반을 잘랐기 때문에 이 변(=로 표시한 변)과 이 변이 같습니다. 그리고 이것은 직각이기 때문에 ASA!

학생들은 도형의 분할과 합성으로 새로운 모양을 만들어 내면서 분할된 모양이 서로 합동이 된다는 사실을 증명할 수 있었다. 그리고 더욱 놀라운 사실은 삼각형의 넓이 구하는 공식을 새롭게 해석하였다는 것이다.

미선: 삼각형의 넓이 구하는 공식 $\frac{1}{2}ab$에서, $\frac{1}{2}a \times b$로 다시 나타낼 수 있고, 여기서 a를 밑변이나 높이 둘 중의 하나로 본다면 삼각형의 밑변이나 높이를 반으로 나눈 사각형으로 그리면 됩니다.
교사: 그게 무슨 말입니까? 다시 한번 설명해 주세요.
미선: 그림을 그리면 이렇는데(그림 5) 여기서 높이나 밑변을 반으로 자르면 둘 중 하나가 반이 되는 사각형이 됩니다.

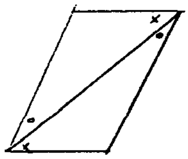


<그림 5> $\frac{1}{2}a \times b$인 사각형

연구자는 분할과 합성의 방법을 문헌을 통해 알고 있었지만 학생들이 표현한 방법은 분할과 합성에 대한 전략이 단지 도형을 분할하여 새로운 형태로 만들기 위해 위치를 이동하는 것으로 공식을 증명하는 것을 넘어서는 표현이었다. 다시 말하면, 그들이 표현한 것은 모양의 재정렬로 공식을 증명하는 것이 아니라 공식에서 모양을 찾아내는 것이었다. 이것은 학생들을 통해 연구자가 새롭게 배운 지식이었다. 그리고 분할과 합성의 전략뿐만 아니라 공식으로 모양을 추정하는 전략은 앞으로 사다리꼴의 넓이를 추론하는 강력한 전략이 될 수 있었다.

직각삼각형과 예각삼각형에서 합동인 도형 추가하기와 분할과 합성의 전략 그리고 공식으로부터 유도하는 전략에 대한 논의가 있었는데 연구자는 학생들이 이러한 전략을 분명히 인식하기 위해 둔각삼각형을 제시하면서 이 삼각형을 가지고 삼각형의 넓이 구하는 방법을 정당화하도록 하였다. 모양을 추가하여 평행사변형을 만드는 것은 다른 삼각형과 같이 쉽게 설명이 되었다.

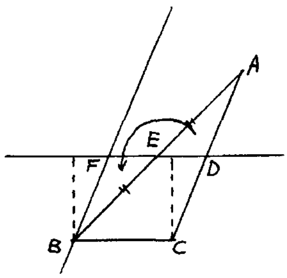
경희: 삼각형을 하나 더 그리면 평행사변형이 됩니다. 그래가지고 평행사변형 넓이의 반을 구하면 됩니다.
교사: 그러면 이 도형은 어떻게 평행사변형이라고 말할 수 있습니까?
경희: 서로 엇각이 되니까 평행이 되지요



<그림 6> 합동인 둔각삼각형 추가하기

분할과 합성을 하면서 학생들은 무엇보다 삼각형을 반으로 분할하는 선은 밑변이나 높이에 평행해야한다는 사실을 발견했다.

<그림 7>에서 삼각형 ABC의 높이를 $\frac{1}{2}$로 분할하는 선을 긋고 선분 AE와 선분 EB가 같다는 사실을 인정하기 위해서는 먼저 직선 FD가 밑변 BC에 평행해야 한다는 것을 알게 되었다. 또한 직선 BF와 직선AC가 평행해야만 분할한 위 삼각형과 새롭게 만들어진 아래 삼각형이 합동이 된다는 것을 인정할 수 있게 되었다.



<그림 7> 분할과 합성으로 넓이 구하기

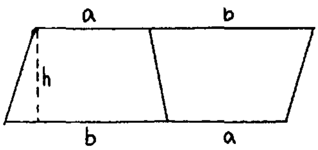
인환: 가로로 자르고 이 변(변 AC)과 평행한 선을 긋습니다. 그러면 이 삼각형이 여기로 올 수 있고 그 다음에는 이걸 이리로 보냅니다.
교사: 그러면 이 삼각형(삼각형 AED)과 이 삼각형(삼각형 BCE)이 합동이라는 것을 어떻게 설명할 수 있습니까?
인환: 이등분해서 잘랐으니까 이거(선분 AE)와 이거(선분 EB)가 같고 또 이거(선분 AD)와 이거(선분CD)가 같습니다.
교사: 그게 같기 위해서는 전제가 되어야 할 것이 필요할 것 같은데요.
나영: 저게(분할선) 평행하면 됩니다.
교사: 어디에? 무엇에 평행?
나영: 밑변에 평행

학생들은 높이나 밑변을 분할하는 선은 각 선분에 평행하게 이등분하는 선이 되어야 한다는 사실을 인정하면서 어떤 삼각형에도 적용되는 넓이 구하는 공식은 A= $\frac{1}{2}$bh라는 사실을 이끌어 내었다.

2. 사다리꼴의 넓이 표상

삼각형을 통해 알게 된 합동인 도형 추가하기와 분할과 합성 그리고 공식을 역이용한 도형 만들기 방법을 기초로 학생들은 사다리꼴의 넓이를 구하는 방법을 탐구하기 시작했다. 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 질문하였다. 학생들은 "윗변 더하기 아랫변 곱하기 높이 나누기 2"라고 정확하게 표현하였다. 칠판에 기호로 나타내어보라고 했을 때 '$(a+b)\times h\div 2$'라고 적었다. 또 다른 학생은 "윗변과 아랫변의 평균에 높이를 곱한 것"이라고 말하면서 '$\frac{a+b}{2}\times h$'라고 적었다. 그리고 또 다른 학생은 '$\frac{1}{2}(a+b)h$'로 나타내었다. 이 세 학생의 기호적 표상에

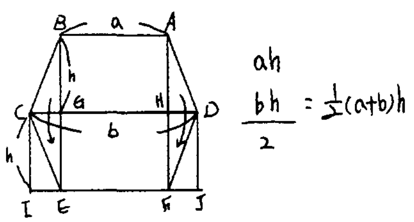
는 차이가 있었다. 연구자는 이러한 기호적 표상에서 도형의 모양을 찾아 넓이를 추론하기를 기대하였다. 학생들에게 "왜 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식은 이러한가?"라는 질문을 하면서 이를 설명하기 위한 방법을 탐구하도록 하였다.



<그림 8> 합동인 도형 추가하여 넓이 구하기

문경: (사다리꼴을 엎어서 붙이고) 이것 자체가 평행사변형이 됩니다. 평행사변형 공식을 쓰면 (a+b)h이고, 사다리꼴은 평행사변형 공식× $\frac{1}{2}$.
교사: 이 방법은 앞에서 제시한 공식 중 어느 것과 관련이 있습니까?
문경: 세 번째 공식입니다

문경은 합동인 사다리꼴을 하나 더 만들어서 180도 회전하여 추가하는 전략을 사용하였다. 결과적으로 만들어진 모양은 평행사변형이 되고 사다리꼴의 넓이는 이 평행사변형의 $\frac{1}{2}$이 된다는 것으로 설명하였다. 이와 같이 사다리꼴의 넓이를 원래 사다리꼴의 2배가 되는 모양을 만들어 최종적으로 그 넓이의 $\frac{1}{2}$을 구하는 전략을 나타낸 또 다른 예가 있다.

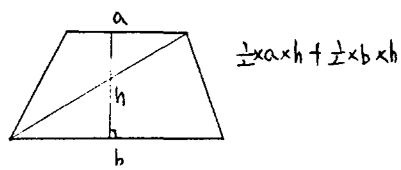


<그림 9> 합동인 사다리꼴 추가하여 변형하기

은화: 윗변의 길이를 a라고 하고 높이를 h라고 하면 밑변의 길이를 b라고 했을 때, 일단 눈에 제일 먼저 보이는 작은 사각형의 넓이를 구하면 이 사각형은 하나의 변은 a이고 높이가 h이기 때문에 ah구요, 이 큰 사각형은 가로의 길이가 b고 높이가 h가 됩니다. 그러면 넓이는 bh가 됩니다. 이것은 사각형 두 개의 넓이구요. 우리가 구하고자 하는 것은 (위 사다리꼴을 가리키며) 이 사다리꼴이지 않습니까? 이 사다리꼴은 가로가 a이고 세로가 h인 직사각형 하나와 삼각형 두 개로 이루어져 있는데요, 이 삼각형과 이 삼각형은 아까 증명한 것과 같이 합동입니다. 그래서 이 삼각형을 아래로 보냅니다. 그러면 이 식에서 말하는 넓이는 이 사각형의 넓이(위 사각형)와 이 사각형의 넓이(아래 사각형)의 반이라는 것을 알 수 있습니다. 왜냐하면, 이 사각형 두 개 중의 하나, 이 삼각형 두 개 중의 하나니까 (나누기 2를 표시하며) 이렇게 됩니다. 이걸 정리하면 $\frac{1}{2}$(a+b)h가 됩니다.

은화가 사용한 전략은 합동인 도형 추가하기와 분할과 합성 전략 두 가지를 모두 사용한 것이었다. 처음에 사용한 전략은 합동인 도형을 아래에 포개어 넓이가 2배인 도형을 만드는 것이었다. 그러나 다음 전략은 원래 사다리꼴 ABCD를 분할하여 사각형 DCIJ로 합성하는 것이었다. 그러나 최종적인 기호는 세 번째 공식으로 표현하였다. 넓이를 2배로 만드는 과정에서 은화는 각각의 직사각형으로 합성하여 표현하는 것이 넓이를 구하는 쉬운 방법이라는 것을 발견하였다.

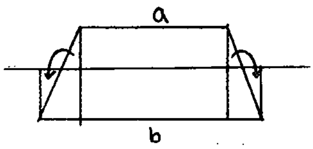
분할과 합성의 전략에 대해 민정은 사다리꼴을 두 개의 삼각형으로 분할하여 설명하였다



<그림 10> 두 삼각형으로 분할하여 넓이 구하기

민정: 사다리꼴을 이렇게 잘라요. 그러면 이 삼각형은 밑변이 a이고 높이가 h인 삼각형이고, 이 삼각형은 밑변이 b이고 높이가 h인 삼각형이에요. 그래서 이 삼각형은 $\frac{1}{2}$×a×h이고 이 삼각형은 $\frac{1}{2}$×b×h에요. 그러면 두 개를 합하여 정리하면 $\frac{h}{2}$×(a+b)
교사: 공식의 순서가 위에서 제시한 예와 다른데 어떻게 해석해야 합니까?
민정: 세 번째 공식과 같은데 순서만 바뀌게 된 것입니다.
교사: 그렇다면 민정이 제시한 공식에 적합한 분할과 합성을 할 수 있나요?

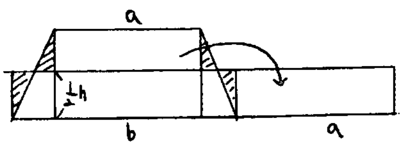
연구자는 민정이 이 공식을 제시하는 순간 이 공식에 맞는 어떤 설명이 있다는 것을 직감했다. 그것은 삼각형의 넓이를 분할과 합성하는 전략에서 사용한 밑변이나 높이를 $\frac{1}{2}$로 절단한 전략으로 사다리꼴의 넓이를 분할할 수 있다는 것이었다. 연구자의 예감은 적중했다. 지원은 다음과 같이 설명하였다.



<그림 11> 높이를 $\frac{1}{2}$로 절단하여 넓이 구하기

지원: 높이가 h니까 그 반을 자르니까, 이 넓이랑 이 넓이랑 똑같고 이 넓이랑 이 넓이랑 똑같으니까, 이 사각형 하나와(위 사각형) 이 사각형 하나(아래 사각형)가 남겠지요. 그러면 이 사각형(위 사각형)은 높이가 $\frac{1}{2}$h가 되어 $\frac{1}{2}$ha가 되고 이 사각형(아래 사각형)은 $\frac{1}{2}$hb가 됩니다. 그러니까 더하면 $\frac{1}{2}$h(a+b)가 나옵니다.

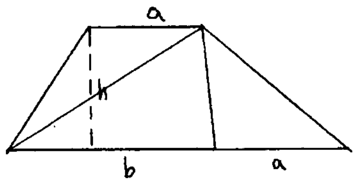
지원이 설명한 방법에 대해 경희는 더욱 분명하게 세 번째 공식과 어울리는 설명과 그림을 제시하였다. 경희가 설명한 그림은 공식을 $\frac{1}{2}$h와 (a+b)로 각각 구분하여 공식과 그림이 정확히 일치하는 설명이었다.



<그림 12> $\frac{1}{2}$h(a+b)를 설명하는 직사각형

경희: 이거하고 비슷한데 위에 있는 사각형을 옆으로 붙이면 이게 가로는 b 플러스 a, 높이는 $\frac{1}{2}$h 가 되지요.

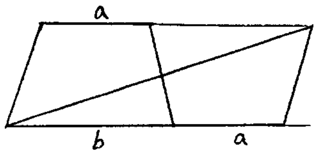
연구자는 계속하여 세 번째 공식에 관한 그림 설명을 요구했다. 이에 대해 한 학생은 앞서 경험한 삼각형의 공식을 떠올리며 다음과 같이 설명하였다.



<그림 13> $\frac{1}{2}$h(a+b)를 설명하는 삼각형

경희: 아까 전에 한 삼각형의 공식과 이 공식은 같습니다. 그렇게 보면 (a+b)는 가로 h는 세로로 하는 삼각형을 나타내면 되는데 그림에서 이 삼각형과 이 삼각형은 가로가 a이고 높이가 h로 서로 넓이가 같기 때문에 삼각형의 넓이로 같습니다.

경희가 사용한 전략은 비록 분할한 삼각형들이 합동이라는 사실을 설명하지는 못했지만 넓이가 같은 삼각형이라는 사실은 밝힐 수 있었다. 연구자는 경희의 설명을 듣고서 새로운 아이디어를 얻었다. 분명히 삼각형으로 이 공식을 설명할 수 있는 그림이 있을 것으로 보았던 것이다. 그리하여 연구자가 찾아낸 그림은 다음과 같다.



<그림 14> 삼각형으로 사다리꼴 넓이 나타내기

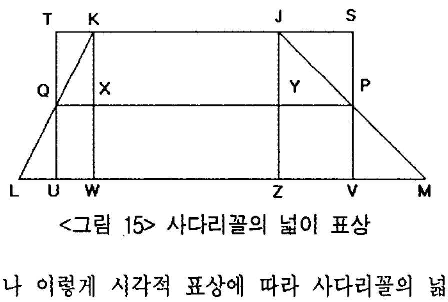
연구자는 먼저 사다리꼴을 한 개 더 포개어 평행사변형을 만들었다. 그리고 이 평행사변형을 두 개의 삼각형으로 나누었다. 그렇게 되면 밑변은 (a+b)가 되고 높이가 h인 삼각형이 만들어졌다.

Ⅳ. 시각적, 언어적, 기호적 표상의 사용에 대한 반성

수업을 마치고 연구자는 몇 가지 점에 대해 다시 한 번 생각을 해야 했다. 먼저, 사다리꼴의 넓이에 대한 기호적 표상과 분할-합성을 통한 시각적 표상의 일치를 찾아내는 것이었다. 학생들이 첫 번째와 세 번째로 제시

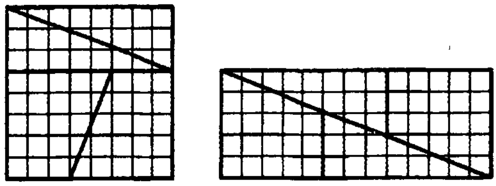
한 기호적 표상 $(a+b)\times h\div 2$와 $\frac{1}{2}(a+b)h$에 대해서는 어느 정도 시각적 표상 방법을 찾아내었다고 볼 수 있지만, 두 번째로 제시한 $\frac{a+b}{2}\times h$ 에 대해서는 명쾌한 시각적 표상을 찾지 못했던 것이다. 또한 생각해 볼 것은 이러한 시각적 표상과 수학적 언어의 연결성을 설명하는 것과 이러한 표상을 어떻게 정당화하는가에 있었다.

두 번째 공식에 대한 시각적 표상은 학생들이 아무도 표현하지 않았다. "윗변과 아랫변의 평균에 높이를 곱한 것"이라는 경수의 말은 그대로 $\frac{a+b}{2}\times h$와 맞는 말이었다. 그런데 윗변과 아랫변의 평균을 어떻게 시각적으로 표현하는가가 문제였다. 몇 번의 시행착오를 거치면서 답을 구할 수 없어서 연구자는 학생들이 표현한 그림을 다시 살펴보기 시작했다. <그림 11>에서 지원이 설명한 방법은 결정적인 단서를 제공하였다. 이 그림을 다시 살펴보면 윗변과 아랫변에 평행하고 사다리꼴 높이의 $\frac{1}{2}$을 지나는 선분과 만나는 점 Q와 점 P를 잇는 선분 QP는 윗변과 아랫변의 평균에 해당하는 길이로 볼 수 있다. 이렇게 해서 연구자는 경식이 표현한 수학적 언어인 윗변과 아랫변의 평균에 적합한 그림을 찾았다. 점 Q와 P는 선분 KL과 선분 JM의 중점이며, 선분 QP는 사다리꼴의 중선이다. 두 밑변의 평균이 되는 길이이다. 즉 $\frac{a+b}{2}$인 것이다. 가로가 $\frac{a+b}{2}$이고 세로가 h인 직사각형을 만들기 위해 삼각형 QUL과 PVM은 재정렬되어 직사각형 STUV을 만들게 된다. 이렇게 해서 사다리꼴 JKLM의 넓이는 $\frac{a+b}{2}\times h$가 되었다.



<그림 15> 사다리꼴의 넓이 표상

그러나 이렇게 시각적 표상에 따라 사다리꼴의 넓이를 구하였지만 시각적 표상은 오류를 범할 수 있다는 한계가 있음을 알고 있다. 예를 들면, 다음의 그림은 좋은 예가 된다. 왼쪽 그림과 오른쪽 그림에서 각 조각들은 서로 같아 보이며 적절하게 다시 합성하여 새로운 직사각형을 만들었다고 볼 수 있다. 그러나 왼쪽의 정사각형에서는 작은 사각형이 64개이고 오른쪽은 65개가 있다.


<그림 16> 시각적 오류를 일으키는 그림

분명 1개의 사각형이 차이가 나는데 이것은 시각적 증명이 가져다 줄 수 있는 모순에 대한 간단한 예가 된다. 그래서 연구자는 보다 확실한 방법으로 수학적 가정을 살펴볼 필요성을 느꼈다.

이 문제에 대한 수학적 가정을 확인하기 위해 먼저 필요한 것은 중점 Q와 P를 연결한 선분이 윗변과 아랫변에 평행하다는 것이다. 이 선분은 KJ와 LM에 평행하면서 점 Q를 통과하고 선분 JM과 어떤 점 A를 교점으로 한다. 평행이 되기 위해서는 선분 KQ:QL의 비는 선분 JA:AM과 같아야 하고, 점 Q는 선분 KL의 중점이기 때문에 그 비는 1:1이다. 이것은 선분 JA: AM의 비 또한 1:1임을 의미한다. 즉, 점 A는 JM의 중점이고 점 A는 점 P와 일치한다. 그래서 선분 QA와 QP는 같은 선분이다. 따라서 선분 QP는 선분 JK와 LM에 평행이다.

또 하나의 가정은 선분 QP의 길이는 선분 KJ와 LM 길이의 평균이다는 것이다. 이는 점 J, K, P, Q에서 수선을 내리면 다음이 성립하게 된다.

(1) QP=KJ+UW+ZV.

다음, $\triangle$KQX와 $\triangle$QLU는 점 Q가 선분 KL의 중점이기 때문에 선분 KQ와 QL이 같고, 마찬가지로 점 P에서는 선분 JP와 PM이 같고, 또한 선분 QP는 선분 KJ와 LM에 평행이기 때문에 선분 KX와 QU가 같고, $\angle$LQU와 $\angle$QKX는 동위각으로 같게 된다. 그래서 선분 LU=QX=UW가 된다. 선분 VM=YP=ZV를 보이기 위해 마찬가지의 주장을 할 수 있다. 이들 두 사실로부터, U는 LW의 중점이고 V는 ZM의 중점임을 알 수 있다. 그래서

(2) UW= $\frac{1}{2}$LW이고 ZV= $\frac{1}{2}$ZM

(2)를 (1)에 대입하면,

$$QP=KJ+\frac{1}{2}LW+\frac{1}{2}ZM$$
$$QP=\frac{1}{2}(KJ+KJ)+\frac{1}{2}LW+\frac{1}{2}ZM$$
$$QP=\frac{1}{2}KJ+\frac{1}{2}KJ+\frac{1}{2}LW+\frac{1}{2}ZM$$
$$QP=\frac{1}{2}KJ+\frac{1}{2}(KJ+LW+ZM)$$
$$QP=\frac{1}{2}KJ+\frac{1}{2}LM$$
$$QP=\frac{1}{2}(KJ+LM)$$

따라서 선분 QP는 선분 KJ와 LM의 평균이 됨을 알 수 있다.

마지막으로 보여야 할 것은 사다리꼴 JKLM과 직사각형 STUV가 같은 넓이를 가진다는 것이다. 이것은 만일 삼각형 LUQ가 삼각형 KTQ의 공간을 채우기 위해 잘라서 움직일 수 있다면 참이다. 선분 JK와 LM이 평행하다는 사실을 생각하자. 선분 KL이 두 평행한 직선을 지난다면 ∠QLU는 엇각으로 ∠QKT와 같고, ∠LQU와 ∠KQT는 맞꼭지각으로 같으며, ∠LUQ와 ∠QTK는 직각이다. 그리고 Q는 KL의 중점이기 때문에 선분 KQ는 QL과 같다. 그래서 직각삼각형 KTQ와 LUQ는 합동이다.

마찬가지로, 삼각형 JSP와 MVP가 또한 합동이고 그래서 사다리꼴 JKLM과 직사각형 STUV는 같은 넓이를 가지게 된다.

V. 나오는 글

연구자는 처음에 사다리꼴의 넓이를 표상하면서 학생들이 어떻게 시각적으로 표상하는가를 알아보는 데에 중점을 두었다. 그러나 수업을 진행하면서 연구자는 학생들이 단순히 사다리꼴의 넓이를 등적변형하는 것에 거치는 것이 아니라 기호적 표상에 따라 시각적 표상을 추론할 수 있다는 사실을 알게 되었다.

'$(a+b)\times h\div 2$'에 해당하는 시각적 표상은 제한적이었다. 합동인 사다리꼴을 하나 더 추가하여 평행사변형을 만든 다음 평행사변형의 넓이의 반을 구하는 방법이다. '$\frac{1}{2}(a+b)h$'는 상대적으로 많은 시각적 표상을 가능하게 한 기호적 표상이었다. 학생들은 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로 보면서 사다리꼴을 삼각형으로 변형하여 넓이를 구하였다. 그리고 이 식의 순서를 변형하여 '$\frac{h}{2}(a+b)$'로 만들어 사다리꼴의 높이를 반으로 하는 평행사변형을 만들거나 사다리꼴 높이를 반으로 하는 직사각형을 만들었다. 이러한 기호의 변형은 학생들이 기호를 통해 공간을 재해석하는 능력이 있음을 보여주고 있다. '$\frac{a+b}{2}\times h$'는 특정한 학생이 나타낸 진술이지만 수학적으로는 의미 있는 진술이었다. 두 밑변의 평균을 가로로 하는 직사각형을 발견할 수 있었으며 연구자는 이를 통해 시각적 표상이 가지는 결함을 채울 수 있는 정당화를 이끌 수 있었다.

학생들이 나타낸 기호적 표상과 시각적 표상의 연결을 통해 연구자는 표상은 서로 간에 영향을 줄 수 있다는 것을 발견하였다. 시각적 표상은 기호적 표상을 이끌어 내고 이 과정에서 언어적 표상은 다시 기호적 표상에서 시각적 표상을 이끌어 내는 역할을 하였다.

교실에서 사용하는 수학적 언어를 통한 공유 반성에 관한 것을 생각해 볼 수 있다. 연구자는 처음에 용어의 사용에 혼선이 있었다. '합동인 도형 추가하기' 또는 '하나 더 포개기'라고 연구자는 표현하였지만 학생들은 '평행선을 그어'라는 말을 사용하였다. 이러한 수학적 언어 속에는 결과적인 모양은 같겠지만 그 안에 숨어있는 수학적 과정은 각각 다를 수 있음을 알게 되었다. '$\frac{1}{2}$로 자르고 붙이기'와 '이 도형과 이 도형은 합동이다'라는 언어적 표상의 차이는 등적변형을 설명하는 방법에서 큰 차이를 가져왔다. '자르고 붙이기'라는 언어를 사용할 때 학생들은 같은 모양의 같은 길이를 측정하는 조작에 중점을 두었지만 '합동'이라는 언어를 사용했을 때는 기하학적 증명의 논리를 찾고자 하였다. '반으로 나누고 사각형으로 만든다', '이등분해서 잘랐으니까'로 표현되는 것과 '윗변', '아랫변', '가로'로 나타내면서 수학적 언어는 계속해서 혼돈되어 사용되었으며 이러한 언어적 표상의 다양성은 시각적 표상의 다양성을 가져왔다.

Shulman(1986, p9)은 "단 하나의 가장 강력한 형태의 표상은 없다. 교사는 직접 실제적이고 대안적인 형태의 모든 표상을 알고 있어야 한다"고 하였다. 이러한 사실을 인정해 보면 교사 교육자는 다양한 기호적 표상뿐만 아니라 수학적 언어에도 준비가 되어 예비교사들의 요구를

충족해야함을 알 수 있다. 그리고 교사가 가진 수학적 언어는 한정되는 것이 아니라 학생들과의 언어적 상호작용을 통해서 서로가 더욱 풍부해진다는 것도 사실이다.

이제, 글을 정리하며 후속 연구를 위한 제언을 하고자 한다. 현재 교사교육과 관련되는 다양한 주제의 연구가 이루어지고 있다는 점은 긍정적으로 평가할 수 있지만, 교사교육과 관련한 연구에서 연구 대상을 현직교사 또는 수학을 배우는 학생으로 고정시키는 것은 실제적인 성과를 거두기에 한계점이 있다고 본다. 다시 말하면, 이제는 교사교육자 자신을 연구 대상으로 하는 많은 연구가 이루어져야 할 것이다. 이 연구에서는 예비초등교사가 사다리꼴의 넓이를 어떻게 표상하는가를 분석하였으며, 이러한 분석을 바탕으로 교사교육자로서 연구자의 교수법적 내용 지식의 변화를 알아보았다. 즉, 사다리꼴의 넓이라는 수학의 내용과 표상이라는 과정을 주제로 연구자의 지식의 발달을 분석하였다. 그러나 앞으로의 연구는, 교사교육자가 교사가 되고 예비교사가 학생이 되는 교실 환경 속에서, 다양한 수학적 내용을 표상뿐 아니라 문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성과 같은 과정규준과 관련시키는 후속 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강지형 · 김수환 · 라병소 · 박성택 · 이의원 · 이정재 · 정은실 (2002). 초등수학교육. 서울: 동명사.

구광조 · 오병성 · 전평국 역 (1995). 수학 학습 심리학, 서울: 교우사.

김선희 · 이종희 (2003). 중학생들의 수학적 언어 수준, 수학교육학연구 **13(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

김연식 · 장혜원 (1996). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구, 대한수학교육학회논문집 **6(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

신준식 (2003). 초등교사 양성 대학의 초등수학교육에대한 교수-학습 프로그램 개발, 수학교육 **42(4)**, 서울: 한국수학교육학회.

이대현 (2003). 수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고, 수학교육 **42(5)**, 서울: 한국수학교육학회.

이종욱 (2003). 예비초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교수학적 지식, 수학교육학연구 **13(4)**, 서울: 대한수학교육학회.

이종욱 (2005a). 초등교사의 분수 지식 실태 분석, 수학교육 **44(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

이종욱 (2005b). 분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구, 한국교원대학교 박사학위논문.

이희승 (1996). 민중 엣센스 국어사전(수정판), 서울: 민중서림.

최창우 (2004). 초등수학 학습에 있어서 표상에 관한 고찰, 초등수학교육 **8(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

황혜정 · 신항균 · 임민경 (2003). 교육대학교와 교육연수원의 수학과목 분석 및 연계, 학교수학 **5(3)**, 서울: 대한수학교육학회.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: preface to a science of mathematics education*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goldin, G. A. (1988). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation, *12th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, vol II*, pp.358-365.

Janvier, C. (1987). Conceptions & representations: the circle as an example, In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, LEA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2001). *The roles of representation in school mathematics*, 2001 Yearbook, Reston, VA: Author.

Schulman, L. S. (1986). Those who understanding: knowledge growth in teaching, *Educational Research*, 15, pp.4-14.

Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics*, Harmonsworth: Penguin.

von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation, In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, LEA.

A Didactic Analysis of Prospective Elementary Teachers' Representation of Trapezoid Area

Lee, Jongeuk
Gaepo elementary school, Busan, Korea
E-mail: jongeuk@chol.com

This study focuses on the analysis of prospective elementary teachers' representation of trapezoid area and teacher educator's reflecting in the context of a mathematics course. In this study, I use my own teaching and classroom of prospective elementary teachers as the site for investigation. I examine the ways in which my own pedagogical content knowledge as a teacher educator influence and influenced by my work with students. Data for the study is provided by audiotape of class proceeding. Episode describes the ways in which the mathematics was presented with respect to the development and use of representation, and centers around trapezoid area. The episode deals with my gaining a deeper understanding of different types of representations-symbolic, visual, and language. In conclusion, I present two major finding of this study. First, Each representation influences mutually. Prospective elementary teachers reasoned visual representation from symbolic and language. And converse is true. Second, Teacher educator should be prepared proper mathematical language through teaching and learning with his students.

* ZDM classification : B59
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50
* key word : representation, prospective elementary teacher, trapezoid area