한국수학사학회지 제19권 제2호(2006년 5월), 101-114

초·중등 수학 교과서에서 기하 양 사이의 비례관계의 전개 방식에 대한 역사적 분석

경인교육대학교 과학교육연구소 권석일
steinein@dreamwiz.com

건국대학교 홍진곤
dion@konkuk.ac.kr

현 중학교 기하는 그 내용적 근원을 《Eulcid원론》에 두고 있으나, 그 체제 및 내용 전개 방식에 있어서는《Eulcid원론》과 적지 않은 차이가 있다. 이는 현 수학 교과서의 기하 부분이 《Eulcid원론》이 가지고 있는 수학적 엄밀성과 형식성을 완화시켜 교육적으로 건전한 출발점을 찾고자 하였던 여러 가지 시도를 반영하고 있기 때문이다. 특히, 기하의 내용 중에서 기하 양 사이의 비례관계는 Euclid 당시의 그것과 오늘날의 방법이 매우 큰 차이를 보이고 있으며, 이는 비례관계가 교육적 난점을 가지고 있었음을 드러낸다. 본 논문은 비례관계를 교육함에 있어서의 어려움을 극복하고자 시도되었던 변화 과정을 역사적으로 고찰하여 이로부터 중학교 기하 교육에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

주제어 : 기하, 기하교육, 《Eulcid원론》, 교과서, 비례 관계, 통약불가능성

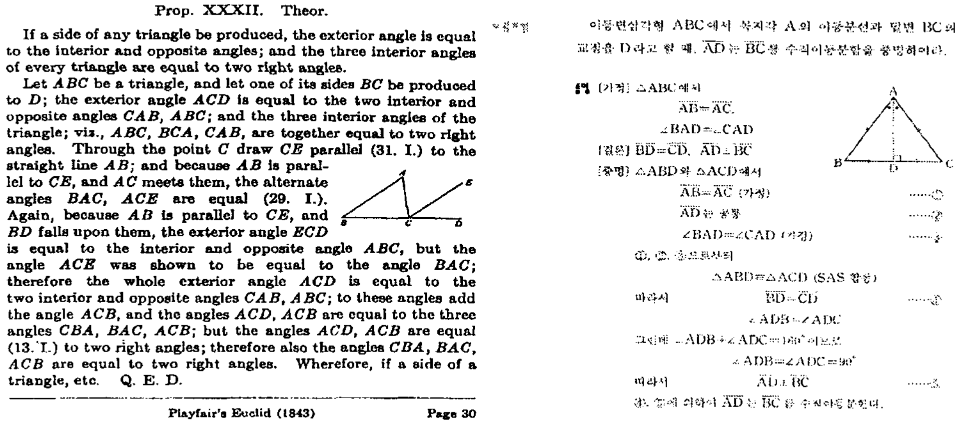
0. 서론

현 중학교 기하는 그 내용적 근원을 《Eulcid원론》에 두고 있다[3]. 그러나, 현 중학교 수학 교과서의 기하 부분은《Eulcid원론》과 비교해 볼 때 적지 않은 차이가 있다. 예를 들어, 《Eulcid원론》이 기하학의 '제일 원리'라고 할 수 있는 정의, 공리, 공준을 추출하고 이로부터 모든 명제가 엄밀하게 연역적으로 체계화되어가는 순서[4]를 따르도

3) 현 교과서 저자들도 "현재 우리가 다루고 있는 도형의 관한 내용의 대부분은 유클리드의 「원론」에 있는 내용이다([5, p. 55])."라고 밝히고 있다.

4) 《Eulcid원론》제 I권의 처음 26개의 명제를 분석하여 보면, 그 상당수가 '삼각형'에 대한 것이지만, 삼각형에 대한 명제 사이에 '각의 이등분(명제 9)', '맞꼭지각의 성질(명제 15)' 등이 들어가 있다. 이는 그 명제들을 배치함에 있어 철저하게 논리적인 순서를 따르도록 배치하였기 때문이다. 다시 말하여 《Eulcid원론》이 명제를 증명함에 있어 공리와 이전에 증명된 명제 이외에는 사용하지 않는 엄밀한 체계화 과정을 따르도록 구성되어 있기 때문이다. 이와는 달리 현 수학 교과서는 주제별로 내용을 전개하는 방법을 따르고 있다. 실제로,《Euclid원

록 하는 반면, 현 중학교 수학 교과서는 '삼각형의 성질', '사각형의 성질'과 같은 단원명([6])에서 알 수 있듯이 주제별로 기하 명제를 배열하는 방법을 사용하고 있다. 또한, 증명을 진술함에 있어서도 도형을 문자로 표현하는 것을 제외하고는 별도의 기호를 사용하지 않고 증명을 기술하고 있는 《Eulcid원론》과 달리, 현 기하 교과서는 $\triangle ABC$, $\overline{AB}$와 같은 기호를 사용하고, 증명을 진술함에 있어 [가정], [결론], [증명]으로 구분하는 방법을 사용하고 있다(<그림 1>5) 참조).


Prop. XXXII. Theor.

If a side of any triangle be produced, the exterior angle is equal to the interior and opposite angles; and the three interior angles of every triangle are equal to two right angles.

Let *ABC* be a triangle, and let one of its sides *BC* be produced to *D*; the exterior angle *ACD* is equal to the two interior and opposite angles *CAB*, *ABC*; and the three interior angles of the triangle; viz., *ABC*, *BCA*, *CAB*, are together equal to two right angles. Through the point *C* draw *CE* parallel (31. I.) to the straight line *AB*; and because *AB* is parallel to *CE*, and *AC* meets them, the alternate angles *BAC*, *ACE* are equal (29. I.). Again, because *AB* is parallel to *CE*, and *BD* falls upon them, the exterior angle *ECD* is equal to the interior and opposite angle *ABC*, but the angle *ACE* was shown to be equal to the angle *BAC*; therefore the whole exterior angle *ACD* is equal to the two interior and opposite angles *CAB*, *ABC*; to these angles add the angle *ACB*, and the angles *ACD*, *ACB* are equal to the three angles *CBA*, *BAC*, *ACB*; but the angles *ACD*, *ACB* are equal (13. I.) to two right angles; therefore also the angles *CBA*, *BAC*, *ACB* are equal to two right angles. Wherefore, if a side of a triangle, etc. Q. E. D.

Playfair's Euclid (1843) Page 30

이등변삼각형 ABC에서 꼭지각 A의 이등분선과 밑변 BC의 교점을 D라고 할 때, $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분함을 증명하여라.

증명 [가정] △ABC에서

$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle BAD=\angle CAD$

[결론] $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

[증명] △ABD와 △ACD에서

$\overline{AB}=\overline{AC}$ (가정) ……①

$\overline{AD}$는 공통 ……②

$\angle BAD=\angle CAD$ (가정) ……③

①, ②, ③으로부터

$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ (SAS 합동)

따라서 $\overline{BD}=\overline{CD}$ ……④

$\angle ADB=\angle ADC$

그런데 $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$이므로

$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$

따라서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ……⑤

④, ⑤에 의하여 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분한다.

<그림 1> 고전적인 기하 교과서와 현 수학 교과서 기하 부분의 비교

이러한 변화의 원인은 현 수학 교과서가 《Eulcid원론》이 가지고 있는 수학적 엄밀성과 형식성을 완화시켜 교육적으로 건전한 출발점을 찾고자 하였던 여러 가지 시도를 반영하고 있다는 데 있다. 《Euclid원론》은 고대 그리스의 교육에서 가설 연역적 종합법의 입문서로, 수학적 진리가 영원하며 경험과 무관함을 설명해 주는 지도서로, 수학적 진리를 통해 이상향을 이해시키는 수단으로 간주되어([15]), 고유의 엄밀한 형식성을 보존한 상태로 교육에 이용되었다. 근대 이후에도 상당한 기간에 걸쳐 그 형태 그대로 중등학교 기하 교재로 사용되었다([8, pp.275-309], [14, pp.51-103]). 역사적으로, 《Euclid원론》은 다양한 교육적 비판의 대상이 되어 왔다. 그러한 비판은 비유클리드 기하학을 비롯한 여러 가지 기하학의 출현이나 Hilbert 공리계의 구성과 같은 수학 내적인 발전 과정에서 비롯되기도 하였으며, 18세기의 실학주의 교육 사조, 20세기 초의 수학교육 개혁 운동, 20세기 중반의 '새 수학' 운동과 같이 교육개혁의 실제와 긴밀하게 맞물려 이루어지기도 하였다([4, pp. 278-290]).

론》에서는 제 I권의 명제 4, 8, 26으로 나누어져 진술되고 있는([10]) 삼각형의 합동조건에 대한 명제가, 엄밀한 증명을 동반하지 않은 상태로 일종의 공준으로서 하나로 모아져 별도로 진술되고 있다([6]). 이는 증명되지 않는 명제를 최소화함으로써 아름다움을 추구하는 《Eulcid원론》과 구분되는 전개 방식으로서, 기하를 처음 배우는 아동에게는 이론전개의 아름다움을 느끼게 하기 보다는 필요한 명제를 일목요연하게 정리 제시하는 것이 교육적으로 더욱 중요하다는 문제 의식에서 비롯된 것으로 보인다.

5) 왼편의 교과서는 [13, p.147]에서 재인용하였으며, 오른편의 현 수학교과서의 출처는 [6, p. 41]이다.

현재 학교수학 [8-나] 및 [9-나] 단계의 수학교과서의 기하 부분을 살펴보면, 《Euclid원론》에서 비롯된 전통적인 기하교육의 모습과 그에 대한 반론에 기인한 새로운 형식을 동시에 찾아볼 수 있다. 개념을 명확히 정의하고, 가정을 명시적으로 드러내며, 결론을 연역하는 증명과정을 강조하는 모습과 2000여년 이상 기하교육의 주요 소재가 되어온 삼각형, 사각형, 원 등의 평면 도형의 성질에 관한 명제의 증명을 그 주요 내용으로 삼고 있는 것은 현재 학교수학에서 찾아볼 수 있는 전통적인 모습이다. 한편, 현 학교기하에서는 수직선을 사용하고, 선분의 길이와 도형의 넓이, 부피를 다루고 있다. 이는 산술을 기하에 결합시키는 형식으로 목하 살펴보게 될 Euclid 당시의 방법과 다르다. 또한, 《Euclid원론》에서는 명제 4, 8, 26으로 나누어져 진술되고 있는([6]) 삼각형의 합동조건에 대한 명제가 오늘날 하나로 모아져 별도로 진술되고 있는 것은 기하의 형식적 조직화를 완화시킬 필요가 있다는 Perry([12])의 주장을 수용한 것으로 볼 수 있다. 현재 중학교 교과서에서 '생활 속의 수학'을 통해([5], [6]) 기하학과 실생활 및 타 학문과의 관련성을 드러내고자 하는 것도 《Euclid원론》에서는 찾아볼 수 없는 시도([10])로 이 역시 학문의 응용성을 강조한 20세기 초 이래의 수학교육 개혁 운동의 정신을 받아들인 것으로 볼 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 현재 중학교 수학 교과서는 《Euclid원론》에 그 내용적 근원을 두고 전통적인 기하교육의 핵심인 증명 지도를 그 기본 목표로 하고 있는 동시에([1, p.74]), 전통적인 기하교육에 대한 비판적 논의를 수용하는 절충안의 모습을 띠고 있다.

전통적인 기하의 내용전개 방식 변화 중에서도 특히 기하 양 사이의 비례 관계는 Euclid 당시의 그것과 오늘날의 방법이 매우 큰 차이를 보이고 있다. 이러한 변화의 가장 근본적인 원인은, 1장의 논의를 통하여 드러나겠으나, 기하에서 비례론을 완전하게 다루기 위해서는 근본적으로 통약불가능한 양 사이의 관계를 설명하지 않을 수 없다는 데에 있다. Young([17, p.345])은 기하 양 사이의 비례 관계의 어려움에 대하여 논하면서 "통약 가능한 경우로 증명을 제한하고 다른 경우에 대해서는 근사적 접근법을 이용하여 그 관계를 인정하도록 하는" 비형식적 접근을 권고한 바 있다. 이러한 문제 의식은 1900년대 초의 중등 기하 교재의 저자들이 공유하고 있던 것으로서, Shibli ([13, p.126])에 의하면 1900년대 초 당시 대부분의 미국 교과서는 비례론을 원론 제 3권에 배치하고 순수한 대수적 비례론을 사용하였다. 이것은 학문적인 관점에서 볼 때 문제가 될 수 있으나, 교육적 관점에서 초심자에게는 적절한 것으로 여겨졌다. 그 결과, 교과서들은 점점 대수에서의 비례법칙을 간단하게 되새기는 정도로 비례론을 다루게 되었다. 이는 기하 양 사이의 '비례관계'를 초심자에게 이해시키는 데 상당한 난점이 존재하였다는 점을 시사한다.

본 논문은 기하 양 사이의 '비례관계'에 대한 내용 전개 방식의 역사적 고찰을 통하여 기하 양 사이의 비례관계의 교육적 난점을 추측하여 보고, 이상의 고찰로부터 중학교 기하 교육에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

1. 《Euclid원론》 의 비례론과 엄밀한 구적법(소진법消盡法)

《Euclid원론》 의 비례론은 그리스 수학의 논리적 결함을 해결하려는 과정에서 발생하였다. Gould([9, p.274])는 Pythagoras가 'Pythagoras의 정리'를 증명한 방법을 소개하면서, 그 방법이 직각삼각형의 닮음을 이용한 증명임을 밝혔다. Gould([9, pp.274-276])는 이 증명이 "같은 높이를 가지는 삼각형(의 넓이)은 그 밑변(의 길이)에 비례한다"는 《Eulcid원론》 제 VI권 명제 1에 의존하고 있음을 밝혀내고, Pythagoras가 이 제 VI권 명제 1을 통약 가능한 경우에만 해당되는 자신의 비례 개념을 사용하여 증명하는 오류를 범하였음을 밝혔다. Pythagoras의 비례 개념은 '통약 가능한' 경우에만 해당되는 정의로서, "정수 m 과 n 이 있어, $a=\frac{m}{n}b$ 이고 $c=\frac{m}{n}d$ 일 때 $a : b= c : d$라고 한다"는 것이다. 이 개념을 사용하여 "같은 높이를 가지는 삼각형(의 넓이)은 그 밑변(의 길이)에 비례한다"는 명제를 증명할 때[1], 밑변의 공통측도가 존재함을 가정하게 된다. 그러나 이것은 임의의 두 양(임의의 두 실수)의 비의 값을 유리수라고 가정한 것이므로 타당하지 않다.

직각이등변삼각형의 한 변과 그 대각선 사이에 공통측도가 없다는 발견으로 인해 그리스 수학자들은 큰 혼란을 겪었으며, 그 결과 통약불가능한 양을 처리하기 위한 방법론을 개발하고자 노력하였다. 그 결과는 기하 양 사이에 비례 관계에 대한 《Eulcid원론》 제 V권의 정의 (4), (5)를 통하여 살펴볼 수 있다.

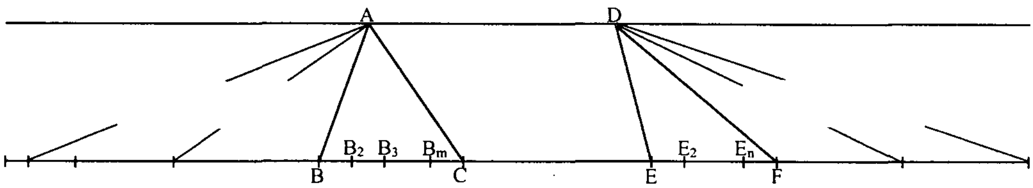
(4) 두 量 a 와 b 가 서로에게 比를 갖는다는 것은, $a<b$인 경우 적당한 N 이 존재하여 $Na>b$인 것이다.

(5) 量의 比 $a:b$ 가 $c:d$ 와 같다는 것은, 임의의 정수 M 과 N 에 대하여 $Ma>Nb$ 이면 $Mc>Nd$, $Ma=Nb$ 이면 $Mc=Nd$, $Ma<Nb$ 이면 $Mc<Nd$가 성립한다는 것이다([10]).

《Euclid 원론》 의 비례론에서 주목할 것은, 주어지는 두 양이 통약가능한가 통약불가능한가의 여부에 관계없이 이 개념을 적용할 수 있다는 것이다. 《Euclid 원론》 이

---

1) 증명의 줄거리는 다음과 같다. 아래 그림에서 볼 수 있는 바와 같이, 밑변 $\overline{BC}$, $\overline{EF}$에 공통측도가 존재한다고 가정하고 그 공통측도로 두 밑변을 등분할한다. 그 등분할한 선분과 꼭지점 A 와 D 로 만들어지는 삼각형들의 넓이가 모두 같으므로(Euclid원론 제 I권 명제 38에 해당) 같은 높이를 가지는 삼각형(의 넓이)은 그 밑변(의 길이)에 비례한다.



이와 같이 일반적인 모든 양에 대하여 성립하는 이론을 구축할 수 있었던 것은 부등식을 사용하여 간접적으로 비를 정의하였기 때문이다. 양의 비 $a:b$가 $c:d$와 같다는 것을 정의한 위의 정의 (5)를 다르게 표현하여 보면, 임의의 정수 M, N에 대하여 다음이 성립함을 의미한다.

$$\frac{a}{b} > \frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{N}{M}, \quad \frac{a}{b} = \frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{N}{M},$$
$$\frac{a}{b} < \frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d} < \frac{N}{M}$$

이를 좀 더 들여다보면 수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 서로 같다는 개념을 각각의 수보다 '큰 유리수의 집합', '작은 유리수의 집합', '같은 유리수의 집합'이 서로 완전하게 일치한다는 사실을 이용하여 정의한 것으로, 현대적인 관점에서 보면, 'Dedekind cut'을 이용한 실수의 정의와 본질적으로 유사한 것이라고 할 수 있다.

이와 같이 엄밀한 논의를 통해서도 기하 양 사이의 비례 관계의 문제는 완전히 해결되지 않는다. 위의 정의는 서로의 크기를 직접 비교할 수 있는 양, 결국 동질의 양 사이의 관계에 대해서만 적용되기 때문이다. 동질이 아닌 양의 경우에는 별도의 증명 과정을 통하여 그 비례 관계를 증명하여야 한다. 실제로, 《Eulcid원론》에서는 제 XII권 명제 2에서 원(의 넓이)이 그 지름 위의 정사각형(의 넓이)과 비례한다는 것을 소진법의 아이디어를 사용하여 보이고 있다. 이를 현대적인 기호를 사용하여 기술하면 다음과 같다.

이는 K, K'을 두 개의 원의 넓이라고 할 때 $K:K' = d^2:d'^2$를 증명하는 것이다. 여기서 d, d'는 두 원의 지름이다.

K에 내접하는 정사각형, 정팔각형, 정십육각형, ⋯, 정2^{n+1}각형, ...을 각각 X_1, X_2, X_3, ⋯, X_n, ⋯ 이라 하고, 이것에 대응하여 원 K'에서 Y_1, Y_2, Y_3, ⋯, Y_n, ⋯을 만든다. X_i, Y_i가 각각 그 정다각형의 넓이를 나타낸다고 하면, ·

$$\begin{cases} X_1 < X_2 < \cdots < X_n < \cdots < K \\ Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n < \cdots < K' \end{cases} \quad \cdots \quad (1)$$

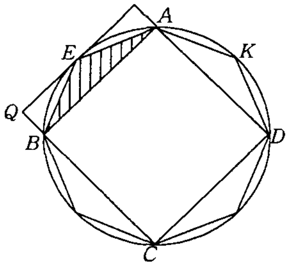
가 성립한다. 원 K에 있어서 $\widehat{AB}$ 등의 중점을 취하여 정팔각형(X_2)을 만들면

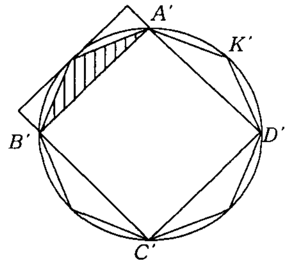
$\triangle AEB$(의 넓이) < 활꼴 AB(의 넓이) < AB를 변으로 하는 직사각형 Q(의 넓이)가 된다.

여기서 Q(의 넓이) $= 2\triangle AEB$(의 넓이)이므로

$$\triangle AEB(\text{의 넓이}) < \text{활꼴 } AB(\text{의 넓이}) < 2\triangle AEB(\text{의 넓이})$$

가 된다.





<그림 2> <그림 3>

따라서 $\triangle AEB$(의 넓이) $> \frac{1}{2}$ 활꼴 AB(의 넓이) 가 성립한다.

또한 $\triangle AEB$(의 넓이) $= \frac{1}{4}(X_2 - X_1)$, 활꼴AB(의 넓이) $= \frac{1}{4}(K - X_1)$ 이므로 위 식으로부터

$$X_2 - X_1 > \frac{1}{2}(K - X_1)$$

가 성립한다.

마찬가지 방법으로 임의의 n에 대해서

$$\begin{cases} X_n - X_{n-1} > \frac{1}{2}(K - X_{n-1}) \\ Y_n - Y_{n-1} > \frac{1}{2}(K' - Y_{n-1}) \end{cases} \quad \cdots \quad (2)$$

또한,

$$X_n : Y_n = d^2 : d'^2 \quad \cdots \quad (3)$$

이 성립한다.

이제 조건 (1), (2), (3)에 기초하여 $K : K' = d^2 : d'^2$을 증명하자. 즉, 남은 과정은 간접증명법을 사용하여 $K : K' = d^2 : d'^2$이 성립하지 않는 경우에 대하여 모순을 이끌어 내는 것이다.

만약 $d^2 : d'^2 = K : K'$이 성립하지 않는다면 $d^2 : d'^2 = K : V$ 와 같은 새로운 비가 성립하여야 한다. 그러면 이 V에 대해서

(i) $V < K'$ (ii) $V > K'$ (iii) $V = K'$

중 적어도 하나가 성립할 것이다.

우선 $V < K'$라고 하자. 가정으로부터

$$X_n : Y_n = d^2 : d'^2 = K : V \ \ (V < K') \quad \cdots \quad (4)$$

그런데 가정 (2)와 원론의 제 X권 명제 1로부터2),

2) 현대적인 관점에서 진술하면, '두 양(量) a와 b가 주어졌을 때($a > b$), 큰 양 a로부터, $\frac{a}{2}$

$$K' - Y_N < K' - V$$

가 되는 자연수 N이 존재한다는 것을 알 수 있다. 이것으로부터 $Y_N > V$가 성립하고, 이것과 (4)로부터 $X_N > K$가 성립하는데 이는 조건 (1)에 반한다. 따라서 $V < K'$은 성립하지 않는다.

다음으로 $V > K'$라고 하자. 그러면 $V : K = K' : U$를 만족하는 U를 정할 수 있다. 이 때 가정 $K' < V$로부터 $U < K$가 나온다. 그러면 첫 번째 경우와 마찬가지 이유로

$$K - X_{N'} < K - U$$

가 되는 자연수 N'이 존재한다. 따라서

$$X_{N'} > U$$

라고 할 수 있다. 이것과 비례식

$$Y_n : X_n = d'^2 : d^2 = V : K = K' : U$$

으로부터 $Y_{N'} > K'$가 성립하는데 이것은 조건 (1)에 반한다. 따라서 $V > K'$도 될 수 없다.

위의 두 경우가 모순이므로 $V = K'$가 성립한다.

따라서 $d^2 : d'^2 = K : K'$가 증명된다. ■

이상과 같은 Euclid의 방법은, 그 교육 대상을 중학교 학생으로 제한하였을 경우, 정의 및 증명의 진술이 매우 난해하며, 증명 과정이 지나치게 장황하다. 다음에서는 《Euclid원론》의 내용 전개 방법에 대한 교육적 대안으로서, 산술을 도입하여 기하양 사이의 비례 관계에 대한 논의를 간략하게 만든 Legendre의 논의를 살펴보자.

2. Legendre의 비례론과 그에 따른 기하교재의 변화

《Euclid원론》을 기본적인 텍스트로 하는 교육에 대한 비판적 논의는, 초보자를 위한 별도의 기하 입문과정의 도입에 관한 논의와 《Euclid원론》 교육에 대한 전면적인 비판을 통하여 새로운 교육적 대안을 창출하고자 하는 논의로 구분할 수 있다. 전자의 논의는 완숙한 지성을 지닌 성인이 《Euclid원론》을 학습하는 사태와 지적 발달이 완결되지 않은 아동이 이를 배우는 사태가 매우 다름에 주목하면서, 초보자를 위한

보다 큰 양(量) x_1을 a에서 빼서, $a-x_1$을 만든다. 이후 남은 $a-x_1$으로부터 $x_2-x_1 > \frac{a-x_1}{2}$가 되는 x_2-x_1을 빼고, $a-x_2$를 만든다. 이러한 과정을 반복하면 $a-x_N < b$가 성립하는 자연수 N이 존재한다'는 것이다. 이는 아르키메데스의 원리에 기초한다([10]).

《Euclid원론》의 교육적 '보완'에 집중한다. 예컨대, 논증기하를 도입하기에 앞서 '기하입문'을 통하여 여러 가지 도형과 그 성질에 친숙하게 한다거나, Treutlein과 같이 전통적인 논증기하에 대응되는 '직관기하'3)의 개설을 제안하는 것이다.

이와는 달리 후자의 논의는 새로운 텍스트의 저술로 이어진다. 18세기에 접어들면서 유럽의 여러 국가에서는 특히 프랑스를 중심으로, Euler와 가까이 지냈던 Louis Bertrand의 기하 교재, 20세기 초까지 널리 사용된 Lacroix 교재, 그리고 Bézout의 교재 등 새로운 기하 교재가 저술되었다. 이러한 교재 중에서 최고의 찬사를 받은 것은 '기하에 대한 엄밀한 전개'라는 입장을 고수하면서도 교육적으로 건전하다는 평가를 받은 Legendre(1794)의 기하교재4)이었다([7]).

Legendre의 교과서가 유럽과 미국에서 널리 사용된 이유는 Euclid에 비하여 볼 때는 상대적으로 논리보다는 직관에 의존하는 경향을 가지고 있기 때문이었다. 예를 들어, Legendre는 Euclid와 달리 통약불가능성에 대해 산술에서 유리수와 무리수를 차용하여 선분 사이의 길이 비에 있어서 유리수에 대하여 참인 정리는 무리수에 대해서도 참인 것으로 가정하였다.

Legendre의 《기하학 원론》에는 다음과 같은 비의 정의가 제시되어 있다.

1. 하나의 양의 같은 종류의 다른 양에 대한 비란 두 번째를 첫 번째로 나눈 몫이다. 전자의 양을 전항, 후자를 후항이라고 부른다.

2. 비례식은 같은 두 비 사이의 등식이다. 즉, $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$ 는 B에 대한 A의 비가 D에 대한 C의 비와 같다는 것을 표현한다. 기하에서 비례식은 A : B :: C : D 라고 표현하고, 이를 A 대 B 는 C 대 D와 같다고 읽는다.([11, p.50]).

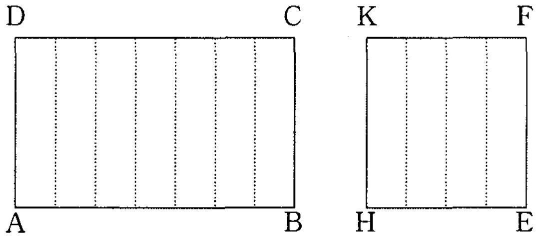
이와 같이 Legendre는 수의 비와 (동질인) 기하 양 사이의 비를 동일시하고, 그 관계에 '비례식'이라는 산술적 도구를 도입하였다. 이와 같은 가정은 오늘날 학교기하의 바탕을 이루고 있다. 이러한 가정을 통하여 우리는 선분의 비와 삼각형의 면적 사이의 비 등 기하 양 사이의 비례 관계를 수의 비와 등일시 할 수 있게 된다. 그런데, Legendre의 논의에서 주목할 점은 동질이 아닌 기하 양 사이의 관계에 있어 통약 가능한 경우와 통약 불가능한 경우를 엄격하게 구분하여 이를 각각 증명하고 있다는 점이다. 이와 같은 방법을 사용하는 이유는 위의 '가정 1'로부터 동질이 아닌 양 사이의 비례 관계가 곧바로 따라 나오지 않기 때문이다.

동질이 아닌 기하 양 사이의 비례 관계에 대한 Legendre의 내용 전개 방법은 높이가 같은 직사각형의 넓이가 밑변(의 길이)에 비례한다는 것을 증명하는 다음의 논의

3) '직관기하'는 도형에 대한 '내부직관(Anschauung)'의 형성과 공간직관의 형성 그 자체의 교육적 가치를 추구하고 있다는 점에서 기하입문과 구분된다([4, p.280]).

4) Legendre의 교과서는, 널리 알려지고 사용된 기하 교재 중에서는, 《Euclid 원론》이 가지고 있던 틀을 깬 최초의 교과서이다([16, p. 3]).

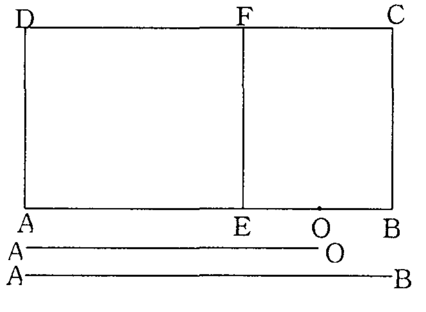
를 통하여 알 수 있다. 다음의 증명은 Legendre의 방식을 따른 것으로, 통약 가능한 경우에서 통약 불가능한 경우로 확장하는 전형적인 방식을 보여준다. 이 논증은 크게 다음 두 단계로 나누어진다.



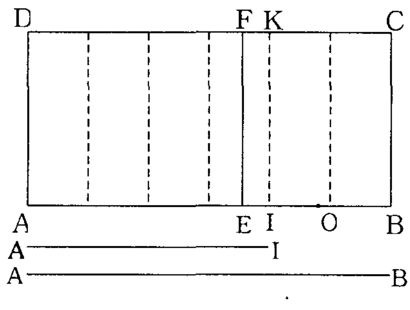
<그림 4>

(1) 먼저 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $HEFK$가 그 높이 AD와 HK가 같고, 그 밑변 AB와 HE가 통약가능하다고 가정하면, 각 직사각형을 높이가 AD 및 HK와 같은 동일한 직사각형으로 분할하여 직사각형의 넓이가 그 밑변의 길이에 비례함을 증명할 수 있다(<그림 4> 참조).

(2) 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $HEFK$가 그 높이 AD와 HK가 같고, 그 밑변 AB와 HE가 통약 불가능한 경우, 간접증명법을 사용하여 직사각형의 넓이가 그 밑변의 길이에 비례하는 것을 증명할 수 있다. 우선 직사각형 $HEFK$를 점 H가 점 A와 일치하고 점 E가 점 D와 일치하도록 직사각형 $ABCD$에 겹쳐 놓는다. 이제 밑변 AB와 HE의 비와 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $HEFK$의 비가 다르다고 하자. 이 때 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $HEFK$의 비와 AB와 AO의 비가 같도록 하는 점을 O라고 하고 이를 직선 AB 위에 잡는다. O 가 EB 사이에 오는 경우만 증명하면 충분하므로, 그 경우만 증명한다(<그림 5> 참조).



<그림 5>



<그림 6>

이제 AB를 EO의 길이보다 '작은' 길이를 가지는 선분으로 등분할 한다. 그렇게 되면 그 등분할로 인하여 생기는 어떤 한 점 I는 E와 O 사이에 놓이게 된다. 이제 점 I에서 AB에 수직인 방향으로 수선을 그어 CD와 만나는 점을 K라고 하면 직사각형 $AIKD$가 만들어진다(<그림 6> 참조).

그렇게 되면 (1)에 의하여 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $AIKD$의 비는 AB와 AI의 비와 같게 된다. 그런데 위에서 직사각형 $ABCD$와 직사각형 $HEFK$의 비와 AB와 AO의 비가 같도록 하는 점을 O라고 하였으므로 결국 $AEFD$와 $AIKD$의 비가 AO와 AI의 비와 같게 된다. 이 때 $AIKD$가 $AEFD$보다 크므로 결국 AI가 AO보다 커야하는데 이는 모순이다. ■

Legendre([11])는 이러한 방법을 원의 중심각과 호의 비례 관계에 대해서도 적용하고 있다. Legendre의 이러한 논의는 산술의 구조를 기하로 가져와도 간접증명법을 사용하거나 소진법에 해당하는 아이디어를 사용하여 해결하여야 하는 문제가 여전히 남아있음을 말해준다. 이는 오늘날의 학교수학의 상황과 동일하다. 서로 동질이 아닌 기하 양의 경우는 그 중 하나의 양을 몇 배(倍)하더라도 다른 양과 비교할 수 없기 때문이다. 오늘날 학교수학에서는 고대에서 근대에 이르기까지 사용되었던 바, 간접적인 비례관계 정의 방법, 소진법, Legendre의 방법과 같은 방법을 사용하지 않는다. 이러한 문제를 해결함에 있어 현 수학 교과서가 사용하는 방법은 양 사이의 비례관계에 대한 일종의 공준을 가정하거나 직관적인 수준에서 이해시키는 것이다. 다음 절에서는 이에 대하여 좀 더 자세하게 살펴보자.

3. 현 초·중등 수학 교과서[5])에서의 비례관계

오늘날 학교수학에서 기하 양 사이의 관계는 '기하 양 사이의 관계를 '수' 사이의 관계에 대응시킬 수 있다는 일종의 '공준[6]'을 가정하여 다루어지고 있다. 학교수학에서 다루어지는 기하 양 사이의 관계는 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫 번째는 선분과 선분, 각과 각, (다각형의) 넓이와 (다각형의) 넓이 등과 같은 동질의 양 사이의 비례관계이다. '수직선', '선분의 길이', '각의 크기', '다각형의 넓이'라는 용어는 모두 기하 양에 수를 대응시킬 수 있다는 일종의 공준이 가정되어있다는 증거가 된다. '선분'을 정의하고 '선분의 길이'를 단위 길이로 설명하는 것은 [2-가] 단계 교과서에서 찾아볼 수 있다. 먼저 선분을 '두 점을 곧게 이은 선'으로 정의하고([2, p.33]), 길이의 측정을 다루면서 단위 길이의 개념을 '뼘의 길이와 같이 어떤 길이를 재는 데 기준이 되는 길이'로 도입한다([2, p.71]). 이후 단위 길이를 통일할 필요성에 대하여 논의하면서 1cm를 표준 단위 길이로 도입하여 선분의 길이와 수를 대응시키고 있다.

두 번째는 동질이 아닌 양 사이의 관계로, (1) 닮은 도형에 있어 선분의 길이의 제

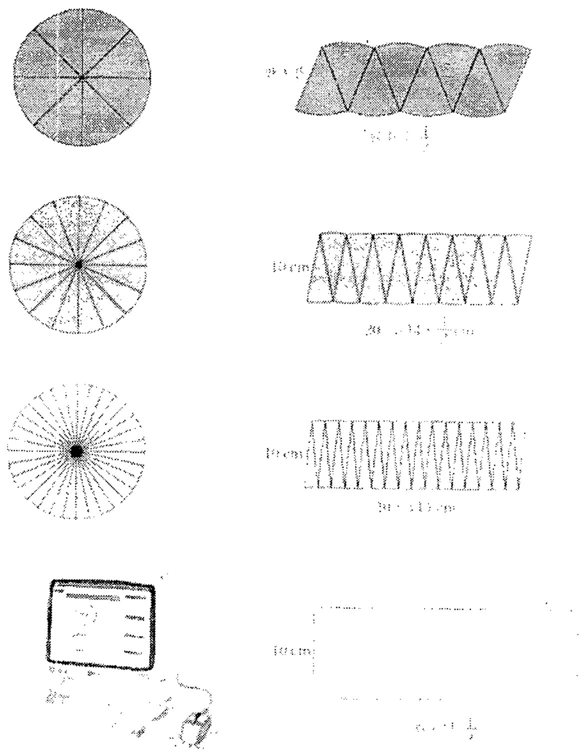
5) 제 7차 수학과 교육과정에 의한 수학 교과서를 의미한다.

6) 여기서 '공준'이라는 말은 '증명되지 않고 사용되는 명제'라는 의미로 사용되었다. 이는 수학 이론에서 사용되는 '공준'의 의미 중 일부만을 담고 있으므로 엄밀한 의미에서의 '공준'이라고는 볼 수 없다.

곱과 넓이의 비례관계 (2) 원의 중심각(또는 원주각)과 호의 길이의 관계, (3) 원의 반지름의 길이의 제곱과 원의 넓이의 비례관계 등이 있다. 이를 다루는 방법은 통약 가능한 경우, 그 중에서도 하나가 다른 하나의 2배, 3배, 4배가 되는 간단한 경우를 다루어 보여주고 일반적인 경우에 대해서는 그 관계를 일종의 약속으로 받아들이는 방법((1), (2)의 경우)과 직관적인 수준의 극한방법((3)의 경우)을 사용하는 것이다.

예를 들어 현 중학교 수학 교과서([5, p.86])에서는 원의 중심각과 호의 길이의 비례관계를 전개할 때, 우선 같은 중심각을 가지는 호의 길이가 같음을 보여주고, 이를 이용하여 중심각이 2배, 3배, 4배가 되는 경우는 어떻게 되겠는지 물어보고, 곧바로 이를 일반적인 경우로 확장하여 제시하는 방법을 사용하고 있다. 이러한 전개 방식은 중심각 사이의 비가 통약 불가능한 경우에 대한 언급을 피한 채 일반적인 모든 비에 대하여 성립하는 것으로 가정하는 방식이라고 할 수 있다.

한편, 원의 반지름의 길이와 원의 넓이 사이의 관계, 곧 원의 반지름의 길이의 제곱과 원의 넓이 사이의 비례 관계는 [6-나 단계]([3, pp.63-64])에서 다음과 같은 그림을 이용하여 직관적인 극한 방법으로 전개된다. 이러한 전개방법은 직사각형과 그 근사도형 사이의 오차가 0으로 수렴함을 보여주는 핵심적인 과정이 생략된 직관적인 극한 방법이다.



<그림 7> ([3, p.63])

4. 요약 및 결론

《Eulcid원론》에서 비례관계는 통약 불가능한 경우로 인하여 발생하는 문제를 제거하여 일반적으로 모든 종류의 기하 양 사이에서 성립하도록 하기 위하여 부등식을 사용하여 간접적으로 비를 정의하고, 원의 넓이와 반지름의 제곱 사이의 비례 관계를 보여주기 위하여 소진법을 사용하는 엄밀한 전개방식을 고수하였다. 그 후 그러한 간접적인 방식으로 정의된 비의 정의로 인하여 생기는 어려움을 피하기 위하여 Legendre에 이르러 선분(의 길이)과 선분(의 길이), 각(의 크기)과 각(의 크기) 사이의 비에 대하여 수가 대응될 수 있는 것으로 보았으며, 이는 오늘날 학교수학의 기본 입장이 되어 오고 있다.

한편, 직사각형의 넓이가 가로의 길이와 세로의 길이의 곱임을 Legendre는 통약 가능한 경우와 통약 불가능한 경우로 나누어 엄밀하게 증명하였다. 그러나, 현 교육과정에서 동질이 아닌 양 사이의 관계를 다루게 되는 초등학교 교과서나 중학교 교과서에서는 특수한 경우를 보여주고 이를 일반적인 경우에 대하여 성립하는 것으로 받아들이도록 하는 방법이나 직관적인 극한방법을 사용하여 정당화함으로써 사실상 일종의 공준처럼 취급하는 전개 방식을 취하고 있다. 이와 같은 학교수학의 내용 전개 방식은 통약불가능성의 문제를 정식으로 다루며 소진법이나 간접증명법을 사용하여 전개하는 《Euclid원론》이나 Legendre의 교재의 구성 방식과 다른 것이다.

오늘날의 학교수학에서 기하 양 사이의 비례 관계의 문제를 이와 같은 방식으로 다루고 있는 것은 Euclid나 Legendre의 방법을 그대로 학교수학에 도입하는 것이 교육적 난점을 가지고 있기 때문이다. 전술한 바와 같이 《Euclid원론》에 기반한 전통적인 기하교육은 교육적으로 많은 비판을 받아왔고 이에 따라 현 기하 교과서 저자들은 학문적 엄밀성을 완화하여 교육적으로 건전한 출발점을 찾는 방법을 모색하여 왔으며, 현 기하 교과서는 이러한 고심의 결과물일 것이다. 1장에서 고찰한 바와 같이 기하 양 사이의 비례관계를 이론적으로 연구하게 된 데에는 통약불가능한 양에 대한 고찰이 중대한 영향을 미쳤으며, 이를 위하여 현대적인 관점에서 살펴볼 때에도 엄밀하다고 할 수 있는 방법으로 '비'를 정의하고 기하 양 사이의 비례관계를 다룬 바 있다. 이는 교육 내용의 교수학적 변환에 대한 전문가가 되어야 하는 교사가 일반적 비례관계 대하여 깊이 이해하고 있어야 함을 시사한다. 만약 학생이 현재의 교육 내용에 대하여 의문을 제기하거나 좀 더 심도 있는 학습을 요구할 경우 그 의문의 해소나 요구의 충족을 위해서는 교사가 현 교육과정이 '뒤'에 숨어있는 교육과정의 변천과정을 충분히 이해하고 있을 필요가 있기 때문이다. 교사는 특히, 고대 그리스의 비례론이 그리스 수학의 논리적 결함을 해결하려는 과정에서 발생하였다는 점과 동질이 아닌 기하 양 사이의 비례 관계는 '산술'을 기하에 도입한다고 하여 완전히 설명될 수 없다는 사실을 이해하고 있어야 한다. 이 두 문제는 그 증명 과정에서 통약불가능한 경우가 핵심적인 역할을 하는 바, 통약불가능한 경우에 대한 심도 있는 고찰을 통해서만 이

해될 수 있다. 이를 통해서만 '높이가 같은 직사각형의 넓이는 밑변(의 길이)에 비례한다'는 명제와 같이 일종의 공리에 해당되는 명제에 대하여 아동이 겪게 될 가능성이 있는 여러 가지 인지적 갈등을 사전에 인지하여, 아동이 이후 이를 이론적으로 이해할 준비가 되었을 때 그 이해를 도와 줄 수 있을 것이다. 본 논문은 기하 양 사이의 '비례관계'에 대한 현 교육과정의 내용 전개의 이면에 어떠한 것이 숨어있는지를 밝히는 하나의 기초 자료를 제공한다는 의의를 가지고 있다. 한편 본 연구는 학생이 실제로 겪게 되는 인지적 갈등이 무엇인지를 정확하게 밝히고 그에 대한 교육적 조처로는 구체적으로 어떠한 것이 필요한지를 명확하게 밝히지는 못하고 있다는 점에서 한계를 가진다. 이상의 연구를 기하 양 사이의 비례관계에 대한 좀 더 체계적인 교육 연구로 발전시켜 갈 필요가 있을 것이다.

참고 문헌

1. 교육부, **수학과 교육과정 (별책 8)**. 서울: 대한 교과서 주식회사, 1997.
2. 교육인적자원부, **수학 2-가**. 서울: 대한교과서, 2000.
3. 교육인적자원부, **수학 6-나**. 서울: 대한교과서, 2002.
4. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대 출판부, 1998.
5. 조태근 외 4인, **중학교 수학 7-나**. 서울: 금성출판사, 2001.
6. ___________, **중학교 수학 8-나**. 서울: 금성출판사, 2002.
7. Cajori, F., *Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry*. The American Mathematical Monthly 17(1910), No. 10, 181-201.
8. ________, *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. London: Macmillan., 1924.
9. Gould, S. H., *Origins and development of concepts of geometry*. Insights into Modern Mathematics(1957), 273-305.
10. Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, New York: Dover Publications, 1956.
11. Legendre, A. M.. *Elements of geometry and trigonometry, adapted by Davies, C.*, New York: A. S. Brandes & CO., 111&113 William Street, 1866.
12. Perry, J.. *The teaching of mathematic*. Discussion on the Teaching of Mathematics (1902) [held at the British Association Meeting, Glasgow, 1901], 221-245.
13. Shibli, J., *Recent development in the teaching of geometry*. The Maple Press Company, 1932.

14. Stamper, A. W., *A history of the teaching of elementary geometry*. New York: AMS press, 1909.
15. Steiner, H. G., *Two kinds of "Elements" and the dialectic between synthetic-deductive and analytic-genetic Approaches in Mathematics*. For the Learning of Mathematics, 8(1988), No. 3, 7-15.
16. Wilson, W. W., *The mathematics curriculum: Geometry*. Schools Council Publications, 1977.
17. Young, J. W. A., *The teaching of mathematics in the elementary and the secondary School*. Longmans, Green and Co., 1927.

A review on the change of content and method of geometry in secondary school with a focus on the proportional relations of geometric figures

Science Education Research Center, Gyeongin National University of Education **Seok Il Kwon**
Department of Mathematics Education, Konkuk University **Jin Kon Hong**

The content and method of geometry taught in secondary school is rooted in 'Elements' by Euclid. On the other hand, however, there are differences between the content and structure of the current textbook and the 'Elements'. The gaps are resulted from attempts to develop the geometry education. Specially, the content and method for the proportional relations of geometric figures has been varied. In this study, we reviewed the changes of the proportional relations of geometric figures with pedagogical point of view. The conclusion that we came to is that the proportional relations in incommensurable case is omitted in secondary school. Teacher's understanding about the proportional relations of geometric figures is needed for meaningful geometry education.

Key words: geometry, geometry education, Euclid's Elements, geometry text, proportional relation, incommensurableness.

2000 Mathematics Subject Classification: 97U20

ZDM Subject Classification: F73

논문 접수: 2006년 4월 7일, 심사 완료: 2006년 5월