

< 논문 >

## 감도계수 반복법을 이용한 비비례감쇠계의 고유치 및 고유벡터 변화량 해석

이 정 윤\*

(2005년 8월 25일 접수, 2006년 2월 8일 심사완료)

### Analysis of Eigenderivative for the Non-Proportional Damped Structure Using the Iterative Method of the Sensitivity Coefficient

Jung Youn Lee

**Key Words:** Complex Eigenvalue(복소고유치), Complex Eigenvector(복소고유벡터), Damped Structure (감쇠구조물), Generalized Mass(일반질량), Generalized Stiffness(일반강성), Sensitivity Analysis(감도 해석), Sensitivity Coefficient(감도 계수)

#### Abstract

This study predicts the modified eigenvectors and eigenvalues of the non-proportional damped structure due to the change in the mass, damping and stiffness of structure by iterative method of the sensitivity coefficient using the original dynamic characteristic. The method is applied to the non-proportional damped 3 degree of freedom system by modifying the mass, damping and stiffness. The predicted dynamic characteristics are showed a good agreement with these from the structural reanalysis using the modified mass, damping and stiffness.

#### 1. 서 론

구조해석을 통하여 얻어진 정적 및 동적 특성이 요구되는 범위를 벗어나게 된 경우 재설계가 이루어진다. 설계를 변경할 경우, 구조의 어느 부분을 얼마나 변경해야 하는가는 매우 어려운 문제이며 많은 시간과 계산이 소요된다.

이 감도해석의 연구들은 비감쇠 구조물과 감쇠 구조물로 나누어지며 비감쇠 구조물의 연구로는 Fox와 Kapoor<sup>(1)</sup>가 고유모드 변화량을 변경 전 구조의 고유모드 선형결합으로서 표시하고 질량 정규화 및 직교성 조건으로부터 감도계수를 결정하여 고유모드의 1차 변화율을 구하였으며, Nelson<sup>(2)</sup>

은 고유벡터를 이용하여 감도계수를 구하는 방법을 제안하였다. 박영필<sup>(3)</sup> 등은 구조물의 고유치해석을 이용하여 유한요소모델 개선 알고리즘을 실현하였고 이장무<sup>(4)</sup> 등은 평판 구조물 결함부에 대하여 감도해석을 이용한 동적 모델링 기법을 제시하였고 박윤식<sup>(5)</sup> 등은 동특성 측정에 의한 유한요소 모델의 신뢰도 제고 및 파손부위 색출에 관한 연구하였다. Bradon<sup>(6)</sup>은 고유진동수의 2차 변화율을 고유진동수의 1차 변화율로부터 구하였고, Wang<sup>(7)</sup>은 모드합성기술의 모드 가속도법을 감도해석에 적용하여 계산정도를 개선하였다.

감쇠구조물의 연구로는 Adhikari<sup>(8)</sup>가 Fox와 Kapoor<sup>(1)</sup>의 방법을 확장하여 해석하였으며 Friswell과 Adhikari<sup>(9)</sup>가 Nelson<sup>(2)</sup>방법을 확장하여 연구하였다. 위의 연구들은 대부분 감도계수를 미분하여 구하였기 때문에 구조 변경량이 많아지면 고유진동수 및 고유벡터 예측에 오차가 증가하게 되었다. 이의 개선을 위해 이정윤<sup>(10)</sup>은 비감쇠구조

\* 회원, 경기대학교 기계시스템디자인공학부  
E-mail : jylee@kgu.ac.kr  
TEL : (031)249-9811 FAX : (031)249-9796

물의 감도계수를 반복법을 사용하여 구한 다음 비감쇠구조물의 변경 후 고유진동수 및 고유벡터 변화를 보다 정확히 예측하였다.

본 연구는 이 방법을 감쇠구조물에 적용하여 구조 변경 후 변경된 고유 진동수 및 고유벡터를 반복법을 사용하여 구조 변경 전의 고유진동수, 고유벡터, 질량, 감쇠 및 강성 변화만으로 정확히 예측할 수 있는 방안을 제시하였다. 타당성을 검증하기 위해 감쇠 3 자유도계에 적용하여 고유진동수 및 고유 벡터 변화량을 예측하고 제해석치와 비교하였다.

## 2. 이론

### 2.1 비비례 감쇠 구조물의 동특성 해석

구조 변경 전, 후의 다자유계의 자유 진동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M_o \frac{d^2 u}{dt^2} + C_o \frac{du}{dt} + K_o u = 0 \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + C \frac{du}{dt} + K u = 0 \quad (2)$$

여기서  $M_o, C_o, K_o$  는 각각 구조 변경 전 질량, 감쇠, 강성 행렬이고  $M, C, K$  는 각각 구조 변경 후 질량, 감쇠, 강성 행렬이며  $u$  는 변위 벡터이다. 식 (1), (2)를 고유치 문제로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\lambda_o^2 M_o + \lambda_o C_o + K_o) \phi_o = 0 \quad (3)$$

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K) \phi = 0 \quad (4)$$

여기서  $\lambda_o, \phi_o$  는 각각 구조 변경전 고유치와 고유벡터이고  $\lambda, \phi$  는 각각 구조 변경 후 고유치와 고유벡터이다. 감쇠 구조물의 고유치와 고유벡터를 구하기 위해 상태 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$-\lambda_o \begin{bmatrix} C_o & M_o \\ M_o & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_o \\ \lambda_o \phi_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_o & 0 \\ 0 & M_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_o \\ \lambda_o \phi_o \end{Bmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$-\lambda \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{Bmatrix} = 0 \quad (6)$$

$$(-\lambda_o M_o + K_o) \psi_o = 0 \quad (7)$$

$$(-\lambda M + K) \psi = 0 \quad (8)$$

여기서

$$\dot{M}_o = \begin{bmatrix} C_o & M_o \\ M_o & 0 \end{bmatrix}, \dot{K}_o = \begin{bmatrix} -K_o & 0 \\ 0 & M_o \end{bmatrix},$$

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \dot{K} = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \psi = \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{Bmatrix},$$

$$\psi_o = \begin{Bmatrix} \phi_o \\ \lambda_o \phi_o \end{Bmatrix} \text{이다.}$$

### 2.2 구조물의 동특성 변화

구조물에 질량, 감쇠와 강성이 변경되면 동특성이 변하게 되며 식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$(-\lambda \dot{M} + \dot{K}) \psi = [-(\lambda_o + \Delta \lambda)(\dot{M}_o + \Delta \dot{M}) + (\dot{K}_o + \Delta \dot{K})](\psi_o + \Delta \psi) = 0 \quad (9)$$

### 2.3 질량, 감쇠 및 강성변경에 의한 등가 감쇠 일반화된 질량의 해석

정규화 시킨  $i$ 차 모드의 등가감쇠 일반화된 질량은 다음과 같다

$$\dot{m}_{oii} = \{\psi_o\}_i^T [\dot{M}_o] \{\psi_o\}_i \quad (10)$$

$$\dot{m}_{ii} = \{\psi\}_i^T [\dot{M}] \{\psi\}_i \quad (11)$$

여기서  $\dot{m}_{oii}, \dot{m}_{ii}$  는 각각  $i$ 차 등가고유벡터의 변경 전 및 변경 후 등가감쇠 일반화된 질량이다. 또한 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{ii} &= \{\psi\}_i^T [\dot{M}] \{\psi\}_i \\ &= \{\psi_o\}_i^T [\dot{M}_o] \{\psi_o\}_i + \{\psi_o\}_i^T [\dot{M}_o] \{\Delta \psi\}_i + \{\psi_o\}_i^T [\Delta \dot{M}] \{\psi_o\}_i + \{\psi_o\}_i^T [\Delta \dot{M}] \{\Delta \psi\}_i + \{\Delta \psi\}_i^T [\dot{M}_o] \{\psi_o\}_i \\ &\quad + \{\Delta \psi\}_i^T [\dot{M}_o] \{\Delta \psi\}_i + \{\Delta \psi\}_i^T [\Delta \dot{M}] \{\psi_o\}_i \\ &\quad + \{\Delta \psi\}_i^T [\Delta \dot{M}] \{\Delta \psi\}_i \end{aligned} \quad (12)$$

또한 등가 고유 벡터의 변화량을 변경 전 등가 고유벡터의 선형결합으로 표시될 수 있다고 가정하면<sup>(1)</sup> 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta \psi\}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \psi_{ok} \quad (13)$$

여기서  $a_{ki}$  는  $i$ 차 등가고유벡터에 대한  $k$ 차 등가고유벡터의 감도 계수로 복소수로 표현된다. 또한  $\Delta \dot{M}_{ij}$  를 등가감쇠 일반화된 질량변화량이라고 정의하면 다음과 같다.

$$\Delta \dot{M}_{ij} = \{\psi_o\}_i^T [\Delta \dot{M}] \{\psi_o\}_j \quad (14)$$

등가감쇠 일반화된 질량  $\hat{m}_{ii}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{m}_{ii} = & \hat{m}_{oii} + a_{ii}\hat{m}_{oii} + \Delta\hat{M}_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ik} \\ & + a_{ii}\hat{m}_{oii} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \hat{m}_{okk} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ki} \\ & + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{qk} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (10), (11)에서 정규화된 등가감쇠 일반화된 질량은 1이므로 식 (15)에서  $a_{ii}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} 1 = & 1 + a_{ii} + \Delta\hat{M}_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ik} + a_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \\ & + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ki} + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{qk} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_{ii} = & -\frac{1}{2} \left( \Delta\hat{M}_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ik} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{ki} + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{qk} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

한편  $\hat{m}_{ij}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{m}_{ij} = & \{\psi\}_i^T [\hat{M}] \{\psi\}_j \\ = & \hat{m}_{oij} + a_{ij}\hat{m}_{oii} + \Delta\hat{M}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{M}_{ik} + a_{ji}\hat{m}_{ojj} \\ & + \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \hat{m}_{okk} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{kj} \\ & + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{M}_{qk} \end{aligned} \quad (18)$$

정규화된 등가감쇠 일반화된 질량  $\hat{m}_{oij}=0$ ,  $\hat{m}_{oii}=1$  이므로 식 (18)은

$$\begin{aligned} a_{ij} + a_{ji} = & - \left\{ \Delta\hat{M}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{M}_{ik} + \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{M}_{kj} + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{M}_{qk} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

이다.

#### 2.4 질량, 감쇠 및 강성변경에 의한 등가 감쇠 일반화된 강성의 해석

정규화 시킨 등가감쇠 일반화된 강성은 다음과 같다

$$\hat{k}_{oii} = \{\psi_o\}_i^T [\hat{K}_o] \{\psi_o\}_i = \lambda_{oi}^2 = \omega_{oi}^2 \quad (20)$$

$$\hat{k}_{ii} = \{\psi\}_i^T [\hat{K}] \{\psi\}_i = \lambda_i^2 = \omega_i^2 \quad (21)$$

여기서  $\hat{k}_{oii}$ ,  $\hat{k}_{ii}$ 는 각각  $i$ 차 등가고유벡터의

변경 전 및 변경 후 일반화된 강성이며  $\omega_i^2$ ,

$\omega_{oi}^2$ 는 각각  $i$ 차 등가고유벡터의 변경 전 및 변경 후의 고유진동수이다. 또한 변경 후  $i$ 차 등가감쇠 일반화된 강성은 다음과 같이 된다.

$$\hat{k}_{ii} = \omega_i^2 = \{\psi\}_i^T [\hat{K}] \{\psi\}_i \quad (22)$$

한편  $\Delta\hat{K}_{ij}$ 를 등가감쇠 일반화된 강성변화량이라고 정의하면 다음과 같다.

$$\Delta\hat{K}_{ij} = \{\psi_o\}_i^T [\Delta\hat{K}] \{\psi_o\}_j \quad (23)$$

식 (22)의  $\hat{k}_{ii}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ii} = & \hat{k}_{oii} + a_{ii} \hat{k}_{oii} + \Delta\hat{K}_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{K}_{ik} \\ & + a_{ii} \hat{k}_{oii} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \hat{k}_{okk} + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{K}_{ki} \\ & + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{K}_{qk} \end{aligned} \quad (24)$$

한편  $\hat{k}_{ij}$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ij} = & \{\psi\}_i^T [\hat{K}] \{\psi\}_j \\ = & \hat{k}_{oij} + a_{ij} \omega_{oi}^2 + \Delta\hat{K}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{K}_{ik} + a_{ji} \omega_{oj}^2 \\ & + \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{K}_{kj} \\ & + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{K}_{qk} \end{aligned} \quad (25)$$

정규화된 등가감쇠 일반화된 강성  $\hat{k}_{oij}=0$ ,  $\hat{k}_{ij}=0$ 이므로 식 (25)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_{ij} \omega_{oi}^2 + a_{ji} \omega_{oj}^2 = & - \left[ \Delta\hat{K}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{K}_{ik} \right. \\ & + \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\hat{K}_{kj} \\ & \left. + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta\hat{K}_{qk} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

#### 2.5 반복법을 이용한 감도 계수 해석

먼저 질량, 감쇠 및 강성 변경에 의한 등가고유벡터 변화가 없다고 가정하여 1차 감도계수  $a_{ii}$ ,  $a_{ij}$ 를 구하고 반복법을 이용해 감도 계수  $a_{ij}$ ,  $a_{ij}$ 를 수렴할 때까지 구한다.

$a_{ij}^{(m)}$ 은  $m$ 번 반복해서 구한 감도계수라고 정의하고 감도계수가 미소량이라고 가정하면 식 (17)

로부터 1차 감도계수  $a_{ij}^{(1)}$ 는 다음과 같다.

$$a_{ii}^{(1)} = -\Delta\dot{M}_{ii}/2, \quad i=j \quad (27)$$

또한 식 (19)와 (26)의 감도계수에 대한 연립방정식으로부터 1차 감도계수  $a_{ij}^{(1)}$ 는 다음과 같다.

$$a_{ij}^{(1)} = (-\Delta\dot{M}_{ij}\omega_{oj}^2 + \Delta\dot{K}_{ij}) / (\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2), \quad i \neq j \quad (28)$$

식 (17)에서  $a_{ii}^{(m+1)}$ 은 다음과 같이 된다.

$$a_{ii}^{(m+1)} = -\frac{1}{2} \left\{ \Delta\dot{M}_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} \Delta\dot{M}_{ik} + \sum_{k=1}^n (a_{ki}^{(m)})^2 + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} \Delta\dot{M}_{ki} + \sum_{q=1}^n a_{qi}^{(m)} \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} \Delta\dot{M}_{qk} \right\}, \quad i=j \quad (29)$$

같은 방법으로 식 (19), (26)을 연립으로 풀면  $a_{ij}^{(m+1)}$ 은 다음과 같이 된다.

$$a_{ij}^{(m+1)} = \left\{ \Delta\dot{K}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj}^{(m)} \Delta\dot{K}_{ik} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} a_{kj}^{(m)} \omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} \Delta\dot{K}_{kj} + \sum_{q=1}^n a_{qi}^{(m)} \sum_{k=1}^n a_{kj}^{(m)} \Delta\dot{K}_{qk} \right\} / (\omega_{oj}^2 - \omega_{oi}^2) - \omega_{oj}^2 \left\{ \Delta\dot{M}_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj}^{(m)} \Delta\dot{M}_{ik} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} a_{kj}^{(m)} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} \Delta\dot{M}_{kj} + \sum_{q=1}^n a_{qi}^{(m)} \sum_{k=1}^n a_{kj}^{(m)} \Delta\dot{M}_{qk} \right\} / (\omega_{oj}^2 - \omega_{oi}^2), \quad i \neq j \quad (30)$$

### 2.6 고유치 변화 예측

고유치 변화 해석은 식 (24)로부터 다음과 같이 된다.

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 (1 + 2a_{ii}) + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 a_{ki}^2 + \Delta\dot{K}_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\dot{K}_{ik} + \sum_{q=1}^n a_{qi} \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta\dot{K}_{qk} \quad (31)$$

### 2.7 등가고유벡터 변화 예측

등가고유벡터의 변화는 식 (13)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\{\psi\} = \{\psi_o\} + \{\Delta\psi\}, \quad \psi_i = \psi_o + \sum_{k=1}^n a_{ki} \psi_{ok} \quad (32)$$

### 3. 적용 예

Fig. 1은 3 자유도 감쇠계의 모델로 변경 전 질량은 각각  $m_1=1\text{kg}$ ,  $m_2=3\text{kg}$ ,  $m_3=2\text{kg}$ , 감쇠는  $c_1=0.2\text{Ns/m}$ ,  $c_2=0.1\text{Ns/m}$ ,  $c_3=0.3\text{Ns/m}$ 과 강성은  $k_1=1\text{N/m}$ ,  $k_2=1\text{N/m}$ ,  $k_3=2\text{N/m}$ 로 하였다. 질량변경량은 각각  $\Delta m_1=0.4\text{kg}$ ,  $\Delta m_3=-0.5\text{kg}$ , 감쇠변경량은  $\Delta c_1=0.1\text{Ns/m}$ ,  $\Delta c_2=0.2\text{Ns/m}$ ,  $\Delta c_3=0.2\text{Ns/m}$ 와 강성변경량은  $\Delta k_2=0.5\text{N/m}$ ,  $\Delta k_3=0.4\text{N/m}$ 로 하여 비비례감쇠계로 하였다. 3자유도계의 질량, 감쇠, 강성행렬은 다음과 같으며 이를 이용하여 감도해석을 하였다.

$$[M_o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\Delta M] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K_o] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\Delta K] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.9 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$[C_o] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.4 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$[\Delta C_o] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

변화량에 대한 예측 정도  $E_{st}$ 는 아래와 같이 나타내었다.

$$E_{st} = \frac{(z_b - z_o)}{(z_e - z_o)} \quad (33)$$

여기서,  $z_b$ 는 구조 변경 후 예측치,  $z_e$ 는 구조 변경 후 이론치,  $z_o$ 는 구조 변경 전 이론치이며  $E_{st}$ 가 1에 가까울수록 정도가 좋다.

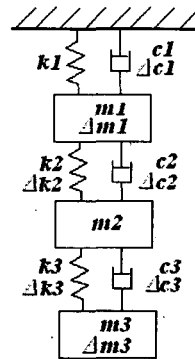


Fig. 1 Model of the damped 3 degree of freedom system

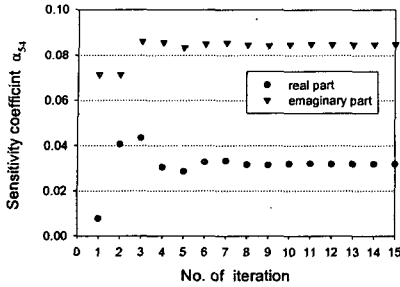


Fig. 2 Sensitivity coefficient according to the No. of iteration

4. 결과 및 고찰

4.1 감도계수의 해석

Fig. 2는 구조변경 후 (27)식에서 (30)식까지를 이용하여 반복 횟수에 따른 감도계수  $\alpha_{54}$ 를 나타낸 그림으로 반복 횟수는 15번까지 하였다. 감도계수가 복소수이므로 실수부분과 허수부분을 동시에 나타내었으며 초기치의 경우 오차가 많이 발생하였으나 반복 횟수가 증가할수록 감도계수가 일정한 값에 수렴하므로 제안한 반복법이 타당함을 확인할 수 있었다.

Table 1은 실수 부분과 허수 부분의 감도계수를 나타낸 표로 반복 횟수는 100번으로 하였다. 감도계수는 3자유도계의 상태방정식으로 표현되므로 6x6 행렬이 되었다. 절대 값 기준으로 실수부분에서 가장 큰 감도계수의 값은  $\alpha_{64}$ 로 -0.5658이었고 허수 부분에서는  $\alpha_{54}$ 로 0.08487이었다. 대체로 모드  $i, j$ 가 가까울수록 감도계수의 값이 컸으며 이는 식 (30)에서 고유진동수가 근접할수록 분모가 작아지기 때문이다.

4.2 고유치의 변화 검토

Table 2는 Table 1의 감도계수를 식 (31)에 대입하여 고유치의 변화를 예측한 표로 감쇠행렬이 존재하므로 3쌍의 켈레복소수로 표현된다.

실수부분은 감쇠정도를 나타내며 허수부분이 감쇠고유치를 의미한다. 즉 감쇠가 없을 경우 실수부분은 0이 되며 허수부분이 고유치를 나타낸다. 식 (33)을 이용하여 계산한 고유치 변화량의 예측정도는 1차에서 6차 까지 모두 100%로 구조변경 후 고유치 변화를 잘 예측함을 알 수 있었다.

Table 1 Sensitivity coefficient of the 3 degree of freedom

(a) Real part

		mode $i \times 10^{-1}$					
mode $j \times 10^{-1}$	0.3889	-0.1203	0.4613	0.0327	0.4739	0.0413	
	-0.1203	0.3889	0.0327	0.4613	0.0413	0.4739	
	-2.8243	0.3142	-1.3078	-0.2765	3.2598	-0.0587	
	0.3142	-2.8234	-0.2765	-1.3078	-0.0587	3.2598	
	0.8238	-0.0601	-5.6583	0.3209	-1.3699	-0.3781	
	-0.0601	0.8238	0.3209	-5.6583	-0.3781	-1.3699	

(b) Imaginary part

		mode $i \times 10^{-1}$					
mode $j \times 10^{-1}$	-0.1261	-0.6197	0.0434	0.2613	0.0285	0.3000	
	0.6197	0.1261	-0.2613	-0.0434	-0.3000	-0.0285	
	0.2955	0.1764	-0.3540	-0.2245	0.0792	0.2641	
	-0.1742	-0.2955	0.2245	0.3540	-0.2641	-0.0792	
	-0.0371	-0.5699	0.1922	0.8487	-0.4118	-0.3341	
	0.5699	0.0371	-0.8487	-0.1922	0.3341	0.4118	

Table 2 Comparison of natural frequencies by modifying structure in 3 degree of freedom system

		modification			Est. (%)
mode No.		before	after	pro-posed	
Proposed	1,2	-0.0690 ±0.6453i	-0.1053 ±0.5840i	-0.1053 ±0.5840i	100.00
	3,4	-0.0786 ±0.8036i	-0.1155 ±0.7516i	-0.1155 ±0.7516i	100.00
	5,6	-0.0772 ±3.3043i	-0.1333 ±2.9282i	-0.1333 ±2.9282i	100.00

4.3 등가고유벡터의 변화 검토

Table 3는 구조변경 전, 후의 모드별 등가고유벡터를 나타낸 표이다. 모드 1, 2, 모드 3, 4, 모두 5, 6의 등가고유 벡터가 켈레 복소수이다. 이는 Table 2에서 고유치가 켈레 복소수를 이루기 때문이다.

(a)는 구조 변경 전 등가고유벡터이며 (b)는 구조 변경 후 재 해석한 등가고유벡터이고 (c)는 구조 변경 후 식 (32)를 사용하여 예측한 등가 고유벡터이다. 구조 변경 후 등가 고유벡터가 변경

**Table 3** Comparison of eigenvectors by modifying structure in damped 3 degree of freedom system

(a) Before modification  $\Psi_{ij}$

mode					
1	2	3	4	5	6
0.1967 +0.2024i	0.1967 -0.2024i	0.2503 +0.2552i	0.2503 -0.2552i	0.3263 +0.3190i	0.3263 -0.3190i
0.3812 +0.3807i	0.3812 -0.3807i	0.1206 +0.1153i	0.1206 -0.1153i	-0.1171 -0.1239i	-0.1171 +0.1239i
0.4196 +0.4190i	0.4196 -0.4190i	-0.2197 -0.2212i	-0.2197 +0.2212i	0.0883 +0.0878i	0.0883 -0.0878i
0.0598 -0.0609i	0.0598 +0.0609i	0.2843 -0.3394i	0.2843 +0.3394i	0.4352 -0.5522i	0.4352 +0.5522i
0.1124 -0.1180i	0.1124 +0.1180i	0.1276 -0.1626i	0.1276 +0.1626i	-0.1707 +0.1998i	-0.1707 -0.1998i
0.1238 -0.1299i	0.1238 +0.1299i	-0.2462 +0.2975i	-0.2462 -0.2975i	0.1200 -0.1497i	0.1200 +0.1497i

(b) After modification  $\Psi_{ij}$

mode					
1	2	3	4	5	6
0.2354 +0.2411i	0.2354 -0.2411i	0.3047 +0.3084i	0.3047 -0.3084i	0.1591 +0.1424i	0.1591 -0.1424i
0.3717 +0.3710i	0.3717 -0.3710i	0.0235 +0.0104i	0.0235 -0.0104i	-0.1456 -0.1488i	-0.1456 +0.1488i
0.4015 +0.3995i	0.4015 -0.3995i	-0.2016 -0.1986i	-0.2016 +0.1986i	0.1861 +0.1934i	0.1861 -0.1934i
0.0785 -0.0839i	0.0785 +0.0839i	0.3400 -0.4577i	0.3400 +0.4577i	0.1886 -0.3064i	0.1886 +0.3064i
0.1207 -0.1324i	0.1207 +0.1324i	0.0088 -0.0326i	0.0088 +0.0326i	-0.2032 +0.2860i	-0.2032 -0.2860i
0.1299 -0.1430i	0.1299 +0.1430i	-0.2178 +0.3017i	-0.2178 -0.3017i	0.2651 -0.3664i	0.2651 +0.3664i

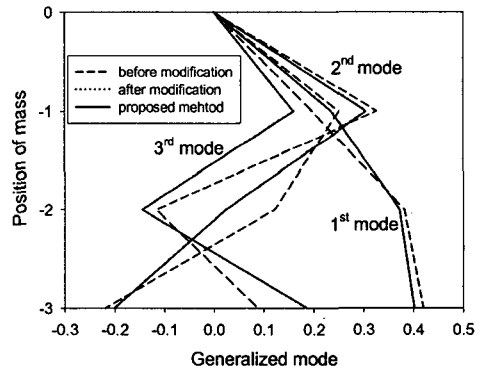
(c) Proposed method  $\Psi_{ij}$

mode					
1	2	3	4	5	6
0.2354 +0.2411i	0.2354 -0.2411i	0.3047 +0.3084i	0.3047 -0.3084i	0.1591 +0.1424i	0.1591 -0.1424i
0.3717 +0.3710i	0.3717 -0.3710i	0.0235 +0.0104i	0.0235 -0.0104i	-0.1456 -0.1488i	-0.1456 +0.1488i
0.4015 +0.3995i	0.4015 -0.3995i	-0.2016 -0.1986i	-0.2016 +0.1986i	0.1861 +0.1934i	0.1861 -0.1934i
0.0785 -0.0839i	0.0785 +0.0839i	0.3400 -0.4577i	0.3400 +0.4577i	0.1886 -0.3064i	0.1886 +0.3064i
0.1207 -0.1324i	0.1207 +0.1324i	0.0088 -0.0326i	0.0088 +0.0326i	-0.2032 +0.2860i	-0.2032 -0.2860i
0.1299 -0.1430i	0.1299 +0.1430i	-0.2178 +0.3017i	-0.2178 -0.3017i	0.2651 -0.3664i	0.2651 +0.3664i

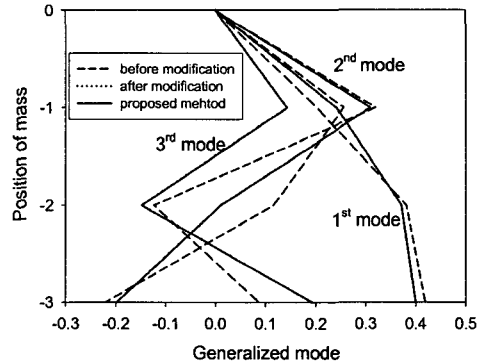
**Table 4** Comparison of mode shapes by modifying structure in damped 3 degree of freedom system

(a) After modification (b) Proposed method

$\Phi_{ij}$			$\Phi_{ij}$		
mode			mode		
1	2	3	1	2	3
0.2354 +0.2411i	0.3047 +0.3084i	0.1591 +0.1424i	0.2354 +0.2411i	0.3047 +0.3084i	0.1591 +0.1424i
0.3717 +0.3710i	0.0235 +0.0104i	-0.1456 -0.1488i	0.3717 +0.3710i	0.0235 +0.0104i	-0.1456 -0.1488i
0.4015 +0.3995i	-0.2016 -0.1986i	0.1861 +0.1934i	0.4015 +0.3995i	-0.2016 -0.1986i	0.1861 +0.1934i



(a) Real part



(b) Imaginary part

**Fig. 3** Variation of mode shape by modifying structure in damped 3 degree of freedom system

되었음에도 불구하고 (c)에서 예측한 값이 (b)의 값과 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 4는 3자유도계에서 해석한 고유벡터의 실수부분 변화를 나타낸 표로 Table 3에 있는 모드에서 켈레 복소수 중 한 모드를 인 1, 3, 5모드를 선택하고 식 (5)에서  $\psi_0 = \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \lambda_0 \phi_0 \end{Bmatrix}$  이므로 열 방향으로는 위에서부터 3번째까지 택하여 모드를 나타낸 표이다.

Fig. 4는 Table 4에 있는 3자유도계의 고유모드의 실수부분과 허수부분을 질량위치에 따라 나타낸 그림이다. 1차 모드에서는 노드점이 없으며 2차 모드에서는 한 개의 노드점이, 3차 모드에서는 2개의 노드점이 존재하였다. 변경 후 재해석한 고유 모드와 새로 제안한 방법으로 해석한 고유모드가 1차, 2차, 3차 모드 모두 일치하여 두 곡선이 겹쳐 실선으로 그려져 있음을 알 수 있어 여기서 제안한방법의 타당성을 검증할 수 있었다.

## 5. 결론

질량, 감쇠 및 강성의 변경에 따른 감쇠구조물의 감도해석을 새로 제안한 방법을 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 감쇠구조물 변경 시 감도계수 변화를 비선형 부분까지 고려하여 해석하였으며 반복법을 사용하여 감도계수를 구하는 방법을 제시하였다.

(2) 감도계수를 이용하여 감쇠구조물의 고유치 및 고유벡터의 변화량을 정확히 예측할 수 있는 알고리즘을 개발하였다.

(3) 알고리즘을 구조 변경한 3자유도 감쇠계에 적용한 결과 고유치 및 고유벡터의 변화량을 잘 예측하여 새로 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

## 후 기

본 연구는 2005학년도 경기대학교 교원교비 지원에 의하여 수행되었음.

## 참고문헌

- (1) Fox, R. S. and Kapoor, M. P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12, pp. 2426~2429.
- (2) Nelson, R. B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (3) Kim, H. and Park, Y., 1999, "Updating Algorithms of Finite Element Model Using Singular Value Decomposition and Eigenanalysis," *Transactions of the KSNVE*, Vol. 9, No. 1, pp. 163~173.
- (4) Lee, J. M., Lee, J. W. and Sung, M. H., Fritzen, C. P., 1992, "A study on Dynamic Modelling of Joint in Plate Structure," *Transactions of the KSNVE*, Vol. 2, No. 1, pp. 61~66.
- (5) Park, Y. S. and Park, H. S., 1984, "A Study on Improving the Reliability of a Finite Elements Model and Stiffness Damage Detection by Dynamic Characteristics Measurements," *Transactions of KSME A*, Vol. 10, No. 1, pp. 157~163.
- (6) Brandon, J., 1991, "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 1, pp. 135~139.
- (7) Wang, B. P., 1991, "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 6, pp. 1018~1020.
- (8) Adhikari, S. 1999, "Rate of Changed of Eigenvalues and Eigenvectors in Damped Dynamic System," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 11, pp. 1452~1458.
- (9) Friswell, M. I. and Adhikari, S., "Derivatives of Complex Eigenvectors Using Nelson's Method," *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 12, pp. 2355~2357.
- (10) Lee, J. Y., 2002, "A Structural Eigenderivative Analysis by Modification of Design Parameter," *Transactions of KSME*, Vol. 26, No. 4, pp. 739~744.