

처짐각법을 이용한 선형부재의 탄소성 좌굴해석

Elasto-Plastic Buckling Analysis Based on the Slope-Deflection Method

정 명 채*

Cheong, Myung-Chae

요 약

본 논문은 처짐각법을 사용하여 탄소성 좌굴 기본식을 유도하고 이를 타당성을 검증하고 있다. 이와 함께 이 개념을 사용하여 구조해석 할 수 있는 탄소성좌굴해석 요소를 정식화 하는 방법도 함께 설명하고 있다. 이 요소는 요소 양단에 탄소성 거동을 표현하는 스프링을, 요소 중앙부는 선형좌굴을 표현하는 스프링을 각각 설정하여 실제 부재의 탄소성 좌굴거동을 표현하도록 설계되어 있다. 또한 이 방법이 통상의 기하강성 매트릭스를 사용한 방법과 비교하여 어떠한 장점이 있는지를 분석하고 있다.

Abstract

Fundamental equations of a member to analysis the elasto-plastic buckling analysis based on the deflection method are derived in this paper, and its validity and accuracy are shown by the numerical examples. The model discussing in the present paper has three elasto-plastic springs which are located at the both ends and center of a member and two elastic beam elements between them. The elasto-plastic springs represent the elasto-plastic behavior of the member and elastic beam element represents buckling behavior of the member. Numerical example shows the validity of this formulation.

키워드 : 탄소성 좌굴, 래티스 돔, 처짐각법, 극한하중, 좌굴하중, 내력

Keywords : Elastoplastic buckling, Latticed dome, Slope-deflection method, ultimate load, buckling load, load bearing capacity

1. 서 론

골조의 기둥이나 래티스 돔을 구성하는 파이프 부재등의 설계에서는 축력이 중요한 설계변수가 될 수 있다. 특히, 대경간을 구성하기 위하여 파이프 부재로 지붕을 형성하는 돔과 같은 구조에서는 외력에 대해 구성부재의 축 응력으로 저항하게 되고, 축력이 극한상태에 도달하면 좌굴이 발생할 수 있다. 좌굴이 발생하게 되면 구조물이 취성적으로 붕괴될 염려가 있으므로 좌굴은 매우 중요한 설계변수가 된다. 따라서 이들 구조물의 설계과정에는 좌굴내력을 검토할 필요가 있다. 구조물이 가지고 있는 구조 역학적 특성 또는 하중의 특성에 따라 달라

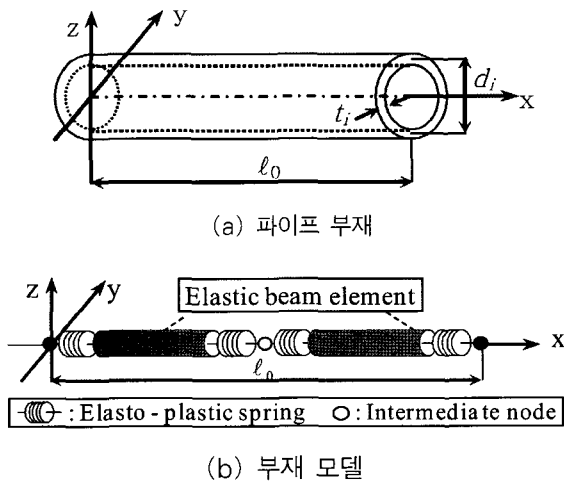
질 수는 있으나 일반적으로는 좌굴내력의 검토는 탄소성 좌굴해석을 필요로 한다.

탄소성 좌굴해석은 유한요소법으로도 가능하다. 유한요소법은 재료모델로 볼 수 있으며, 실제의 거동을 분석하기 위해서는 부재를 많은 수의 해석요소로 분할하여야 하고, 이것은 결국 탄소성좌굴 해석에 많은 시간과 노력을 동반하게 된다.

유한요소법과 같은 재료모델을 사용하는 해석의 문제점을 해결하면서 설계에 요구되는 정확도를 유지하는 모델로 부재모델이 있다. 부재모델을 사용한 비선형 해석은 앞에서 지적한 재료모델의 문제점을 해결할 수 있는 대안이 될 수 있다.

본 논문은 일반 보(보-기둥 부재)를 부재모델로 탄소성좌굴 해석을 한다는 가정하에 이를 위한 기본식을 유도하고 수치해석 예를 통하여 유용성을 검증한다.

* 정희원, 전주대학교 건축공학과 부교수, 공학박사
HP : 019-615-2328
E-mail : syrius@jeonju.ac.kr



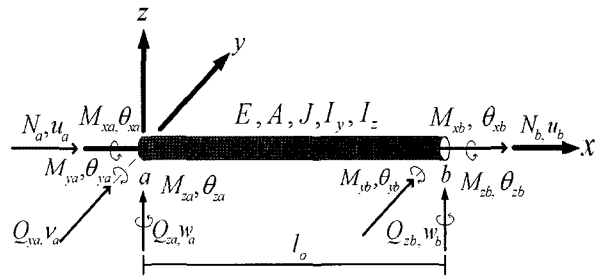
<그림 1> 부재의 모델화 개념도

2. 부재 및 모델화

부재모델을 전제로 한 일반 보 부재의 기본식을 유도하기 위하여 <그림 1(a)>와 같은 파이프 부재를 생각하자. 여기서 다루는 기본식은 부재가 외력을 받아 탄소성 좌굴 거동하는 경우를 상정하여 모델화한다. 먼저 해석의 정밀도를 높이기 위하여 <그림 1(b)>와 같이 1 부재를 2개의 요소로 분할하여 분할된 각 요소의 양단에는 탄소성 스프링을 설치하고 이들 스프링 사이에는 탄성 보가 있는 것으로 가정한다. 탄성 보 요소는 부재의 재료탄성 및 좌굴 거동을 표현하며, 탄성 보 요소의 양단부에 설치된 탄소성 스프링 요소는 부재의 소성거동을 표현하는데 사용한다. 이는 일반적으로 부재의 소성 거동이 부재양단에 집중되는 현상을 설명하기 위한 것이다. <그림 1>의 l_0 는 부재의 길이를 의미한다. 또 t_i, d_i 는 각각 파이프 부재의 두께 및 직경을 나타낸다. 이 부재가 절점에서 강점 되는 경우에 강점된 부분의 강성이 부재에 비해 상대적으로 커서 강체 거동할 경우, 부재의 양단에 배치된 소성 스프링 외부측에 강역을 설정할 수도 있다.

2.1 탄성요소의 응력-변형도 관계식

본 논문에서 사용하는 응력 및 변위의 정의를 그림 2와 같이 정의한다. 부재의 탄성계수, 단면적,



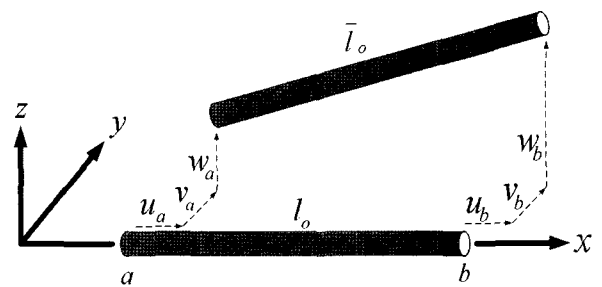
<그림 2> 탄성 보 요소의 응력, 변위의 정의

x, y, z 축의 단면2차 모멘트를 각각 E, A, J, I_y, I_z 라고 한다. 또, N, M_x, M_y, M_z 는 각각 축력, x 축, y 축, z 축 둘레의 휨 모멘트를, Q_y, Q_z 는 전단력을 표시하며 이에 대응하는 변위는 $u, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ 및 v, w 로 표시한다.

2.1.1 축력-변위 관계

선형부재가 압축력을 받아 발생하는 좌굴 현상을 고려하기 위해서는 정식화 과정에 기하학적 비선형 관계를 포함하여야 한다. Hook의 법칙에 따르면 $\sigma = E \cdot \varepsilon$ 과 $\sigma = Q_a/A$ 이므로 다음 식이 성립한다.

$$Q_a = -EA\varepsilon, \quad Q_b = EA\varepsilon \quad (1)$$



<그림 3> 축력-변위 관계

한편 변형전의 부재의 길이를 l_0 변형후의 부재 길이를 \bar{l}_0 라고 할 때, 변형도는 다음 식으로 정의된다.

$$\varepsilon = (\bar{l}_0 - l_0)/l_0 \quad (2)$$

여기서 변형후의 부재 길이 \bar{l}_0 는 다음 식으로 표시된다.

$$\bar{l}_0 = l_0 \left[1 + \left(\frac{u_b - u_a}{l_0} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_b - u_a}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{v_b - v_a}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{w_b - w_a}{l_0} \right)^2 \right] \right] \quad (3)$$

(3)식을 (2)식에 대입하여 축방향 변형도를 구하고 이를 사용하여 축력-변형도 관계식을 다음과 같이 구한다.

$$N_a = -N_b = -EA \left[\frac{u_b - u_a}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_b - v_a}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_b - w_a}{l_0} \right)^2 \right] \quad (4)$$

2.1.2 전단력-변위, 모멘트 회전각 관계

처짐각법을 이용하여 3차원 공간상에서 부재 좌단에서부터 부재축 방향으로 임의의 거리 x 만큼 떨어진 지점에서 휨 모멘트의 평형 관계식을 구하면, 부재 단부에서의 휨 모멘트-회전각, 전단력-변위 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q_{ya} = \frac{2EI_z}{l_0^2} (2A_z + B_z) (\theta_{za} + \theta_{zb}) - \left[\frac{4EI_z}{l_0^3} (2A_z + B_z) - \frac{N_a}{l_0} \right] (v_a - v_b) \quad (5a)$$

$$Q_{yb} = -\frac{2EI_z}{l_0^2} (2A_z + B_z) (\theta_{za} + \theta_{zb}) + \left[\frac{4EI_z}{l_0^3} (2A_z + B_z) - \frac{N_a}{l_0} \right] (v_b - v_a) \quad (5b)$$

$$Q_{za} = -\frac{2EI_y}{l_0^2} (2A_y + B_y) (\theta_{ya} + \theta_{yb}) - \frac{4EI_y}{l_0^3} \left[(2A_y + B_y) + \frac{N_a}{l_0} \right] (w_b - w_a) \quad (5c)$$

$$Q_{zb} = \frac{2EI_y}{l_0^2} (2A_y + B_y) (\theta_{ya} + \theta_{yb}) + \frac{4EI_y}{l_0^3} \left[(2A_y + B_y) + \frac{N_a}{l_0} \right] (w_b - w_a) \quad (5d)$$

$$M_{ya} = \frac{2EI_y}{l_0} (2A_y \theta_{ya} + B_y \theta_{yb}) + \frac{EI_y}{l_0^2} (2A_y + B_y) (w_b - w_a) \quad (5e)$$

$$M_{yb} = \frac{2EI_y}{l_0} (B_y \theta_{ya} + 2A_y \theta_{yb}) + \frac{2EI_y}{l_0^2} (2A_y + B_y) (w_b - w_a) \quad (5f)$$

$$M_{za} = \frac{2EI_z}{l_0} (2A_z \theta_{za} + B_z \theta_{zb}) - \frac{2EI_z}{l_0^2} (2A_z + B_z) (v_b - v_a) \quad (5g)$$

$$M_{zb} = \frac{2EI_z}{l_0} (B_z \theta_{za} + 2A_z \theta_{zb}) - \frac{2EI_z}{l_0^2} (2A_z + B_z) (v_b - v_a) \quad (5h)$$

여기서 A_y, B_y, A_z, B_z 는 각각 축력이 압축인 경우에는 다음 식과 같고,

$$A_y = \frac{1}{4} \left[\frac{Y(\sin Y - Y \cos Y)}{2(1 - \cos Y) - Y \sin Y} \right] \quad (6a)$$

$$B_y = \frac{1}{2} \left[\frac{Y(Y - Y \sin Y)}{2(1 - \cos Y) - Y \sin Y} \right] \quad (6b)$$

$$A_z = \frac{1}{4} \left[\frac{Z(\sin Z - Z \cos Z)}{2(1 - \cos Z) - Z \sin Z} \right] \quad (6c)$$

$$B_z = \frac{1}{2} \left[\frac{Z(Z - \sin Z)}{2(1 - \cos Z) - Z \sin Z} \right] \quad (6d)$$

축력이 인장일 때는 다음 식과 같다.

$$A_y = \frac{1}{4} \left[\frac{Y(\sinh Y - Y \cosh Y)}{2(1 - \cosh Y) + Y \sinh Y} \right] \quad (7a)$$

$$B_y = -\frac{1}{2} \left[\frac{Y(Y - \sinh Y)}{2(1 - \cosh Y) + Y \sinh Y} \right] \quad (7b)$$

$$A_z = -\frac{1}{4} \left[\frac{Z(\sinh Z - Z \cosh Z)}{2(1 - \cosh Z) - Z \sinh Z} \right] \quad (7c)$$

$$B_z = -\frac{1}{2} \left[\frac{Z(Z - \sinh Z)}{2(1 - \cosh Z) - Z \sinh Z} \right] \quad (7d)$$

또, Z, Y 는 다음 식으로 정의된다.

$$Z = \sqrt{N_a l_0^2 / EI_z} \quad Y = \sqrt{N_a l_0^2 / EI_y} \quad (8)$$

2.1.3 비틀림 모멘트-변위 관계식

부재의 비틀림 모멘트 M_x 와 회전변위 θ_{xa}, θ_{xb} 와의

관계식을 유도한다. 이때 비틀림 모멘트와 비틀림 변위 사이에는 선형관계가 성립한다고 가정하고 Column의 가정을 도입한다. Column의 가정은 다음과 같다.

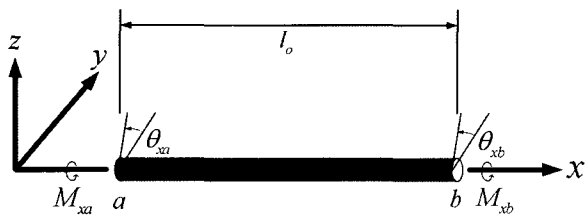
(1)재축에 직각인 단면은 변형후에도 평면을 유지한다. (2)단면의 중심을 통과하는 직선은 변형후에도 직선을 유지한다.

Column의 가정에 근거하여 재축(x 축)으로부터 r만큼 떨어진 위치에서 원주를 포함하고 재축에 평행한 곡면내의 전단 변형도 $\gamma(r)$ 와 전단 응력도를 $\tau(r)$ 은 단위 길이당비틀림 각 $d\theta/dx$ 의 함수로 다음식과 같이 표시된다.

$$\gamma(r) = r \cdot d\theta/dx \quad (9)$$

$$\tau(r) = Gr \cdot d\theta/dx \quad (10)$$

따라서 비틀림 모멘트 M_x 는 다음 식으로 표시할 수 있다.



<그림 4> 비틀림 모멘트-변위 관계

$$M_x = \int_A \gamma \tau(y) dA = \int_A G \frac{d\theta}{dx} \gamma^2 dA = GJ \frac{d\theta}{dx} \quad (11)$$

여기서 J 는 x 축 둘레의 단면 극 2차 모멘트로 다음 식으로 정의된다.

$$J = \int_A r^2 dA \quad (12)$$

비틀림 모멘트와 변위는 선형관계로 가정 하였으므로 다음과 같이 된다.

$$d\theta/dx = (\theta_{xb} - \theta_{xa})/l_0 = const. \quad (13)$$

이상을 고려하면 비틀림 모멘트와 비틀림 변위 관계식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$M_{xa} = -GJ/l_0(\theta_{xb} - \theta_{xa}) \quad (14)$$

$$M_{xb} = +GJ/l_0(\theta_{xb} - \theta_{xa}) \quad (15)$$

2.1.4 좌굴거동을 고려한 탄성 보 요소의 기본식

(4),(5),(14),(15)식은 3차원 공간에서 탄성좌굴효과를 고려한 응력-변위 관계식이다. 이것을 증분형식으로 전개하여 그 결과를 matrix형태로 정리하면 다음 식과 같다.

$$\{f_{ab}(d + \Delta d)\} = [K_L]\{\Delta d_{ab}\} + \{f_{ab}\} \quad (16)$$

여기서 $\{f_{ab}(d + \Delta d)\}$ 는 변위가 d 에서 $d + \Delta d$ 로 증분할 때 부재의 양단에 걸리는 힘을 나타내며, $[K_L]$ 는 부재의 접선 강성, $\{\Delta d_{ab}\}$ 는 증분 변위, $\{f_{ab}\}$ 는 부재양단의 힘을 나타낸다. 또 부재의 접선 강성 matrix를 선형성분과 비선형 성분으로 나누어 표시 하면 다음식과 같다.

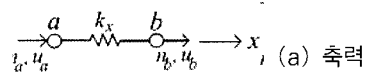
$$[K_L] = [K_{L\pm} \frac{N}{l_0}] + [K_N] \quad (17)$$

여기서 $[K_{L\pm} N/l_0]$, $[K_N]$ 은 각각 (18),(19)식과 같다.

2.2 탄소성 스프링 요소의 기본식

2.2.1 탄성 스프링 요소

탄성 요소의 단부 및 중앙부에 연결되는 탄소성 스프링에는 x 축 방향의 신장, y 축 z 축 둘레의 회전이 발생하며, 이들은 서로 독립인 것으로 가정하여 강성 matrix를 유도한다. 탄성 상태의 x 축 방향의



(b) y축 둘레의 모멘 (c) z축 둘레의 모멘트

<그림 5> 탄소성 스프링의 응력과 변위

$$[K_N] = \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_b - v_a}{l_0} & \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{v_b - v_a}{l_0} & -\frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_b - v_a}{l_0} & \left(\frac{v_b - v_a}{l_0}\right)^2 & \frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 & -\frac{v_b - v_a}{l_0} & -\left(\frac{v_b - v_a}{l_0}\right)^2 & \frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_b - w_a}{l_0} & \frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & \left(\frac{w_b - w_a}{l_0}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{w_b - w_a}{l_0} & -\frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & -\left(\frac{w_b - w_a}{l_0}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_b - v_a}{l_0} & -\frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_b - v_a}{l_0} & \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_b - v_a}{l_0} & -\left(\frac{v_b - v_a}{l_0}\right)^2 & -\frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{v_b - v_a}{l_0} & \left(\frac{v_b - v_a}{l_0}\right)^2 & \frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_b - w_a}{l_0} & -\frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & -\left(\frac{w_b - w_a}{l_0}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{w_b - w_a}{l_0} & \frac{v_b - v_a}{l_0} \frac{w_b - w_a}{l_0} & \left(\frac{w_b - w_a}{l_0}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

강성, y축 둘레의 회전강성, z축 둘레의 회전강성을 각각 $k_x, k_{\theta_y}, k_{\theta_z}$ 라 하고 탄소성 스프링 ab의 응력과 변위의 관계를 다음 그림으로 나타낸다. 탄성 스프링의 응력과 변위의 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} n_b &= -n_a = k_x(u_b - u_a) \\ m_{yb} &= -m_{ya} = k_{\theta_y}(\theta_{yb} - \theta_{ya}) \\ m_{zb} &= -m_{za} = k_{\theta_z}(\theta_{zb} - \theta_{za}) \end{aligned} \quad (20)$$

이 식을 matrix 형태로 표시하면 다음과 같다. 단, $n = n_b = -n_a, m_y = m_{yb} = -m_{ya}, m_z = m_{zb} = -m_{za}, u = u_b - u_a, \theta_y = \theta_{yb} - \theta_{ya}, \theta_z = \theta_{zb} - \theta_{za}$ 이고, $[k_{el}]$ 는 스프링의 탄성강성matrix로 (22)식으로 정의된다.

$$\begin{pmatrix} n \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = [k_{el}] \begin{pmatrix} u \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$[k_{el}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

2.2.2 소성 스프링 요소

스프링에 축력과 휨 모멘트가 작용할 때 항복하는 경우의 항복 조건식은 다음과 같다.

$$m_z = m_{zb} = -m_{za}, \quad \theta_z = \theta_{zb} - \theta_{za} \quad (23)$$

소성유동 중 (23)식을 만족하는 조건식은 다음과 같다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial f}{\partial m_y} \Delta m_y + \frac{\partial f}{\partial m_z} \Delta m_z = 0 \quad (24)$$

여기서 $\Delta n, \Delta m_y, \Delta m_z$ 은 각각 증분 축력, y축 및 z축 둘레의 증분 휨 모멘트를 표시한다. 또, 소성화된 스프링에서는 응력의 증분이 변형도 증분에 대해 일을 하지 않는다(소성유동의 상태)고 가정한다.

$$\Delta n \Delta u^{pl} + \Delta m_y \Delta \theta_y^{pl} + \Delta m_z \Delta \theta_z^{pl} = 0 \quad (25)$$

여기서 Δu^{pl} 는 x축 방향 소성 변위를, $\Delta \theta_y^{pl}, \Delta \theta_z^{pl}$ 는 각각 y축 둘레의 회전과 z축 둘레의 소성 회전을 표시한다. (24)식, (25)식에서 축력의 성분과 y축 둘레의 회전과 z축 둘레의 회전의 휨 모멘트 성분은 각각 독립인 것을 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \Delta u^{pl} \\ \Delta \theta_y^{pl} \\ \Delta \theta_z^{pl} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial f}{\partial m_y} \\ \frac{\partial f}{\partial m_z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

여기서 λ 는 비례 상수이고 Φ_x, Φ_y, Φ_z 는 미분 계수로 다음 식과 같다.

$$\Phi_x = \partial f / \partial n, \quad \Phi_y = \partial f / \partial m_y, \quad \Phi_z = \partial f / \partial m_z \quad (27)$$

2.2.3 응력 및 변위증분

응력 증분은 탄성 변위 증분으로 나타낸다. 이 식에서, $\Delta n, \Delta m_y, \Delta m_z$ 는 응력증분, $\Delta u^{pl}, \Delta \theta_y^{pl}, \Delta \theta_z^{pl}$ 은 소성변위 증분을 표시한다.

$$\begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta m_y \\ \Delta m_z \end{pmatrix} = [k_{el}] \begin{pmatrix} \Delta u^{pl} \\ \Delta \theta_y^{pl} \\ \Delta \theta_z^{pl} \end{pmatrix} \quad (28)$$

소성 상태에서 변위 증분을 2개의 성분으로 나누어 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u^{el} \\ \Delta \theta_y^{el} \\ \Delta \theta_z^{el} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta u^{pl} \\ \Delta \theta_y^{pl} \\ \Delta \theta_z^{pl} \end{pmatrix} \quad (29)$$

여기서 $\Delta u, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z$ 는 변위 증분이다. 탄성 변위 증분에 관하여 표시하기 위하여 이항하여 정일한 후, (26)식을 대입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} \Delta u^{el} \\ \Delta \theta_y^{el} \\ \Delta \theta_z^{el} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\lambda = \frac{1}{k_x \Phi_x^2 + k_{\theta_y} \Phi_y^2 + k_{\theta_z} \Phi_z^2} \{ \Phi_x \Phi_y \Phi_z \} [k_{el}] \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{pmatrix} \quad (31)$$

(21)식을 (30)식에 대입하여 그 결과를 얻고, 그 결과에 (31)식을 대입하여 정리하면 $\lambda [k_{el}]$ 을 얻을 수 있는데 이를 (21)식을 (30)식에 대입하여 얻은 결과에 대입하고 정리하면 다음 식이 구해진다.

$$\begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta m_y \\ \Delta m_z \end{pmatrix} = [k_{pl}] \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$[k_{pl}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_z} \end{bmatrix} - \frac{1}{k_x \Phi_x^2 + k_{\theta_y} \Phi_y^2 + k_{\theta_z} \Phi_z^2} \times \begin{bmatrix} (k_x \Phi_x)^2 & (k_x \Phi_x)(k_{\theta_y} \Phi_y) & (k_x \Phi_x)(k_{\theta_z} \Phi_z) \\ (k_x \Phi_x)(k_{\theta_y} \Phi_y) & (k_{\theta_y} \Phi_y)^2 & (k_{\theta_y} \Phi_y)(k_{\theta_z} \Phi_z) \\ (k_x \Phi_x)(k_{\theta_z} \Phi_z) & (k_{\theta_y} \Phi_y)(k_{\theta_z} \Phi_z) & (k_{\theta_z} \Phi_z)^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

2.2.4 탄소성 스프링의 강성matrix

탄소성 스프링의 응력과 변위의 관계를 a, b 양단의 전 12성분의 matrix로 표시한다.

$$\{f_{ab}\} = [k_s] \{d_{ab}\} \quad (34)$$

여기서 $[k_s]$ 는 스프링의 강성matrix를, $\{f_{ab}\}$ 는 스프링의 단부응력을, 그리고 $\{d_{ab}\}$ 는 스프링의 단부 변위를 나타내며 다음 식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \{f_{ab}\} &= \{ n_a \ q_{ya} \ q_{za} \ m_{xa} \ m_{ya} \ m_{za} \ n_b \ q_{yb} \ q_{zb} \ m_{xb} \ m_{yb} \ m_{zb} \ }^T \\ \{d_{ab}\} &= \{ u_a \ v_{ya} \ w_{za} \ \theta_{xa} \ \theta_{ya} \ \theta_{za} \ u_b \ v_{yb} \ w_{zb} \ \theta_{xb} \ \theta_{yb} \ \theta_{zb} \ }^T \end{aligned} \quad (35,a,b)$$

$$[K_{st}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_z} \\ -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z} \end{bmatrix} \quad (36)$$

(34)식의 스프링 강성이 탄성 상태일 경우에는 (36)식으로, 소성 상태일 경우에는 스프링의 강성 matrix를 (37)식으로 각각 표시할 수 있다. 또, (37)식에서 a, b, c, h 는 각각 다음 식으로 정의한다.

$$a = k_x \Phi_x, \quad b = k_{\theta_y} \Phi_y, \quad c = k_{\theta_z} \Phi_z \quad (38)$$

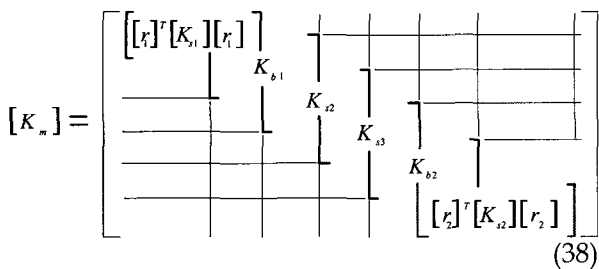
$$h = k_x \Phi_x^2 + k_{\theta_y} \Phi_y^2 + k_{\theta_z} \Phi_z^2 \quad (39)$$

$$[K_{\mu}] = \begin{bmatrix} k_x - \frac{1}{h}a^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}ab & -\frac{1}{h}ac & -(k_x - \frac{1}{h}a^2) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h}ab & \frac{1}{h}ac \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h}ab & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} - \frac{1}{h}b^2 & -\frac{1}{h}bc & \frac{1}{h}ab & 0 & 0 & 0 & -(k_{\theta_y} - \frac{1}{h}b^2) & \frac{1}{h}bc \\ -\frac{1}{h}ac & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}bc & k_{\theta_z} - \frac{1}{h}c^2 & \frac{1}{h}ac & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h}bc & -(k_{\theta_z} - \frac{1}{h}c^2) \\ -(k_x - \frac{1}{h}a^2) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h}ab & \frac{1}{h}ac & k_x - \frac{1}{h}a^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}ab & -\frac{1}{h}ac \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h}ab & 0 & 0 & 0 & -(k_{\theta_y} - \frac{1}{h}b^2) & \frac{1}{h}bc & -\frac{1}{h}ab & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} - \frac{1}{h}b^2 & -\frac{1}{h}bc \\ \frac{1}{h}ac & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h}bc & -(k_{\theta_z} - \frac{1}{h}c^2) & -\frac{1}{h}ac & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}bc & k_{\theta_z} - \frac{1}{h}c^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

2.3 부재의 강성matrix

이상에서 유도한 식들을 사용하면 양단에 소성 스프링이 있는 부재의 기본식을 유도할 수 있다. 그림 1에 표시한 부재모델에서, 좌측의 탄소성 스프링의 강성을 $[K_{s1}]$, 그 우편의 탄성 보 요소의 강성을 $[K_{b1}]$, 그 우측의 연속되는 두 개의 소성 스프링의 강성을 각각 K_{s2}, K_{s3} , 다시 그 우측의 탄성 보의 강성을 K_{b2} 그리고 부재 우측단의 소성 스프링의 강성을 K_{s4} 라고 하자. 또 부재 좌우측의 소성 스프링 옆 부분에는 강역이 있다고 가정한다. 그림 1에 표시한 부재의 기본식을 유도하기 위하여 앞에서 구한 탄성 보의 강성matrix, 소성 스프링의 강성 matrix를 기본으로 하여 potential에너지의 정류원리를 사용하면 다음 식을 얻는다. 이 식에서 $[K_M]$ 은 부재의 강성 matrix를 의미한다.

로 각각 다음 식으로 표시된다. 단 여기서 l_1, l_2 는 각각 부재 좌단 및 우단의 강역의 길이를 표시한다.



The diagram shows a beam with nodes and springs. The stiffness matrix $[K_M]$ is represented as a block matrix with components $[r_1]^T [K_{s1}] [r_1]$, $[r_2]^T [K_{s4}] [r_2]$, and intermediate stiffness matrices $K_{b1}, K_{s2}, K_{s3}, K_{b2}$.

$$[r_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

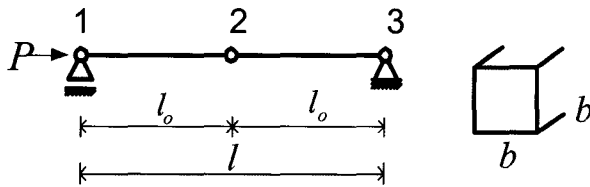
$$[r_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

여기서 $[r_1], [r_2]$ 는 강역길이를 고려한 회전 matrix

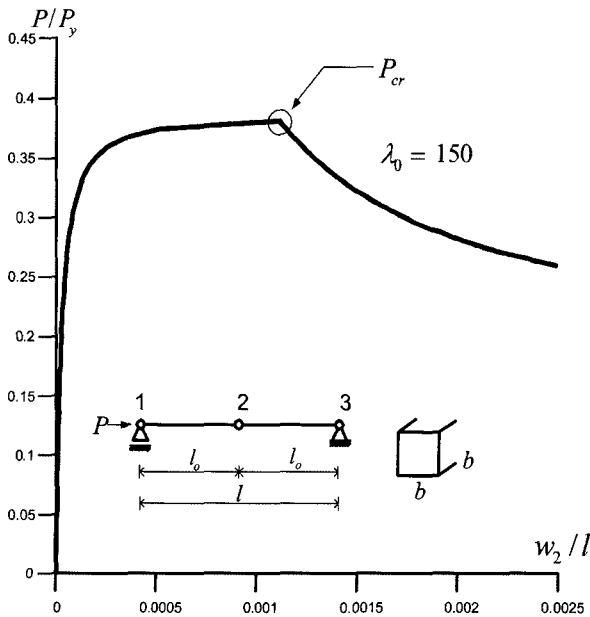
3. 수치해석 예제 및 분석

이상에서 유도한 기본식의 타당성을 예제를 통하여 입증하기 위하여 <그림 6>과 같은 단순보에 축력을 가하여 좌굴하중을 계산하고 그 결과를 이론해와 비교한다. 이 부재는 길이가 $l=450\text{cm}$, 항복 압축응력이 $N_p=250\text{tf}$, x,y축 둘레의 전소성 모멘트가 $M_{py}=M_{pz}=673\text{tf}$ 인 부재이다. 해석의 편의상 2번 절점에 z축 방향으로 초기부정으로 $w_i=i/20=0.015\text{cm}$ 를 주었으며 그림에서 표시한 것처럼 1번 절점에서 축 방향으로 압축력을 점진적으로 가하였다. 또 보 부재를 <그림 1>에 표시한 요소를 사용하여 모델링 하였으며, 탄소성 좌굴해석은 하중증분과 3번 절점에서의 변위증분을 동시에 사용하였으며 해석에 이용된 항복함수는 다음 식과 같다.

$$f = \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2} \quad (41)$$



<그림 6> 해석 모델



<그림 8> 힘-변위 곡선

이론식으로 하중은 $P_{cr}=99.5\text{tf}$ 이며 해석결과 얻어진 좌굴 하중값도 동일한 값으로 계산되어 본 논문의 기본식이 정확도가 있음을 알 수 있다.

<표 1>은 탄소성 좌굴해석에 사용되는 기하강성 matrix의 종류에 따른 해석결과의 정확도를 비교한 것이다. 이 표에서 보는 것처럼, 처짐각법의 원리를 사용하여 유도한 기하강성 matrix를 사용한 경우가 해석의 정확도가 통상의 방법에 따라 유도한 기하강성 matrix를 사용한 경우에 비해 상대적으로 높다고 할 수 있다(단, 이 비교에 사용한 해석 모델은 <그림 6>과는 다른 모델이다). 이것은 비슷한 정확도가 요구되는 상황에서 해석에 사용하는 요소의 분할수를 적게 하여도 된다는 것을 의미하므로, 래티스 돔과 같이 수많은 직선부재로 구성되는 구조물의 탄소성좌굴해석은 본 논문에서 제안한 방법이 유효하다고 할 수 있다.

<표 1> 기본식에 따른 해석의 정확도 비교

부재양단 경계	$P_{cr} = \pi^2 EI / k l^2$				
	엄밀해	보통의 기하강성matrix 사용시		처짐각법에 의한 기하강성matrix 사용시	
		1요소	2요소	1요소	2요소
양단 고정	39.48	-	40	-	39.47
1단고정 타단 핀	20.19	30	20.71	20.19	20.19
양단 핀	9.870	12	9.944	9.869	9.869
1단고정타 단자유	2.467	2.486	2.469	2.467	2.467

4. 결 론

본 논문에서는 좌굴 처짐각법의 원리를 이용하여 기하강성 matrix를 유도하고 완전 탄소성 원리를 사용하여 탄소성 기본식을 유도하여 탄소성좌굴해석하는 방법을 소개하고 예제를 통하여 검증 하였다. 검토 결과 이 방법은 요소분할 개수가 적어도 정확도가 높은 특성을 가지고 있어 계산의 효율성이 높은 것으로 나타났다. 래티스 돔, 시스템 트러스등과 같이 수많은 직선 부재들로 구성되는 구조물의 좌굴 내력의 계산시에 효율성이 높다고 할 수 있다.

참고문헌

1. Shiro Kato, Jong-Min Kim and Myung-Chae Cheong(2003), A new proportioning method for member sections of single layer reticulated domes subjected to uniform and non-uniform loads, Engineering Structures, Vol 25(2003), 1265-1278.
2. 松本芳纪 외 3인(1981), 一次元部材论, 实教出版株式会社,
3. 川井忠彦, 藤谷义信(1991), 座屈问题解析, 培风馆
4. 日本建筑学会(1989), 单层ラティスドーム의 安定解析(现象と 问题点)