Journal of the Korean Association for Spatial Structures
Vol. 6, No. 4 (통권 22호), pp. 45~52, December, 2006

재료비선형을 고려한 복합적층판의 진동해석

Vibration Analysis of Composite Laminated Plates Considered in Material-Nonlinearity

석 근 영* 강 주 원** 신 영 식***
Seok, Keun-Yung Kang, Joo-Won Shin, Young-Shik

요 약

재료적으로 강한 비선형성을 나타내는 FRP 복합적층판을 진동해석을 수행하였다. 적층판의 적층각도와 순서에 따른 선형해석의 결과와 비선형해석의 결과를 비교, 검토하였다. 본 연구는 FRP 복합적층판의 비선형해석시 동적거동 특성을 예측하기 위한 기초적 연구로써 변위를 비교, 분석한다.

Abstract

FRP laminated plates have strong material-nonlinearity. Through vibration Analysis of FRP laminated plates, the result of nonlinearity analysis is compared with the result of linearity analysis according to stacking angle and squency. This study is a fundamental study about displacement in nonlinearity dynamic behavior of FRP laminated plates.

키워드 : 재료비선형, 복합적층판, 진동해석
Keywords : Material-nonlinearity, Composite laminated plate, Vbration analysis

1. 서 론

복합재료의 대표적인 FRP(Fiber Reinforced Plastics)는 합성수지에 연속된 섬유를 삽입하여 만들어진 섬유강화 복합재료이다. 대부분의 FRP는 물리적으로 비선형 응력-변형률 거동을 나타낸다. 특히 적층판의 경우, 전단응력-변형률의 응답은 강한 비선형성을 나타낸다. 적층판의 이론은 Kirchhoff의 가정을 기본으로 하는 초기 연구에서 Classical laminate plate theory는 횡방향전단변형률을 고려하지 않아서 변위를 과소예측하고 고유진동수와 좌굴하중을 과대예측한다. 개선된 이론으로 Reissner(1945)와 Mindlin(1951)의 First-order shear deformation theory에서부터

First-order laminate plate theory가 제안되었으며. 보다 정확한 횡방향변위와 응력을 산출을 위해 변위장에 고차항을 포함한 Higher-order shear deformation theory가 제안되었다.

본 연구에서는 복합적층판의 거시적 거동상태 의 기초적인 자료로써 변위에 관해 선형과 비선형, 적층각에 따라 분석하기 위해 Higher-order shear deformation theory으로부터 제안된 Third-order shear deformation theory를 사용하게 된다. 또한 복합적층판의 비선형 고려를 위해 Hahn과 Tsai(1973)의 비선형 모델과 동적해석에 있어서 비선형방정식을 풀기 위해 Newmark β법을 사용하여 반복계산을 수행한다. 반복계산해법으로 접선강성행렬을 이용하는 수정된 Newton-Raphson반복법을 통해 접선강성행렬을 구성한다.

* 정회원, 영남대학교 건축공학과 박사과정
** 정회원, 영남대학교 건축학부 부교수
*** 정회원, 영남대학교 건설환경공학부 교수
Tel : 053-810-2401 E-mail : ysshin@ynu.ac.kr

2. 유한요소의 정식화

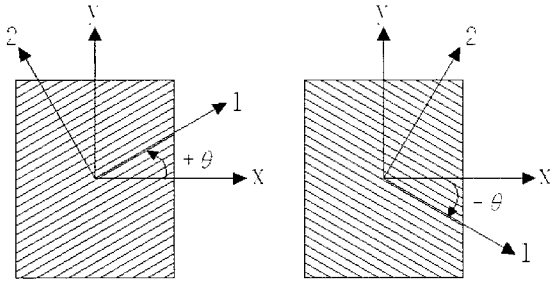
2.1 재료비선형 구성방정식

Hahn과 Tsai(1973)에 제안된 비선형모델은 변형률-응력 관계를 유도하기 위해 complementary에너

지밀도함수를 사용하였다.

$$\overline{W^*}=\frac{1}{2}S_{11}\sigma_1^2+\frac{1}{2}S_{22}\sigma_2^2+\frac{1}{2}S_{12}\sigma_1\sigma_2 +\frac{1}{2}S_{66}\tau_6^2+\frac{1}{4}S_{66}^*\tau_6^4 \quad (1)$$

$\overline{W^*}$는 축소된 complementary에너지밀도함수이다. 변형률은 $\epsilon_i=\frac{\partial W^*}{\partial \sigma_i}$, $i=1,2,6$ 를 통해 complementary 에너지밀도함수로 표현된다. Hahn과 Tsai의 모델은 2차원적 면내응력-변형률로 제한했으나, 본 연구에서 3차원으로 확장시킨다.



〈그림 1〉 전체좌표계와 재료좌표계

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_6\\ \gamma_4\\ \gamma_5\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_6\\ \tau_4\\ \tau_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ S_{66}^*\tau_6^3\\ S_{44}^*\tau_4^3\\ S_{55}^*\tau_5^3\end{pmatrix} \quad (2)$$

첨자 4, 5, 6은 각각 2-3, 1-3, 1-2의 재료방향 전단의 영향을 나타낸다. 전단응력-변형률 관계는 $\tau_q=g_q(\gamma_q)$, $q=4,5,6$ 이 되고, $g_q(\gamma_q)$가 τ_q의 함수$S_{qq}^*\tau_q^3+S_{qq}\tau_q-\gamma_q=0$ 에 있어서 실수근이다. 선형항을 분리하면 $g_q(\gamma_q)g_q(\gamma_q)$는 다음과 같이 쓰여진다.

$$g_q(\gamma_q)=\left(f_q(\gamma_q)+\frac{1}{S_{qq}}\right)\gamma_q \quad , \quad q=4,5,6 \quad (3)$$

결과적으로, 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_6\\ \tau_4\\ \tau_5\end{pmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & f_6(\gamma_6) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & f_4(\gamma_4) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_5(\gamma_5)\end{bmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_6\\ \gamma_4\\ \gamma_5\end{pmatrix} \quad (4)$$

$[Q]=[S]^{-1}$가 성립하므로, 역의 관계인 식(2)과 식(4)에 있어, 함수 $f_q(\gamma_q)$, $q=4,5,6$ 은 3차원 방정식의 정밀해이다. 해석의 단순화를 위해 함수 $f_q(\gamma_q)$, $q=4,5,6$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$f_q(\gamma_q)=a_{q1}\gamma_q^2+a_{q2}\gamma_q^4+\cdots+a_{qn}\gamma_q^{2n}=\sum_{i=1}^{n}a_{qi}\gamma_q^{2i} \quad (q=4,5,6) \quad (5)$$

변수 a_{qi}의 적절한 선택에 의해서, 전단변형률의 적당한 범위에 대해 식(2)는 응력-변형률 법칙도 성립시킨다. 복합재료의 면내 비선형변수 S_{66}^*은 실험에 의해 결정되어질 수 있다.

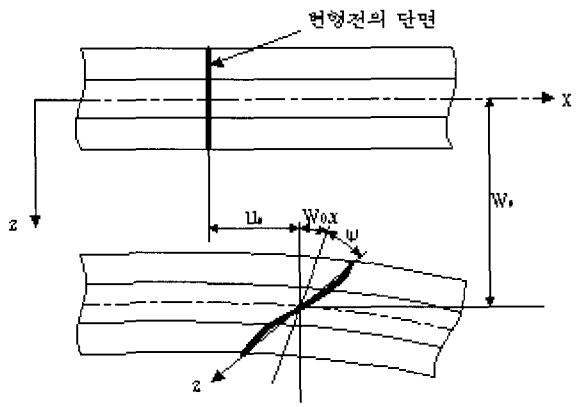
전체좌표계 x-y에서 응력-변형률 법칙은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\{\sigma\}=[\overline{Q}]\{\varepsilon\}+[T]^{-1}[diag(f_6(\gamma_6),\ f_4(\gamma_4),\ f_5(\gamma_5))][T]^{-T}\{\varepsilon\}$$
$$\{\sigma\}=[\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz}]^T$$
$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz}]^T$$
$$[\overline{Q}]=[T]^{-1}[Q][T]^{-T} \quad (6)$$

$[\overline{Q}]$는 적층판 각 층에 있어서 변환된 강성행렬이다(Jones 1975).

2.2 Third-order shear deformation theory 에 의한 정식화

고차이론은 일반적으로 두께방향좌표계인 z항으로 된 변위의 멱급수로부터 유도된다. z좌표의 차수에 따라 추가자유도인 ψ_x, ξ_x, ζ_x 등과 같은 종속변수자유도가 많아지면 운동방정식의 유도와 해석과정이 복잡해서 Reddy(1984)는 z좌표에 대한 3차함수로써 면내변위가 변하는 식을 제안하였다. 반면에 횡방향변위는 두께방향으로 일정하다고 가정하였다.



〈그림 2〉 Higher-order shear deformation theory의 가정

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y)+z\psi_x(x,y) \\
&\quad +z^2\xi_x(x,y)+z^3\zeta_x(x,y) \\
v(x,y,z) &= v_0(x,y)+z\psi_y(x,y) \\
&\quad +z^2\xi_y(x,y)+z^3\zeta_y(x,y) \\
w(x,y,z) &= w_0(x,y)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

u_0, v_0, w_0는 각각 전체좌표계 x, y, z에 대한 중간면에 한 점의 변위를 나타낸다. ψ_x, ψ_y는 각각 y축, x축에 관한 횡방향 수직선의 회전변위이다. 나머지 항은 고차의 회전변위를 나타낸다. 횡방향전단응력이 판의 최상면과 최하면에서 0이 되는 조건을 이용하면, 변형률-변위 관계와 변위장은 다음과 같다. h는 판의 두께이다.

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\psi_x+2z\xi_x+3z^2\zeta_x+\frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\psi_y+2z\xi_y+3z^2\zeta_y+\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= u_0(x,y)+z\left[\psi_x-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \\
v &= v_0(x,y)+z\left[\psi_y-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\
w &= w_0(x,y)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

식(9)에서 면내변위들은 두께방향으로 3차변수를 가진다. 그러므로 횡방향 전단변형률은 판의 두께에 걸쳐 포물선 분포를 나타내고 판의 최상면과 최하면에서 응력이 0이라는 조건을 만족한다.

선형의 변형률-변위 관계에 식(9)를 대입하여 행렬 형식으로 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{x0}\ \varepsilon_{y0}\ \gamma_{xy0}\ \gamma_{yz0}\ \gamma_{xz0}\}^T+z\{\kappa_{x1}\ \kappa_{y1}\ \kappa_{xy1}\ 0\ 0\}^T \\
&\quad +z^2\{0\ 0\ 0\ \kappa_{yz2}\ \kappa_{xz2}\}^T+z^3\{\kappa_{x3}\ \kappa_{y3}\ \kappa_{xy3}\ 0\ 0\}^T
\end{aligned}
\tag{10}
$$

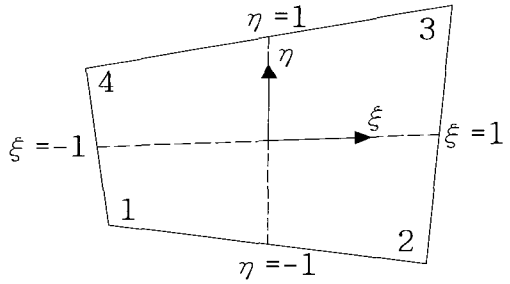
전체좌표계에서 적층판의 k번째 층에서 응력-변형률 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}^k
=
\begin{bmatrix}
\overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} & 0 & 0 \\
\overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} & 0 & 0 \\
\overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} \\
0 & 0 & 0 & \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{55}}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}
\tag{11}
$$

$\overline{Q_{ij}}(i,j=1,2,4,5,6)$는 적층판의 k번째 층에 있어서 변환된 재료강성계수들이다. 수직변형률 ε_z는 Reddy(1984)의 이론에서는 무시되기 때문에, 대응되는 수직응력 σ_z는 생략될 수 있다.

2.3 유한요소의 정식화

본 연구에서 고려되는 요소는 각 절점에 7개의 자유도를 가진 4절점 직사각형 요소이다. 등매개변수요소의 정식화는 직사각형으로부터 임의의 사변형으로 변환되도록 고려된다. <그림 3>의 전형적인 평면등매개변수요소는 자연좌표계 $\xi-\eta$가 사용된다.



〈그림 3〉 4절점 평면 등매개변수 요소

판요소 인장변형은 2개의 면내변위의 선형변위장을 기본으로 하고 식(13)과 같이 보간되어진다.

$$u_0(\xi,\eta)=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta \qquad (12)$$
$$v_0(\xi,\eta)=b_1+b_2\xi+b_3\eta+b_4\xi\eta$$

$$\begin{Bmatrix} u_0(\xi,\eta) \\ v_0(\xi,\eta) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\{u_{1e}\}=[N]\{u_{1e}\} \qquad (13)$$

면외전단변형은 면내변위에 대해 사용된 것과 같은 형상함수를 가지고서 절점 전단 변위으로부터 보간되어진다.

$$\{u_{2e}\}=\{\Psi_{x1},-\Psi_{x1},\Psi_{x2},-\Psi_{x2},\Psi_{x3},-\Psi_{x3},\Psi_{x4},-\Psi_{x4}\}^T \qquad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \Psi_x(\xi,\eta) \\ \Psi_y(\xi,\eta) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\{u_{2e}\}=[N']\{u_{2e}\} \qquad (15)$$

휨변형요소는 Melosh(1963), Zienkiewicz와 Cheung (1964)에 의해 제안한 직사각형판의 휨요소가 사용된다. 요소당 12개의 자유도를 산출하고, 절점당 3개 변위를 갖는 요소이다. 그러므로 12개의 상수 c_i는 변위장으로 표현된다.

$$w=c_1+c_2\xi+c_3\eta+c_4\xi^2+c_5\xi\eta+c_6\eta^2+c_7\xi^3 +c_8\xi^2\eta+c_9\xi\eta^2+c_{10}\eta^3+c_{11}\xi^3\eta+c_{12}\xi\eta^3 \qquad (16)$$

휨변형 자유도와 변위장은 다음과 같다.

$$\{u_{3e}\}=\left\{w_1,\frac{\partial w_1}{\partial y},-\frac{\partial w_1}{\partial x},w_2,\frac{\partial w_2}{\partial y},-\frac{\partial w_2}{\partial x},\right. \left. w_3,\frac{\partial w_3}{\partial y},-\frac{\partial w_3}{\partial x},w_4,\frac{\partial w_4}{\partial y},-\frac{\partial w_4}{\partial x}\right\}^T \qquad (17)$$

$$\{w_0(\xi,\eta)\}=[N_{11}N_{12}N_{13}N_{21}N_{22}N_{23} N_{31}N_{32}N_{33}N_{41}N_{42}N_{43}]\{u_{3e}\}=[N']\{u_{3e}\} \qquad (18)$$

식(10)의 변형률은 z항에 따라 4개 부분으로, 변형률-절점자유도관계로 표현하는 것이 편리하다.

$$\{\varepsilon_{x0}\ \varepsilon_{y0}\ \gamma_{xy0}\ \gamma_{yz0}\ \gamma_{xz0}\}^T =[B^{\mathrm{I}}]\{u_e\}=\begin{bmatrix}[B_1]_{3\times8} & [0] & [0] \\ [0] & [B_2]_{2\times8} & [B_3]_{2\times12}\end{bmatrix}\{u_e\} \qquad (19)$$

$$\{\kappa_{x1}\ \kappa_{y1}\ \kappa_{xy1}\ 0\ 0\}^T =[B^{\mathrm{II}}]\{u_e\}=\begin{bmatrix}[0] & [B_4]_{3\times8} & [0] \\ [0] & [0] & [0]\end{bmatrix}\{u_e\} \qquad (20)$$

$$\left\{0\ 0\ 0\ \left(-\frac{h^2}{4}\right)\kappa_{yz2}\ \left(-\frac{h^2}{4}\right)\kappa_{xz2}\right\}^T =[B^{\mathrm{III}}]\{u_e\}=\begin{bmatrix}[0] & [0] & [0] \\ [0] & [B_2]_{2\times8} & [B_3]_{2\times12}\end{bmatrix}\{u_e\} \qquad (21)$$

$$\left\{\left(-\frac{3h^2}{4}\right)\kappa_{x3}\ \left(-\frac{3h^2}{4}\right)\kappa_{y3}\ \left(-\frac{3h^2}{4}\right)\kappa_{xy3}\ 0\ 0\ 0\right\}^T =[B^{\mathrm{IV}}]\{u_e\}=\begin{bmatrix}[0] & [B_4]_{3\times8} & [B_5]_{3\times12} \\ [0] & [0] & [0]\end{bmatrix}\{u_e\} \qquad (22)$$

$$[B_1]=\begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

$$[B_2]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$[B_3]=\begin{bmatrix} N_{11,y} & N_{12,y} & N_{13,y} & N_{21,y} & N_{22,y} & N_{23,y} \\ N_{11,x} & N_{12,x} & N_{13,x} & N_{21,x} & N_{22,x} & N_{23,x} \\ N_{31,y} & N_{32,y} & N_{33,y} & N_{41,y} & N_{42,y} & N_{43,y} \\ N_{31,x} & N_{32,x} & N_{33,x} & N_{41,x} & N_{42,x} & N_{43,x} \end{bmatrix}$$

$$[B_4]=\begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} \\ N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 \\ N_{1,x} & N_{1,y} & N_{2,x} & N_{2,y} & N_{3,x} & N_{3,y} & N_{4,x} & N_{4,y} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

$$[B_5]=\begin{bmatrix} N_{11,xx} & N_{12,xx} & N_{13,xx} & N_{21,xx} & N_{22,xx} & N_{23,xx} \\ N_{11,yy} & N_{12,yy} & N_{13,yy} & N_{21,yy} & N_{22,yy} & N_{23,yy} \\ 2N_{11,xy} & 2N_{12,xy} & 2N_{13,xy} & 2N_{21,xy} & 2N_{22,xy} & 2N_{23,xy} \\ N_{31,xx} & N_{32,xx} & N_{33,xx} & N_{41,xx} & N_{42,xx} & N_{43,xx} \\ N_{31,yy} & N_{32,yy} & N_{33,yy} & N_{41,yy} & N_{42,yy} & N_{43,yy} \\ 2N_{31,xy} & 2N_{32,xy} & 2N_{33,xy} & 2N_{41,xy} & 2N_{42,xy} & 2N_{43,xy} \end{bmatrix}$$

$$N_{i,x}=\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad i=1,2,3,4 \qquad (24)$$
$$N_{i,y}=\frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{1}{a}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad i=1,2,3,4$$

전체 변형률-절점자유도 관계는 다음과 같다.

$$\{\varepsilon\}=[B^{\mathrm{I}}]\{u_e\}+z[B^{\mathrm{II}}]\{u_e\}+z^2\left(-\frac{4}{h^2}\right)[B^{\mathrm{III}}]\{u_e\} +z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)[B^{\mathrm{IV}}]\{u_e\} =[B]\{u_e\}\} \qquad (25)$$

2.4 선형요소의 강성행렬

복합적층판은 각 층이 완전부착상태로 가정되며, 전체좌표계에 대해 임의의 각도를 가진다. 그러므로 각 층의 강성행렬을 계산하고 적층판의 전체강성행렬을 구한다. 변형률에너지는 다음과 같다.

$$U_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\overline{Q}]\{\varepsilon\}dV \qquad (26)$$

$\{\varepsilon\}$는 전단을 포함하는 모든 변형률을 나타내고, $[\overline{Q}]$는 식(6)에서 정의되어진 구성행렬이며, 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2}\int \{u_e\}^T [B]^T [\bar{Q}][B]\{u_e\} dV = \frac{1}{2}\{u_e\}^T [K_e]\{u_e\} \tag{27}$$

$[K_e]$는 요소의 강성행렬이다. N개의 층을 가지는 적층판의 경우, 요소강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[K_e] &= \sum_{k=1}^{N}\int_A\int_{z_{k-1}}^{z_k} [B]^T[\bar{Q}][B]\,dx\,dy\,dz \qquad (28)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{z_{k-1}}^{z_k} [[B^{\mathrm{I}}]^T + z[B^{\mathrm{II}}]^T \\ &+ z^2\left(-\frac{4}{h^2}\right)[B^{\mathrm{III}}]^T\Big\} + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)[B^{\mathrm{IV}}]^T\Big] \\ &\times[\bar{Q}]\Big[[B^{\mathrm{I}}] + z[B^{\mathrm{II}}] + z^2\left(-\frac{4}{h^2}\right)[B^{\mathrm{III}}] \\ &+ z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)[B^{\mathrm{IV}}]\Big]|J|\,d\xi\,d\eta\,dz\end{aligned}$$

식(28)에서 z에 대한 적분은 해석적으로 수행되어질 수 있고, ξ와 η의 항에 대한 적분은 Gauss 수치적분으로 계산된다.

2.4 Consistent 질량행렬의 구성

consistent 질량행렬은 다음과 같이 정의되는 요소의 질량행렬의 조합으로 얻어진다.

$$[M_e] = \int_V \rho[N]^T[N]\,dV \tag{29}$$

ρ는 재료의 밀도, $[N]$는 요소강성행렬에서의 형상함수, 질량행렬 $[C]$는 보통 형태상의 감쇠비로써 간접적으로 세분화한다. 판요소의 consistent 질량행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[M_e] &= \int_V \rho[N]^T[N]\,dV \qquad (30)\\ &= \begin{bmatrix}[M_{1e}]_{8\times8} & [0] & [0]\\ [0] & [M_{2e}]_{8\times8} & [0]\\ [0] & [0] & [M_{3e}]_{12\times12}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

해석적으로 z좌표에 대해 적분을 수행하면, 식(30)에서 부행렬은 다음처럼 표현되어진다.

$$\begin{aligned}[M_1] &= \sum_{k=1}^{N}\rho_k(z_k - z_{k-1})\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N']^T[N']|J|\,d\xi\,d\eta\\ [M_2] &= \sum_{k=1}^{N}\rho_k(z_k - z_{k-1})\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N']^T[N']|J|\,d\xi\,d\eta\\ [M_3] &= \sum_{k=1}^{N}\rho_k(z_k - z_{k-1})\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N'']^T[N'']|J|\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{31}$$

3. 재료비선형 동적해석

3.1 증분운동방정식의 정식화

비선형 동적해석에 있어 시간 $t+\Delta t$에서 계산되는 증분평형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[M]\{\ddot{u}\}^{(i)}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}^{(i)}_{t+\Delta t} + [K_T]^{(i)}\{\Delta u\}^{(i)} \\ = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}^{(i-1)}_{t}\end{aligned} \tag{32}$$

$[M]$은 질량행렬, $[C]$는 감쇠행렬, $[K_T]$는 접선행렬이고, $\{\Delta u\}$는 변위의 증분이고, $\{R\}$는 외부 작용하중, $\{F\}$는 내부의 요소응력에 대응되는 절점하중벡터이다. 첨자 (i)와 $(i-1)$는 i번 반복과 i-1번의 반복에서의 값을 나타낸다. 각 시간단계에서의 평형반복이 수렴한 후에, 변위는 다음 식을 사용하므로써 증가된다.

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\Delta u\} \tag{33}$$

$\{u\}_t$는 시간 t에서 마지막에 수렴되어진 변위이고, $\{\Delta u\}$는 Δt에 걸쳐 변위의 증가량이다.

비례감쇠에서 감쇠비가 각 모드에 대해 세분화되어진다면 모드 중첩법을 사용하여 감쇠행렬을 구할 수 있다. 비례감쇠행렬은 다음과 같다.

$$[C] = [M][\phi]\left[diag\left(\frac{2\zeta_j\omega_j}{M_j}\right)\right][\phi]^T[M] \tag{34}$$

$[\phi]$는 모드형상행렬, M_j는 j번째 modal 질량, ζ_j와 ω_j는 각각 j번째 modal 감쇠비와 고유진동수이다.

3.2 Implicit 시간 적분

식(32)에서 주어진 증분평형방정식은 시간에 관한

수치적분방법으로 각 시간단계마다 계산되어질 수 있다. 상수 β=0.25, γ=0.5를 가지는 평균가속도법 즉, Newmark β 법(1959)은 다음과 같은 가정을 한다.

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t}=\{\dot{u}\}_t+\frac{\Delta t}{2}(\{\ddot{u}\}_t+\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}) \qquad (35)$$
$$\{u\}_{t+\Delta t}=\{u\}_t+\frac{\Delta t}{2}(\{\dot{u}\}_t+\{\dot{u}\}_{t+\Delta t})$$

식(35)를 식(32)에 대입하면,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{\Delta t^2}[M]+\frac{2}{\Delta t}[C]+[K_T]_t\right)\{\Delta u\}\\&=\{R\}_{t+\Delta t}-\{F\}_{t+\Delta t}\\&-[M]\left(\frac{4}{\Delta t^2}(\{u\}_{t+\Delta t}-\{u\}_t)-\frac{4}{\Delta t}\{\dot{u}\}_t-\{\ddot{u}\}_t\right)\\&-[C]\left(\frac{2}{\Delta t}(\{u\}_{t+\Delta t}-\{u\}_t)-\{\dot{u}\}_t\right)\end{aligned} \qquad (36)$$

식(36)은 모든 시간단계에 대해 반복계산된다.

3.3 접선강성행렬의 정식화

증분방정식의 정식화를 위해서는 접선강성행렬 $[K_T]$가 필요하다. 재료좌표계에 증분방정식의 응력-변형률 관계를 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}[C_T]&=\frac{\partial\{\sigma'\}}{\partial\{\epsilon'\}}=\frac{\partial([Q]\{\epsilon'\})}{\partial\{\epsilon'\}}+\frac{\partial([f]\{\epsilon'\})}{\partial\{\epsilon'\}} \qquad (37)\\&=\frac{\partial[Q]}{\partial\{\epsilon'\}}\{\epsilon'\}+\frac{\partial\{\epsilon'\}}{\partial\{\epsilon'\}}[Q]+\frac{\partial[f]}{\partial\{\epsilon'\}}\{\epsilon'\}+\frac{\partial\{\epsilon'\}}{\partial\{\epsilon'\}}[f]\\&=[0]+[Q]+\frac{\partial[f]}{\partial\{\epsilon'\}}\{\epsilon'\}+[f]\\&=[Q]+[Q_N]\end{aligned}$$
$$[f]=[diag(0,0,f_6(\gamma_{12}),f_4(\gamma_{23}),f_5(\gamma_{13}))]$$

$[f]$는 단지 전단요소만 포함하고, $[Q_N]$는 재료의 좌표계에서 $[C_T]$의 비선형부분이다. 전체좌표계에 접선구성행렬은

$$\begin{aligned}[\overline{C_T}]&=[\overline{Q}]+[T_1^*]\{\varepsilon\}[T_3]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{6i}(2i)([T_3]\{\varepsilon\})^{2i-1}\right)\\&+[T_1^*]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{6i}([T_3]\{\varepsilon\})^{2i}\right)\\&+[T_2^*]\{\varepsilon\}[T_4]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{4i}(2i)([T_4]\{\varepsilon\})^{2i-1}\right)\\&+[T_2^*]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{4i}([T_4]\{\varepsilon\})^{2i}\right)\\&+[T_3^*]\{\varepsilon\}[T_5]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{5i}(2i)([T_5]\{\varepsilon\})^{2i-1}\right)\\&+[T_3^*]\left(\sum_{i=1}^{n}a_{5i}([T_5]\{\varepsilon\})^{2i}\right)\\&=[\overline{Q}]+[\overline{Q_N}]\end{aligned} \qquad (38)$$

N개의 적층판 유한요소의 접선강성행렬은

$$\begin{aligned}[K_{e,T}]&=\sum_{k=1}^{N}\int_V[B]^T[[\overline{Q}]+[\overline{Q_N}]][B]dV\\&=\sum_{k=1}^{N}\int_V[B]^T[\overline{Q}][B]dV+\sum_{i=1}^{n}\int_V[B]^T[\overline{Q_N}][B]dV\\&=[K_e]+[K_{e,N}]\end{aligned} \qquad (39)$$

$[K_e]$는 식(24)에서 주어진 선형요소강성행렬이고, $[K_{e,N}]$는 비선형성을 나타내는 강성행렬 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[K_{e,N}]&=\sum_{k=1}^{N}\int_V[B]^T[\overline{Q_N}][B]dV \qquad (40)\\&=\sum_{k=1}^{N}\int_V[\{k_{1e,N}\}+\{k_{2e,N}\}+\{k_{3e,N}\}]dV\end{aligned}$$

$[K_{e,N}]$는 3차원 가우스 구적법으로 계산된다.

3.4 요소하중벡터의 정식화

식(32)에서 요소의 하중벡터 $\{F_e\}$는 요소의 내부응력으로 구성되는 절점하중을 포함한다.

$$\{F_e\}=\sum_{k=1}^{N}\int_V[B]^T\{\sigma\}dV \qquad (41)$$

식(6)과 식(24)을 사용하면,

$$\{F_e\}=\sum_{k=1}^{N}\{[K_e]\{u_e\}+\{f_{1e,N}\}+\{f_{2e,N}\}+\{f_{3e,N}\}\} \qquad (42)$$

식(42)에서 등호 오른쪽에 첫 번째 항은 선형부분으로 생성되는 절점하중벡터를 표현하는 것이고, 다른 세 개의 항은 비선형성을 나타낸다.

3.3 수렴한계

불균형 하중과 내부에너지 증가는 해에 가까울수록 0에 가까워지는 경향이 있다. 그래서 두 가지를 모두 확인하는 것이 효과적이다(Bathe and Cimento 1980). 불균형 하중에 의한 수렴한계는 미리 정해진 본래 하중의 증가의 허용한계 안에 있는

불균형 하중을 이용하는 것이다.

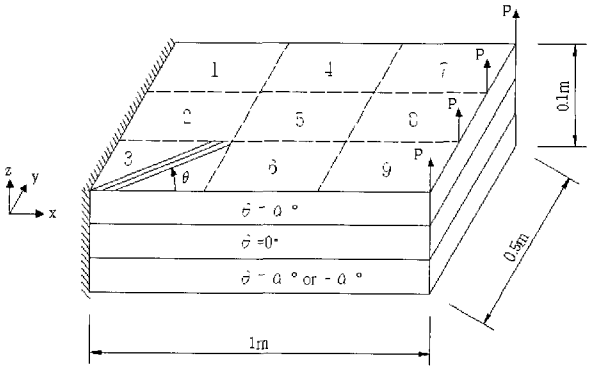
$$\frac{out-of-balance\ load}{load\ increament} = \frac{\| \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}^{i-1}_{t+\Delta t} - [M]\{\ddot{u}\}^{i-1}_{t+\Delta t} - [C]\{\dot{u}\}^{i-1}_{t+\Delta t} \|}{\| \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t} - [M]\{\ddot{u}\}_{t} - [C]\{\dot{u}\}_{t} \|} < tolerance \tag{43}$$

내부에너지에 의한 수렴한계는 변위와 하중이 균형값 근처에 있을 때를 나타내기 위해, 각 반복과정 동안 내부에너지의 증가는 변위 증가에서 불균형 하중의 행해진 일의 양과 초기 내부에너지의 증가와 비교되어질 수 있다.

$$\frac{\{\Delta u^i\}^T(\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}^{i-1}_{t+\Delta t} - [M]\{\ddot{u}\}^{i-1}_{t+\Delta t} - [C]\{\dot{u}\}^{i-1}_{t+\Delta t})}{\{\Delta u^1\}^T(\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t} - [M]\{\ddot{u}\}_{t} - [C]\{\dot{u}\}_{t})} < tolerance \tag{44}$$

4. 수치해석 및 결과

<그림 6>과 같이 $\alpha = 30^o, 45^o, 60^o$의 적층순서로 된 3개층 대칭형, 비대칭형 켄틸레버 적층판을 수치해석한다.



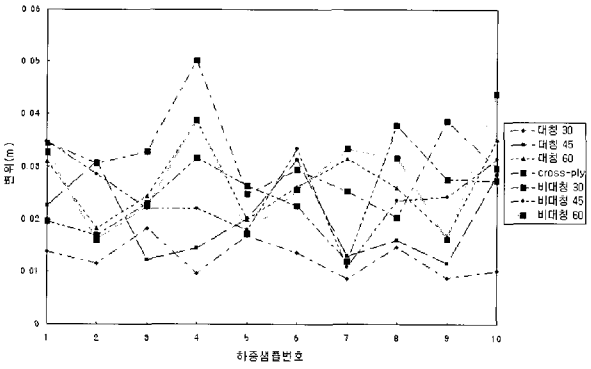
〈그림 4〉 3개층 대칭형 또는 비대칭형 캔틸레버 적층판

최대진동수 $f_{\max} = 500Hz$이상 진동수을 표현하도록 하기 위해 시간단계를 $\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}} = 0.001sec$로 $t = 1.024sec$ 동안 시뮬레이션을 수행한다. 가진스펙트럼 $S_0 = 10^5 N^2 sec$에서 10개의 샘플하중그룹으로 가진시키고, 켄틸레버 자유단의 변위 를 구하여 선형과 비선형, 각 적층각도별로 비교한다.

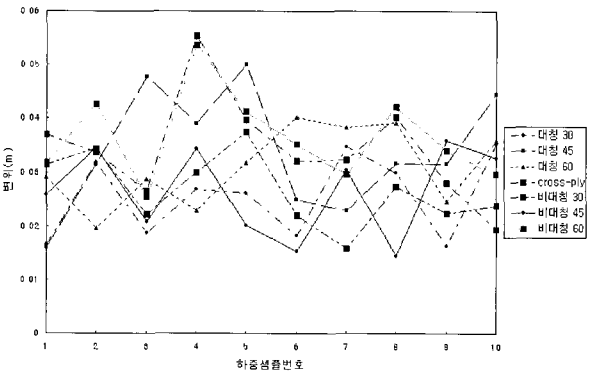
복합재료 Boron/Epoxy Narmco 5505의 재료적 특성은 다음과 같다.(Komm -ineni and Kant 1993)

- 섬유방향의 탄성계수 = 205 GPa
- 섬유수직방향의 탄성계수 = 19 GPa
- 평면 전단 탄성계수 = 6 GPa
- 밀도 = 2000 kg/m^3
- v_{12} = 0.225
- 섬유방향 인장 강도 = 1586 MPa
- 섬유 수직방향 인장강도 = 62.7 MPa
- 섬유방향 압축강도 = 2482 MPa
- 섬유 수직방향 압축강도 = 241 Ma
- 평면 전단강도 = 82.7 MPa

수치해석 결과는 선형과 비선형으로 나누어 보면 cross-ply형의 하중샘플 4에서 최대처짐이 나타난다. 또한 대칭 30°에서 처짐가 상대적으로 적게 나타나고 있다.



〈그림 5〉 선형해석시 각 하중 샘플별 최대변위



〈그림 6〉 비선형해석시 각 하중 샘플별 최대변위

5. 결 론

FRP 복합적층판의 재료비선형을 고려한 해석의 기초연구로써 처짐을 통해 선형해석시와 비선형해석시 결과를 비교하고 적층각도에 따른 처짐을 비교하였다. 선형해석시보다 비선형해석시에 처짐이 전반적으로 증가하는 것으로 나타났다. 이는 선형해석시에 재료계수에 의한 강성을 일정하게 둠으로써 상대적으로 강성이 비선형시보다 크게 고려되어지기 때문이다. 또한 적층각에 있어서 90°로 교차하는 식의 cross-ply형 적층판의 경우는 처짐이 다른 적층각에서 보다 크게 산출되고 있다. 이는 각 판의 방향성이 직각을 이루는 관계로 적층판에서의 강성에 대한 상대적 기여도가 낮아지기 때문이다.

본 연구는 적층판의 재료비선형해석에 있어서 기초자료로써 향후 면내 및 면외방향의 응력과 변형률에 관한 해석을 통해 적층판의 동적거동 특성을 분석하고자 한다.

참고문헌

1. Joowon Kang, "Nonlinear Random Vibration of Laminated FRP Plates Using High-Order Shear Theory", Dissertation for the Degree of Ph.D. Michigan State University, 1998
2. Kuppusamy, T., Nanda A. and Reddy, J. N., "Materially Nonlinnear Analysis Laminated Composite Plates", Composite Structures, Vol.2, 1984, pp.315-328
3. Stephen W. Tsai and H. Thomas Hahn, "Introduction to Composite Materials", Technomic Publishing Company, 1980
4. Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", Taylor & Francis, 1999
5. J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", CRC press, 1997
6. Jagmohan L. Humar, "Dynamics of Structures", Balkema, 2002