한국수학사학회지 제19권 제2호(2006년 5월), 115-124

유계변동과 관련된 Waterman의 연구에 대하여

안양대학교 컴퓨터학과 김화준
khj1@anyang.ac.kr

유계변동(bounded variation)과 관련된 Daniel Waterman의 30여 년간의 연구에 대하여 조사를 하였다.

주제어 : 유계변동, 절대연속, 푸리에 급수

0. 서론

폐구간 $[a, b]$에서 유계변동(bounded variation) 함수를 정의하는데 있어서 $\sum|f(I_n)|$의 상한(supremum)을 생각하자. 여기서 $\{I_n\}$은 $[a, b]$의 겹쳐지지 않는 부분구간들(non-overlapping subintervals)의 모든 집합(collection)이고,

$$I_n = [x_n, y_n],\ f(I_n) = f(x_n) - f(y_n)$$

일 때, $[a, b] = \bigcup I_n$을 만족한다고 하자. 함수 $V(f) = \sup\sum|f(I_n)| < \infty$ 이면, f를 유계변동 함수라고 한다. 이 유계변동 함수는 Fourier급수의 수렴에 관련한 Dirichlet의 증명과정에서 1881년 Jordan에 의하여 발견되었다. 이 유계변동의 개념들은 Fourier급수와 Riemann-Stieltjes적분과 밀접한 연관을 갖고 있다. 폐구간의 분할에 각 소구간의 길이대신에 유계변동인 함수로 weight를 주면 Riemann-Stieltjes적분을 정의하게 된다.

한편, Fourier급수는 공학에서의 열방정식문제의 해를 구하기위해서 Fourier에 의하여 고안된 것으로, 함수열 $\{e^{inx}\}_{n\in Z}$은 함수공간 $L_2(0, 2\pi)$의 기저(basis)가 된다. 따라서 $f \in L_2(0, 2\pi)$인 모든 함수는 Fourier급수

$$\sum_{n\in Z} c_n e^{inx},\ \ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

로 표현되고, 이 때 수렴의 의미는 L_2-norm으로부터 얻게 된다. 즉,

$$\|f(x)-\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\|_{L_2} \to 0 \text{ as } n\to\infty$$

이다. 여기에서 $L_2(0,2\pi)$는 동치류(equivalence class)이므로 L_2-norm에서는 Lebesgue 측도(measure) 0인 집합에서 Fourier급수의 함수값이 $f(x)$의 값과 다른 것은 문제가 되지 않는다. 따라서 자연스러운 질문은 "$f(x)$에 대한 Fourier급수 $\sum_{n\in Z} c_n e^{inx}$가 실제로 각 점 $x\in(0,2\pi)$에 대하여 $f(x)$에 수렴하는가?" 하는 문제이다. 이에 대한 답은 그렇지가 않다는 것이다. 연속인 함수에서조차 Fourier급수가 주어진 함수값에 수렴하지 않는 점들이 있다는 것이 밝혀졌다. 전형적인 Dirichlet-Jordan정리는 주기 2π의 함수가 유계변동이면, 그 Fourier 급수는 각각의 점에서 우극한과 좌극한의 평균으로 수렴하고 연속점(point of continuity)들의 폐구간에서 균등수렴(uniform convergence)하다는 내용이다. 다시 말해서, 함수 $f(x)$가 유계변동이면 이 함수의 Fourier 급수는 유계 폐집합(closed bounded set)에서 균등수렴하다는 사실을 밝힌 것이 이 정리의 가치로 생각할 수 있다. 그 후에 Fourier급수가 주어진 함수에 점마다 수렴(pointwise convergence)하는 일반화된 유계변동 함수공간을 찾는 것과, Fourier급수가 주어진 함수에 점마다 수렴하지 않는 경우에 점마다 수렴하도록 Fourier급수의 계수를 조정하는 방법이 연구되어왔는데, 후자의 방법을 summability method라 한다.

1. BV와 관련한 Waterman의 연구

Daniel Waterman은 현재 Florida Atlantic University에서 research professor로 일하고 있다. 그의 연구는 유계변동(이하 BV)과 Fourier급수의 수렴에 대한 연구에 집중되어있다. 여기에서는 BV함수와 관련한 Waterman의 연구에 대하여 시간 순으로 조사를 하였다.

BV의 일반화에 대한 그의 연구를 살펴보자. 그는 1968년부터 수렴과 관계된 Fourier 급수에 대한 논문을 발표하였고, 1972년에 Studia Math에 'On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation'라는 제목으로 BV함수의 일반화에 대한 논문을 발표하게 된다. 여기서 그는 Λ-bounded variation (ΛBV)의 정의를 다음과 같이 하고 있다.

"If $\Lambda=\{\lambda_n\}$ is an increasing sequence of positive numbers such that $\sum\frac{1}{\lambda_n}$ diverges, the functions of Λ-bounded variation(ΛBV) are those f for which

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < \infty$$

for every sequence I_n of non-overlapping intervals(([13])."

다시 말해서, 위에서 정의한 모든 집합(collection) $\{I_n\}$에 있어서, $\sum |f(I_n)|/\lambda_n$이 고르게 유계(uniformly bounded)이면 f는 ΛBV에 속한다고 말한다. 이 논문에서 그는 Harmonic bounded variation(HBV)의 함수들이 Fourier 급수의 수렴에 있어서 Lebesgue test를 모든 곳에서 만족하지만, ΛBV의 함수 모임(class)은 Fourier 급수가 발산하는 함수를 포함한다는 것을 밝혔다. HBV는 ΛBV에서 $\Lambda = \{n\}$인 경우의 class를 의미한다. HBV의 변동(variation)이 BV의 변동보다 작으므로, HBV가 BV보다 큰 집합인 것은 자명하다. 이것은 결국 Dirichlet-Jordan 정리가 $(BV \subset)HBV$에서 성립함을 의미한다.

1976년에 'On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation([14])'의 제목으로 Studia Math에 논문을 발표한다. 위에서 언급한대로 어떤 ΛBV공간은 Fourier급수가 주어진 함수에 발산하는 경우를 포함하기 때문에, 우리는 주어진 ΛBV공간에서 summability method를 생각할 수 있다. 이 논문은 ΛBV공간에서 summability method를 다룬 것으로써, 주요 내용은 집합 $\Lambda = \{n^{\beta+1}\}$, $-1 < \beta < 0$ 의 함수들의 Fourier 급수가 유계(bounded)이며 합 가능(summable)하다는 내용이다.

1976년에 다시 'On Λ-bounded variation([15])'을 Studia Math에 발표하게 된다. 이 논문에서 그는 실변수함수의 연속성과 ΛBV 함수의 연속성사이의 관계를 연구하였는데, 변동 v의 연속성은 $f(\in \Lambda BV)$의 연속성을 의미한다는 것을 보였고, f의 norm을 $\|f\| = |f(a)| + V(f\,;I)$으로 정의하면 ΛBV가 Banach 공간이 됨을 보였다. 아래에 그 내용을 보자.

"Let f be of class ΛBV on I. Then v is right(left) continuous at any point of I if and only if f is right(left) continuous at that point."

위의 정리에서 v는 variation이고, I는 유계 폐구간이다.

1979년 'Proceedings of the AMS'의 논문 'Fourier series of functions of Λ-bounded variation([16])'에서 ΛBV에 속하는 함수의 Fourier 계수를 구하였고, HBV의 함수의 Fourier급수의 부분합(partial sum)이 고르게 유계라는 것을 보였다. 또 Dirichlet정리에 의존하지 않고, HBV의 함수에 있어서 Dirichlet정리와 유사한 정

리를 증명하였다. 그 내용은 이 급수가 모든 곳에서 수렴하고, 연속점들의 폐구간에서 균등수렴하다는 내용이다. 이 사실로부터 그는 수렴에 있어서 Lebesgue Test를 만족하는 집합 L과 HBV가 complementary 모임이라는 것을 보였다. 이 내용은 다음 3개의 정리로 구성되어 있다.

"Theorem 1. If $f \in \Lambda BV$, then the Fourier coefficients of f are $O(\lambda_n / n)$.

Theorem 2. The classes L and HBV are complementary. If ΛBV is not contained in HBV, then L and HBV are not complementary.

Theorem 3. If $f \in HBV$, then the partial sums of its Fourier series are uniformly bounded. The series converges everywhere and converges uniformly on closed intervals of points of continuity([16])."

위의 complementary의 개념은 Zygmund에 의하여 정의된 개념으로, 주기가 2π이고 $[a, b] = [0, 2\pi]$일 때 함수의 class K와 K_1이 complementary라는 것은

$$f \in K,\ g \in K_1 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg\ dx = \frac{1}{2}a_0 a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a'_k + b_k b'_k)$$

이 성립함을 의미한다. 위에서 a_k, b_k는 f의 Fourier 계수이고, a'_k, b'_k는 g의 Fourier 계수이다.

그 후 Schramn 과 Waterman은 1982년 'Proceedings of the AMS'에 발표한 공동 논문 'On the magnitude of Fourier coefficients([10])'에서 다양한 함수의 모임에 있어서 Fourier계수의 크기(magnitude)를 구할 수 있고, integral modulus of continuity를 구할 수 있음을 보였다. 그 정의는 다음과 같다.

"For $p \geq 1$, we define the integral modulus of continuity of order p to be

$$w_p(f;\delta) = \sup\left(\int_I |f(x+t) - f(x)|^p\ dx\right)^{1/p},$$

where $0 < t \leq \delta$."

이 논문에서 $\phi\Lambda -$bounded variation($\phi\Lambda BV$)이라는 정의가 처음으로 등장한다. 아래에 그 정의를 보자.

"If ϕ is a non-negative convex function defined on $[0, \infty)$ such that $\phi(x)/x \to 0$ as $x \to 0$, we say that f is of $\phi\Lambda$-bounded variation if, for every $\{I_n\}$

$$\sum \frac{\phi(c|f(I_n)|)}{\lambda_n} < \infty$$

and the total variation of f over $[a, b]$ is defined by

$$V_{\phi\Lambda}(f) = \sup \sum \frac{\phi(|f(I_n)|)}{\lambda_n}."$$

위에서 c는 상수이고, $\{I_n\}$은 겹쳐지지 않은(non-overlapping) 구간의 집합이다. 이 논문에서는 f가 주기 2π의 실수함수일 때, ΛBV, $\phi\Lambda BV$에서 차수(order) 1의 integral modulus of continuity를 구하였고, $\Lambda BV^{(p)}$에서 차수 p의 integral modulus of continuity를 구하였다. $\phi\Lambda BV$에서 $\phi(x) = x^p$, $p > 1$일 경우의 집합은 M. Shiba에 의하여 1980년에 연구되었으며 $\Lambda BV^{(P)}$라 부른다.

1982년 이 두 사람은 다시 공동연구로서 "Absolute convergence of Fourier series of functions of $\Lambda BV^{(P)}$ and $\phi\Lambda BV$([11])"를 Acta Math. Hungary 에 발표를 한다.

1985년에 Waterman과의 연구에서 Schramn은 BV의 개념을 $[0, \infty)$에서 정의된 증가하는 convex함수들의 수열 $\phi = \{\phi_n\}$에 의하여 일반화하였다. Tran. AMS에 발표한 이 함수의 정의는 다음과 같다.

"If f is of ϕ-bounded variation on $[a, b]$ if

$$V_\phi(f) = \sup \sum \phi_n(|f(I_n)|)$$

is finite([6][7][9])."

이 논문에서 그는 일반화시킨 BV의 개념들은 적당한 norm을 정의해주면 Banach 공간이 됨을 보였고, ϕBV와 Riemann-Stieltjes적분과 관계된 결과를 증명하였다. 그리고 Dirichlet-Jordan 정리와 관련하여 ϕBV 모임도 $x=0$에서 Fourier 급수가 발산하는 함수를 포함한다는 것을 밝혔다. 이것은 결국 ΛBV보다 작은 모임인 ϕBV에서도 Dirichlet-Jordan 정리가 성립하지 않는다는 것을 의미한다. $\phi BV \subset \Lambda BV$인 것은 Young의 연구 덕분이다([15]). Young's 부등식은 ϕ가 $\phi(0) = 0$이고 $\lim_{x\to 0+} \phi(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$일 때, $\psi(y) = \sup\{xy - \phi(x) | x \ge 0\}$이면 $xy \le \phi(x) + \psi(y)$이 성립한다는 내용이다. 이 부등식으로부터,

$$k\sum_{n=1}^{N} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} \le \sum_{n=1}^{N} \phi(k|f(I_n)|) + \sum_{n=1}^{N} \psi(\frac{1}{\lambda_n})$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(\frac{1}{\lambda_n}) < \infty$ 이고, $\phi BV \subset \Lambda BV$라는 것을 쉽게 보일 수 있다. 연구의 진행순서가 ΛBV에서 $\phi\Lambda BV$로 그 다음에 ϕBV로 가는 것이 흥미롭다. 사실 ϕBV는 ΦBV라는 형태로 1959년에 Musielak와 Orlicz에 의하여 Studia Math에 처음 정의되어졌다. Schramn은 이 정의를 이용하여 BV의 개념을 일반화한 것으로 알려져 있다. Musielak와 Orlicz는 적당한 양수 k에 대하여, $\sum_{1}^{n-1} \Phi(k|f(x_{i+1}) - f(x_i)|)$의 상한이 유계이면 f가 ΦBV에 속한다고 정의하였다 ([5]).

1997년 Waterman은 L.A. D'anonio와의 논문에서 'A summability method for Fourier series of functions of generalized bounded variation([2])'이라는 제목으로 'Analysis'에 발표를 한다. 그 내용은 다음과 같다. $k/\lambda_k = O(1)$ 이고 $\sum 1/\lambda_k$이 발산하는 양수의 증가하는 수열 $\Lambda = \{\lambda_k\}$이 주어졌을 때, ΛBV의 함수의 Fourier 급수는 모든 곳에서 $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$로 합 가능하고 연속점의 폐구간에서 고르게 합 가능한(uniformly summable) summability method (W, λ)를 정의할 수 있다. 이 방법은 다른 수열에 의하여 정의되어진 어떤 더 큰 공간(space)에서 성립하지 않는다는 점에서, 수열 Λ에 특정되어 있다. 그리고 그는 같은 summability 결과를 이끌어내는, ΛBV보다 약한 조건인 $W\Lambda$를 정의하였다. 이 논문의 주요한 정리들은 1986년 Syracuse 대학의 Isaza에 의한 "Functions of generalized bounded variation and Fourier series"의 결과들을 기초로 작성되어진 것으로 알려져 있다.

BV의 일반화에 대한 연구가 D. Waterman, M. Schramn 그리고 Pamela B. Pierce 등의 학자에 의하여 연구가 많이 진행이 되었기 때문에, 앞으로의 BV와 관련한 연구 전망은 BV의 일반화에 대한 연구보다는, BV와 관련된 개념에 대한 연구가 진행되어 질것이라고 판단된다. 1996년에 Móricz와 Siddiqi는 실변수 함수 f의 Fourier급수의 부분합 S(f)의 convergence in the mean을 연구하면서 bounded variation in the mean의 개념을 도입하였다([4]). 아래에 이 정의를 살펴보자.

"Let f be a real-valued function in L_1 on the circle group T. We define the corresponding interval function by $f(I) = f(b) - f(a)$, where I denotes the interval $[a, b]$. Let $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ be a partition of $[0, 2\pi]$, and $I_{kx} = [x + t_{k-1}, x + t_k]$. If

$$V_m(f) = \sup\left\{\int_T \sum_{k=1}^{n} |f(I_{kx})|dx\right\} < \infty,$$

where the supremum is taken over all partitions, then f is said to be of bounded variation in the mean(or of bounded variation in the L_1 norm). We denote the class of all functions which are of bounded variation in the mean by BVM ([8])."

그 후 2000년에 Daniel Waterman과 Pamela B. Pierce는 'Proceedings of the AMS'에 'Bounded variation in the mean([8])'이라는 제목으로 BV함수와 Bounded variation in the mean(이하 BVM)의 함수들과의 관계에 대하여 circle group에서 이 개념을 사용하여 발표를 하였다. 이 논문은 정리 1개로 구성되어있는데, Waterman과 Pierce는 f가 BVM의함수라는 것과 $f=g$ a.e. 인 BV함수 g가 존재하는 것 사이에 필요충분조건이 성립함을 보이고 있다. 다음에 그 정리를 보자.

"A function of $f \in BVM$ if and only if there is a function $g \in BV$ such that $f = g$ a.e."

이 정리는 측도론(measure theory)의 다음 정리를 참고로 만들어진 것으로 판단된다. 일반적으로 "f가 적분가능하면 f와 측도 0인 집합을 제외하고 f와 같아지는 함수가 L_1안에 존재 한다." 유계변동 함수들은 유계이고 $[a,b]$의 거의 모든 점에서 연속이므로 g가 적분가능하다는 것에 유의하자. Waterman과 Pierce의 논문은 적분가능보다 강한 조건인 BV의 조건을 주어서 위의 일반적인 정리를 구체화시켰다는 데에 의미를 부여할 수 있다. 여기서 f가 Riemann 적분가능한지 Lebesgue 적분가능한지는 상관이 없다. 왜냐하면 유계폐구간에서 유계변동인 실수치 함수는 Riemann 적분가능하고, 이 경우에 f의 Riemann적분과 Lebesgue적분은 일치하기 때문이다.

2. 추후 연구에서의 몇 가지 생각

Waterman은 현재 double Fourier 급수의 수렴에 대하여 연구를 하는 것으로 알려져 있다. 추후 연구와 관련하여 개인적으로 몇 가지 생각을 하여 보았다.

1) Dirichlet-Jordan정리가 성립하는 HBV보다 크고 ϕBV보다 작은 BV 함수공간을 찾을 수 있는가?

2) Circle group에서 정의한 bounded variation in the mean의 개념을 L_1에서의 실

수치 함수로 확장하여 생각할 수 있는가?

3) Convergence in measure의 개념을 가지고, bounded variation in measure의 개념을 만든다면, 다음 정의가 타당한가?

f가 $[a, b]$에서의 실수치 함수라 하자. 모든 I_n에 대하여,

$$V_\mu(f) = \mu\left\{I_n : \sum |f(I_n)| > M\right\} = 0$$

이 아주 큰 양수 M에 대하여 성립한다면, f를 bounded variation in measure라 하고 $BV\mu$에 의하여 표시하자.

4) 3)의 정의가 타당하다면 bounded variation in the mean과 bounded variation in measure 와의 관계는 어떠한가?

5) Variation 함수에 유계변동보다 강한 조건인 절대연속(absolute continuity)의 조건을 주어서 Radon-Nikodym 정리[1][12]로 연결할 수 있는가?

6) $V_{\phi\Lambda}$가 $[a, b]$에서 절대연속이라면, $p \geq 1$일 때 $V^p_{\phi\Lambda}$도 절대연속인가?

7) [8]에서의 정리에서 BV함수보다 강한 조건인 절대연속의 조건을 주면 어떠한 변화가 일어나는가?

3. 결론

위에서 Waterman의 연구 중에서 BV에 관한 연구를 시간순서로 살펴보았다. 한 분야에 대한 30여년이 넘는 그의 연구는, 그의 장인정신을 엿볼 수 있게 해준다. 그의 연구의 가치는 일반화시킨 BV 함수의 모임(class)에서 Dirichlet-Jordan 정리가 어느 모임까지 성립하는가에 대한 여부와, Fourier급수가 주어진 함수에 점마다 수렴하지 않는 경우에 점마다 수렴하도록 Fourier급수의 계수를 조정하는 방법인 summability method에 관한 것이라고 판단된다.

앞으로의 BV와 연결된 연구방향은 Dirichlet-Jordan정리가 성립하는 HBV보다 크고 ϕBV보다 작은 BV 함수공간을 찾는 것과, BV의 응용분야가 되리라 전망한다.

감사의 글 좋은 조언과 수정을 도와주신 심사위원들께 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Donald L. Cohn, *Measure theory*, BirkhAauser, Boston, 1980.
2. L.A. D'anonio and D. waterman, *A summability method for Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Analysis 17 (1997), 287-299.
3. P. K. Jain and V. P. Gupta, *Lebesgue measure and integration*, NCERT, New Delhi, 1982.
4. Moricz. F and Siddiqi A. H, *A quantified version of the Dirichlet-Jordan test in L_1-norm*, Rend. Circ. Mat. Palermo 2(45) (1996), 19-24.
5. J. Musielak and W. Orlicz, *On generalized variations I*, Studia Math. 18 (1959), 11-41.
6. J.K. Park, *Notes on the generalized bounded variations*, J. Korean Math. Soc. (1996), 285-294.
7. J.K. Park, *Functions of ϕ-bounded variations*, J. Appl. Math. Computing 13 (2003), 447-455.
8. Pamela B. Pierce and Daniel Waterman, *bounded variation in the mean*, Proc. Amer. Math. Soc 128 (2000), 2593-2596.
9. M. Schramn, *Functions of ϕ-bounded variation and Riemann-Stieltjes integration*, Trans. Amer. Math. Soc 287 (1985), 49-63.
10. M. Schramn and D. Waterman, *On the magnitude of Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc 85 (1982), 407-410.
11. M. Schramn and D. Waterman, *Absolute convergence of Fourier series of functions of $\Lambda BV^{(P)}$ and $\phi\Lambda BV$*, Acta Math. Hungary 40 (1982), 273-276.
12. A. Torchinsky, *Real variables*, Addison-Wesley Press, 1986.
13. D. Waterman, On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation, Studia Math. 44 (1972), 107-117.
14. D. Waterman, *On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation*, Studia Math. 55 (1976), 87-95.
15. D. Waterman, *On Λ-bounded variation*, Studia Math. 57 (1976), 33-45.
16. D. Waterman, *Fourier series of functions of Λ-bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 74 (1979), no. 1, 119-123.
17. D. Waterman, *New results on function classes invariant under change of variable*, Real Anal. Exch. 9 (1983), 146-153.
18. D. Waterman, *Summability methods associated with generalized bounded variations*, W. Balser and W. Kratz (eds), Universität Ulm, 1986.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 19 No. 2 (May. 2006), 115-124

On the study of Waterman with respect to Bounded Variation

Department of Computer Science, Anyang University **Hwa Jun Kim**

Functions of bounded variation were discovered by Jordan in 1881 while working out the proof of Dirichlet concerning the convergence of Fourier series. Here, we investigate Waterman's study with respect to bounded variation and its application on a closed bounded interval.

The value of his study is whether Dirichlet-Jordan theorem holds in which function classes or not and summability method is what modifies its Fourier coefficients to make resulting series converge to the associated function.

We have a view that the directions of future research with respect to bounded variation are two things; one is to find the function spaces which are larger than HBV and smaller than ϕBV, and the other is to find a fields of applications.

Key words : bounded variation, absolute continuity, Fourier series

2000 Mathematics Subject Classification: 26A45, 26A46

논문 접수 : 2006년 4월 7일, 심사 완료 : 2006년 5월