

이산푸리에 변환과 시계열데이터의 고속 파라미터 추정

A Fast Parameter Estimation of Time Series Data Using Discrete Fourier Transform

沈冠埴* · 南海鯤†
(Kwan-Shik Shim · Hae-Kon Nam)

Abstract - This paper describes a method of parameter estimation of time series data using discrete Fourier transform(DFT). DFT have been mainly used to precisely and rapidly obtain the frequency of a signal. In a dynamic system, a real part of a mode used to learn damping characteristics is a more important factor than the frequency of the mode. The parameter estimation method of this paper can directly estimate modes and parameters, indicating the characteristics of a dynamic system, on the basis of the Fourier transform of the time series data. Real part of a mode estimates by subtracting a frequency of the Fourier spectrum corresponding to 0.707 of a magnitude of the peak spectrum from a peak frequency, or subtracting a frequency of the power spectrum corresponding to 0.5 of the peak power spectrum from a peak frequency, or comparing the Fourier(power) spectrum ratio. Also, the residue and phase of time signal calculate by simple equation with the real part of the mode and the power spectrum that have been calculated. Accordingly, the proposed algorithm is advantageous in that it can estimate parameters of the system through a single DFT without repeatedly calculating a DFT, thus shortening the time required to estimate the parameters.

Key Words : Time Signal, Parameter, Mode, Residue, Frequency, Power Spectrum, Fourier Spectrum

1. 서 론

최근 컴퓨터 통신 기술의 발달로 연속적인 신호를 디지털 신호로 변환하여 처리하는 디지털신호처리 기술이 빠르게 성장하였다. 신호처리 분야에서 가장 중요한 알고리즘 중에 하나인 이산푸리에 변환(discrete Fourier transform, DFT)은 디지털 신호를 주파수영역에서 분석하고 처리할 때, 필수적인 알고리즘으로 1960년대에 고속푸리에 변환(fast Fourier transform, FFT) 알고리즘이 개발되고, 컴퓨팅 기술이 발전하면서 오늘날 다양한 산업분야에 광범위하게 적용되고 있다[1-3].

DFT는 디지털 신호나 시계열(time series) 데이터를 주기 함수로 변환하여 신호 속에 내포되어 있는 주파수를 찾는 것으로 주기신호는 주파수 성분들이 고조파 성분들로만 구성되어 있으므로 선스펙트럼으로 표현되고, 비주기신호는 임의의 주파수 성분을 갖는 사인 함수나 지수함수들의 적분으로 나타낼 수 있으므로 스펙트럼은 연속적으로 표현된다.

선형시불변 시스템을 포함한 동적시스템(dynamic system) 해석에 모드해석법이 많이 적용되고 있는데, 계산된 주파수는 주로 DFT를 이용하여 검증하고 있다. 제동계수의 영향을 고려한 동적시스템해석에서는 1Hz 근처의 낮은 주파수

대역이 주요 관심 주파수 대역이고, 모드의 주파수와 함께 동적특성을 파악할 수 있는 제동계수 및 주파수에 대응하는 크기와 위상도 중요한 파라미터들이다. 이산신호에서 파라미터를 추정하기 위하여 다양한 파라미터 추정기법들이 제안되고 있는데, 크게 파라메트릭 법(parametric method)과 비파라메트릭 법(non-parametric method)으로 분류할 수 있다[4]. 비 파라메트릭법은 DFT에 기초를 두고 모델을 추정하므로 계산시간이 빠르고 알고리즘이 단순하다. 반면에 파라메트릭 법은 이산데이터를 자동회귀이동평균(auto regression moving average, ARMA) 모델로 변환하여 복소지수함수를 계산하는 방법으로 주파수해석에 기초한 비파라메트릭 법보다 비교적 정확한 반면 계산시간이 많이 소요된다.

이 논문에서는 DFT의 스펙트럼에서 직접 복소지수함수로 근사하는 푸리에변환에 기초한 빠른 파라미터 추정 방법을 제안하고 있다. 만일 신호가 비주기적이라면 DFT의 스펙트럼은 연속적으로 표현된다. 대부분의 자연계의 신호는 비주기적이므로 이상적이라면 스펙트럼은 연속적으로 표현된다. 또한 DFT에서 발생하는 중요한 주파수에 대응하는 모든 첨두 스펙트럼을 복소지수함수로 가정하면, 각각의 스펙트럼으로부터 모드를 얻을 수 있다. 그리고 푸리에 스펙트럼이나 전력스펙트럼에서 첨두치와 첨두주파수 및 모드 사이에 일정한 수학적 관계에서 모드의 실수부를 추정하고, 추정된 모드 이용하여 신호의 residue와 위상을 계산할 수 있는 새로운 파라미터 추정 방법을 개발하였다.

이 논문에서 제안한 방법은 한 번의 DFT를 통해서 파라미터를 추정할 수 있는 수식에 기초한 매우 직관적이고 단순한 방법으로 DFT 계산시간에 단순 산술계산 및 첨두치

† 교신저자, 正會員 : 全南大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
E-mail : hknam@chonnam.ac.kr

* 正會員 : 全南大 工業技術研究所 前任研究員 · 工博
接受日字 : 2006年 2月 19日
最終完了 : 2006年 6月 1日

탐색 알고리즘만 추가되므로 계산시간이 매우 빠르다. DFT에서 직접 파라미터를 추정하는 새로운 기법을 간단한 시험 함수에 적용하여 알고리즘의 효율성과 제안한 기법의 신뢰성을 검증하였다.

II. 수학적 배경

2.1. 이산푸리에변환

연속함수에 대한 푸리에변환 식과 역변환 식은 다음과 같다.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

실제 시계열데이터로 주어진 신호는 주기적인 신호보다 비주기 신호인 경우가 대부분이다. 구간 $0 \leq n \leq N-1$ 에 정의된 신호 $x[n]$ 의 이산푸리에변환은,

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=1}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ 이며, 스펙트럼 계수 $X[k]$ 는 구간 $0 \leq n \leq N-1$ 에서 정의 된다.

만일 샘플링(sampling)간격을 T 라하고, 시간영역 T_0 시간 안에 있는 비주기 신호를 N 개로 샘플링 하였을 때, $T_0 = NT$ 초로 표시된다. 즉, 이 신호의 스펙트럼은 주파수 영역에서 $1/NT$ [Hz] 또는 $2\pi/NT$ [rad/sec]로 나타난다[1].

2.2. 지수감쇠함수의 푸리에변환

연속함수 $x(t)$ 가 다음과 같이 주파수 ω_1 을 가진 정현파 함수와 지수함수의 곱으로 이루어진 함수라 할 때, 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) \quad (4)$$

이를 푸리에 변환하면(Appendix A.1), 스펙트럼 $X(\omega)$ 는 복소함수로 표현되고, 그 크기와 위상은 각각 다음과 같다.

$$X_\omega = \frac{A \omega_1}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad (5)$$

$$\phi_\omega = -\arctan \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2} \quad (6)$$

식 (5)-(6)에서 X_ω 는 복소 푸리에 스펙트럼 $X(\omega)$ 의 크기이고, ϕ_ω 는 푸리에 스펙트럼의 위상이다.

그리고 전력스펙트럼(power spectrum)은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_\omega = \frac{A^2 \omega_1^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (7)$$

이 식에서 P_ω 는 전력 스펙트럼을 의미한다. 이 논문에서는 기호에 대한 표현을 일관성 있게 하기 위하여 푸리에 스펙트럼의 크기를 X_ω 로 표현한 것과 같이 전력 스펙트럼 $P(\omega)$ 도 첨자를 이용하여 P_ω 로 표현한다.

지금까지 기술한 사인 지수감쇠함수같이 코사인 지수감쇠함수도 유사하게 나타낼 수 있다. 연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 을 가진 코사인 함수와 제동계수 α 를 가진 지수함수의 곱으로 이루어진 함수라 할 때, 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t) \quad (8)$$

이를 푸리에 변환하면(Appendix A.1), 스펙트럼과 위상은,

$$X_\omega = \frac{A \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad (9)$$

$$\phi_\omega = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2}\right) \quad (10)$$

과 같이 나타낼 수 있고, 전력스펙트럼은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$P_\omega = \frac{A^2(\alpha^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (11)$$

만일 사인 또는 코사인 지수감쇠함수에서 주파수 $\omega = \omega_1$ 이고, $\omega_1 \gg \alpha$ 이 성립할 때, 전력스펙트럼 $P_{\omega_1} = A^2/(4\alpha^2)$ 이 된다. 따라서 주파수 ω_1 에서 제동계수 α 가 작을수록 전력스펙트럼 P_{ω_1} 은 커지고, 스펙트럼은 다른 스펙트럼보다 날카롭게 표현된다.

III. 푸리에변환에서 파라미터 추정

주어진 시계열 데이터에 DFT를 적용하면 빠르고 정확하게 데이터에 포함된 관심 있는 주파수를 알 수 있다. 대부분의 시계열 데이터가 정현파가 아니므로 시계열 데이터의 지배적인 주파수 부근에서 전력스펙트럼이나 스펙트럼의 크기는 연속적인 포락선 형태를 가진다.

(Assumption)

시계열 데이터의 이산푸리에변환에서 모든 첨두주파수(peak frequency) 부근의 스펙트럼은 크기 A 와 제동계수 α 를 가진 복소지수함수 $f(t)$ 로 역변환 될 수 있다.

$$f(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) \quad \text{or}$$

$$f(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t)$$

(Proof) Appendix A.2

3.1. 주파수 추정

이산푸리에변환에서 침두스펙트럼에 대응하는 침두주파수는 이산신호에 포함되어 있는 중요 주파수를 나타낸다. 따라서 Assumption에서 기술한 것과 같이 푸리에 스펙트럼에서 침두주파수를 중심으로 제동계수와 크기를 추정하면, 이때 침두주파수가 계산하고자 하는 추정주파수가 된다. 한편 이산푸리에변환에서 주파수는 매우 쉽게 추정할 수 있는데, 이 논문에서는 침두치가 발생하는 침두주파수를 중요 파라미터 중 하나로 선택함으로써 FFT의 장점을 최대로 이용할 수 있다.

3.2. 제동계수 추정

3.2.1. 전력스펙트럼과 제동계수

연속함수 $x(t)$ 가 아래와 같이 제동계수 α 를 가진 지수감쇠함수라 할 때,

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) \quad (12)$$

주파수 $\omega = \omega_1 \pm \alpha$ 에서 전력스펙트럼 $P_{\omega_1 \pm \alpha}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{\omega_1 \pm \alpha} = \frac{A^2 \omega_1^2}{4\alpha^2 \{ \omega_1^2 + (\omega_1 \pm \alpha)^2 \}} \quad (13)$$

만일 $\omega_1 \gg \alpha$ 일 때,

$$\begin{aligned} P_{\omega_1} &= \frac{A^2}{4\alpha^2} \\ P_{\omega_1 \pm \alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{4\alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로

$$P_{\omega_1 \pm \alpha} = \frac{1}{2} P_{\omega_1} \quad (15)$$

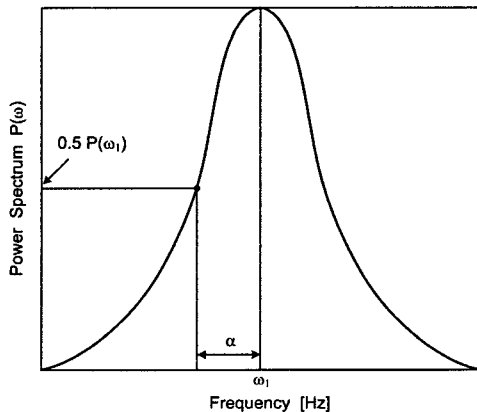


그림 1 전력 스펙트럼과 제동계수
Fig 1 Power Spectrum & Damping Factor

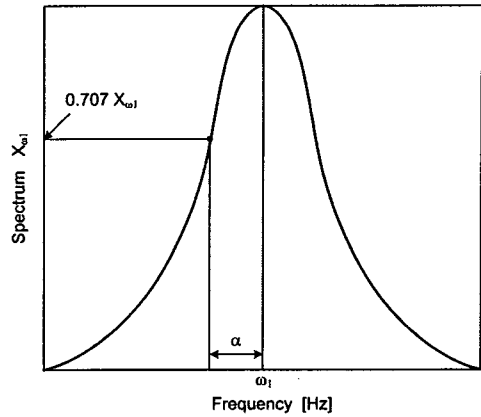


그림 2 푸리에 스펙트럼과 제동계수
Fig 2 Fourier Spectrum & Damping Factor

이 식은 침두전력스펙트럼 P_{ω_1} 의 50%에 대응하는 전력스펙트럼의 주파수와 침두주파수 ω_1 의 차가 모드의 실수부임을 의미한다. 즉, 전력스펙트럼 $0.5P_{\omega_1}$ 에 대응하는 주파수를 ω_α 라 할 때, 진동모드의 실수부는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = |\omega_1 - \omega_\alpha| \quad (16)$$

지금까지 기술한 결과는 식 (8)과 같은 지수감쇠코사인함수에 대해서도 성립한다. 식 (11)에 나타난 지수감쇠코사인함수의 전력스펙트럼에서 각주파수가 제동계수보가 훨씬 큰 값을 가지고 있으면, 즉 $\omega_1 \gg \alpha$ 가 성립하면, 식(15)와 동일한 결과를 얻는다. 그러므로 임의의 시계열데이터의 DFT에서 침두값에 대한 전력스펙트럼을 사인이나 코사인 형태의 지수감쇠함수로 모의해도 같은 제동계수를 얻는다.

3.2.2. 푸리에 스펙트럼과 제동계수

지금까지 기술한 전력스펙트럼에 대한 결과는 스펙트럼의 크기 X_ω 에서도 유사하게 유도할 수 있다. 식(5)에서 $\omega = \omega_1 + \alpha$ 이고, $\omega_1 \gg \alpha$ 일 때, 스펙트럼의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_{\omega_1 + \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A}{2\alpha} \right) \quad (17)$$

그러므로 스펙트럼 X_{ω_1} 과 $X_{\omega_1 + \alpha}$ 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$X_{\omega_1 + \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_{\omega_1} \quad (18)$$

양변을 제곱하면, 전력스펙트럼에서 얻은 결과인 $P_{\omega_1 \pm \alpha} = 0.5 P_{\omega_1}$ 과 정확하게 같음을 알 수 있다. 그러므로 스펙트럼의 크기를 사용해서도 전력스펙트럼과 동일한 결과를 얻을 수 있다.

3.2.3. 전력스펙트럼의 비와 제동계수

주파수 $\omega = \omega_1$ 에서 전력스펙트럼 P_{ω_1} 과 $\omega = \omega_2$ 에서의 전력스펙트럼 P_{ω_2} 의 비를 r_p 라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_p = \frac{P_{\omega_2}}{P_{\omega_1}} \quad (r_p < 1) \quad (19)$$

식 (7)에서 주파수 $\omega = \omega_2$ 일 때, 전력스펙트럼은 다음과 같다.

$$P_{\omega_2} = \frac{(A\omega_1)^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (2\alpha\omega_2)^2} \quad (20)$$

이 식을 식 (19)에 대입하고 정리하면, 다음과 같은 2차 방정식을 얻을 수 있다.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (21)$$

여기에서 각 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a &= r_p - 1 \\ b &= 2r_p(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 4\omega_1^2 \\ c &= r_p(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \end{aligned}$$

그리고 모드의 실수부 α 와 2차 방정식의 근 x 사이에 관계는,

$$\alpha = \sqrt{x} \quad (22)$$

그러므로 침두 주파수 근처의 적당한 주파수 ω_2 에 대응하는 전력스펙트럼과 침두 전력스펙트럼으로부터 x 와 α 를 계산할 수 있으므로 모드의 실수부를 얻을 수 있다. 이와 같이 전력스펙트럼의 비를 이용하면 신호의 크기 향을 소거하고 순수하게 주파수와 전력스펙트럼에 의해서 모드의 실수부가 결정된다.

3.2.4. 스펙트럼의 비와 제동계수

주파수 ω_1, ω_2 에서 푸리에 스펙트럼의 크기를 각각 $X_{\omega_1}, X_{\omega_2}$ 라 하고, 두 스펙트럼의 비를 다음과 같이 정의한다.

$$r_s = \frac{X_{\omega_2}}{X_{\omega_1}} \quad (r_s < 1) \quad (23)$$

따라서 전 절의 식 (19)에 나타난 전력스펙트럼의 비 r_p 와 푸리에 스펙트럼의 비 r_s 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$r_p = r_s^2 \quad (24)$$

그러므로 푸리에 스펙트럼의 비 r_s 를 이용해서 전력스펙트럼과 유사하게 제동계수를 추정할 수 있다. 즉 r_s 를 계산하고, 이를 식 (21)-(22)에 대입하여 파라미터의 제동계수를 추정할 수 있다.

3.3. 신호의 residue 추정

식 (7)에서 전력스펙트럼은 다음과 같다.

$$P_\omega = \frac{(A\omega_1)^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (25)$$

주파수 $\omega = \omega_1$ 에서

$$P_{\omega_1} = \frac{(A\omega_1)^2}{\alpha^4 + (2\alpha\omega_1)^2} \quad (26)$$

일반적으로 측정된 시계열 데이터에서는 각 주파수에 대응하는 시간함수의 크기를 알 수 없다. 식 (26)에서 크기 A 에 대해서 정리하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$A = \frac{\alpha \sqrt{(\alpha^2 + 4\omega_1^2)P_{\omega_1}}}{\omega_1} \quad (27)$$

이를 푸리에 스펙트럼 크기로 표현하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$A = \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + 4\omega_1^2} X_{\omega_1}}{\omega_1} \quad (28)$$

만일 $\omega_1 \gg \alpha$ 일 때, 이 식은 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$A = 2\alpha X_{\omega_1} \quad (29)$$

즉, 스펙트럼의 침두값은 A 에 비례하고 α 에 반비례함을 알 수 있다. α 가 0에 근접한 경우 즉, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} X_{\omega_1} \cong \infty$ 로 접근함을 알 수 있다.

3.4. 신호의 위상

연속함수 $x(t)$ 가 아래와 같이 제동계수 α 와 위상 ϕ_1 를 가진 지수감쇠코사인함수라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (30)$$

(Theorem 1)

주파수 ω_1 에 대응하는 위상 ϕ_1 를 가진 지수감쇠코사인함수에서 푸리에 스펙트럼의 위상을 $\angle X(\omega_1)$ 이라 할 때, 위상 ϕ_1 은 푸리에변환 한 스펙트럼 $X(\omega_1)$ 의 위상과 같다.

$$\phi_1 = \angle X(\omega_1) \quad (31)$$

(Proof) Appendix A.3

지금까지 침두주파수 ω_1 에서 신호에 포함된 파라미터를 추정하는 수학적 전개를 하였다. 만일 신호에 다수의 모드가 포함되어 여러 개의 침두치가 발생할 때, 각 침두치/침두주파수에 대해서 지금까지 기술한 지수감쇠함수 적합 방법을 적용하여 각각의 중요 파라미터를 추정할 수 있다. 한편 이산푸리에 변환 결과 근접한 모드가 존재할 경우, 즉 하나의 침두치 근처에 다른 침두치가 존재할 때, 두 모드는 서로 영향을 주어 추정한 파라미터에 오차를 포함할 수 있다. 이 경우에는 각 침두치를 중심으로 좌우스펙트럼에서 영향을 받지 않는 스펙트럼으로부터 파라미터를 추정하면 오차를 감소할 수 있다.

IV. 간단한 예와 검증

지금까지 기술한 푸리에 변환에 의한 파라미터 추정 방법을 아래와 같이 단순한 지수감쇠코사인함수에 적용하여 그 효율성을 검증하였다. 이 논문에서는 새로운 파라미터 추정에 대한 이론적 개발에 주안점이 있어 알고리즘의 비교나 상세한 오차해석 보다는 제안한 이론 검증을 중심으로 기술한다.

$$y_t = 5.0e^{-0.1t} \cos(4.2t + 30^\circ) \quad (32)$$

이 함수에 대해서 시간 간격을 1/60초로 설정하고, 30초 동안 취득한 데이터($N=1796$)를 그림 3에 나타내었다.

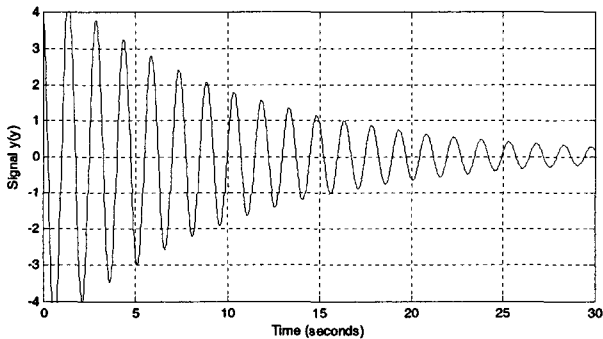


그림 3 시간 응답
Fig 3 Time Response

4.1. 주파수 추정

그림 3에 나타난 시계열데이터에 이산 푸리에 변환을 적용한 결과, 그림 4와 같은 푸리에 스펙트럼과 평균전력스펙트럼을 얻었다. 그림에서 최대 전력스펙트럼은 1099.5이고, 스펙트럼의 크기는 1405.2를 가지고 있으며, 각 주파수에 대한 평균전력스펙트럼이 비교적 대칭적이어서 스펙트럼의 누설이 적음을 알 수 있다.

주파수 0.667[Hz] 근처에서 침두 스펙트럼이 형성되므로 중요 주파수는 4.19[rad/sec]임을 알 수 있다. 정확한 주파수는 4.2[rad/sec]이므로 푸리에변환 결과 정확하게 주파수를 추정함을 알 수 있다.

4.2. 제동계수 추정

한편 3.2절에서 기술한 방법을 이용해서 제동계수를 추정하였다. 먼저 3.2.1절과 3.2.2절에서 기술한 스펙트럼의 크기를 이용해서 제동계수를 구한 결과, 푸리에 스펙트럼과 전력스펙트럼에서 각각 0.106, 0.125를 가지고 있어 스펙트럼의 크기에 의한 결과가 전력스펙트럼보다 더 정확함을 알 수 있다. 또한 스펙트럼의 비와 전력스펙트럼 비를 이용해서 제동계수를 구한 결과, 각각 0.091과 0.082를 계산하여 이 경우에도 전력스펙트럼보다는 스펙트럼의 결과가 더 정확함을 알 수 있다. 정확한 값이 0.1이므로 푸리에 스펙트럼에 의해서 직접 추정한 제동계수가 가장 정확함을 알 수 있다. 이것은 전력스펙트럼이 스펙트럼의 제곱을 해서 계산하므로 오차가 가중된 것으로 생각할 수 있고, 그림 4에서 침두치 근처에서 스펙트럼의 침두값보다 전력스펙트럼의 침두값이 더 급변하므로 전력스펙트럼이 오차가 크게 발생함을 알 수 있다.

결과적으로 푸리에 스펙트럼에서 추정한 모드는 $-0.106 + j4.19$ 이고, 정확한 값은 $-0.1 + j4.2$ 이므로 근사치로 모드를 추정함을 알 수 있다.

4.3. Residue 추정

신호의 residue는 3.3절에 정의된 식 (29)로부터 추정할 수 있다. 정규화한 푸리에 스펙트럼과 위에서 추정한 모드 $-0.106 + j4.19$ 에 대응하는 신호의 residue 추정한 결과, 4.975를 계산하였다. 정확한 값은 5.0이므로 상당히 근사하게 residue를 추정함을 알 수 있다.

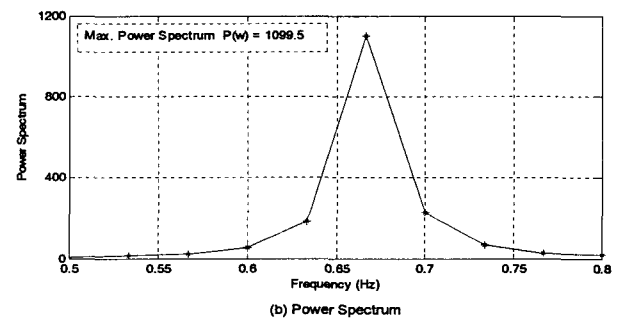
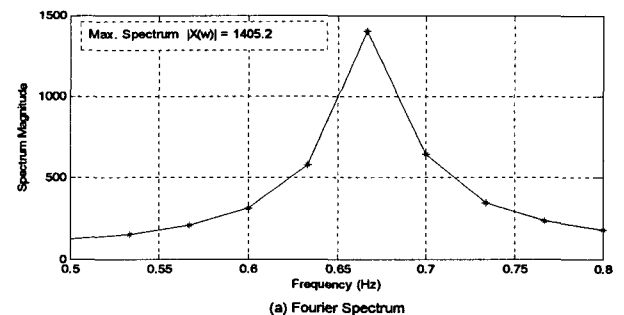


그림 4 푸리에스펙트럼과 평균전력스펙트럼
Fig 4 Fourier Spectrum & Average Power Spectrum

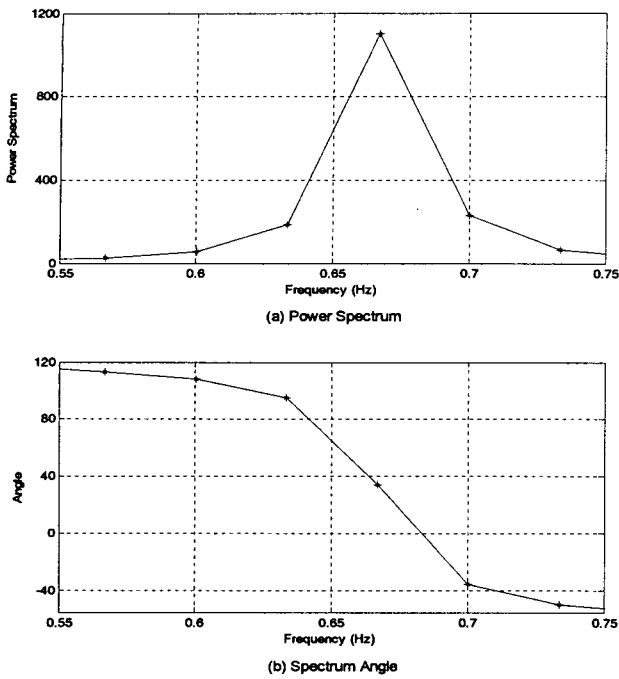


그림 5 평균전력스펙트럼과 위상
Fig 5 Average Power Spectrum & Phase

4.4 위상 추정

제 3.4절에 정의된 신호의 위상을 추정하는 식 (31)을 이용하여 주파수 4.2[rad/sec]에 대응하는 신호의 위상을 추정한 결과 32.207°를 계산하였다. 실제 정확한 값은 30.0°이므로 급변하는 위상에 대해서 상당히 정확하게 위상을 추정할 수 있다. 그림 5에는 첨두 전력스펙트럼에 대응하는 위상이 나타나 있다.

4.5. 스펙트럼 누설의 영향

이산 푸리에 변환은 데이터 수와 구간간격에 따라서 주파수 해상도가 민감한 영향을 받는다. 그림 6은 시간구간을 1/60초로 동일하게 설정하고, 전체 시간을 30초부터 60초까지 10초씩 증가하면서 푸리에 변환을 한 경우이다. 그림 6(a)에 나타나있는 푸리에 스펙트럼에서 30초와 60초에서는 스펙트럼 누설이 작기 때문에 비교적 대칭적으로 스펙트럼이 형성되어 있다. 따라서 이 경우에 위상은 그림 6(b)를 비교해 보면 거의 같은 값을 가지고 있음을 알 수 있고 정확한 값 30.0°근처에 위상이 존재함을 알 수 있다. 반면 40s와 50s에서 스펙트럼은 비대칭성이 심하고 특히 50s인 경우에는 첨두값이 명확하지 않다. 즉 푸리에변환 결과 스펙트럼의 누설이 심하여 정확한 첨두값을 계산할 수 없고 이 경우에 위상도 오차를 수반한다. 비교적 누설이 작은 경우인 40s인 경우 위상은 약 11°이고, 스펙트럼 누설이 가장 큰 경우인 50s에서 위상은 약 58°정도로 추정되어 상당한 오차를 수반하고 있다.

결과적으로 푸리에 변환을 이용한 파라미터 추정에서 가장 중요한 요소 중에 하나는 이산푸리에 변환 결과 특정주

파수에서 스펙트럼 누설이 적어야 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

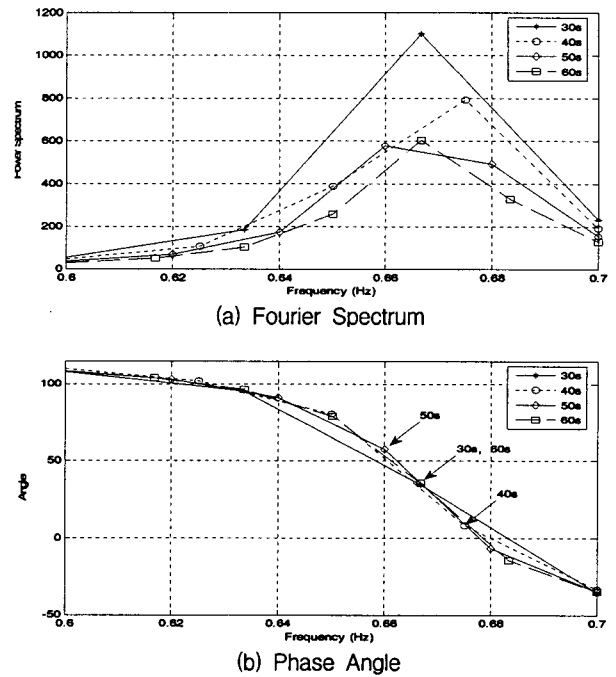


그림 6 푸리에 스펙트럼과 위상
Fig 6 Fourier Spectrum & Phase

V. 결 론

이 논문에서는 푸리에 변환으로부터 시계열데이터에 포함되어 있는 파라미터를 추정하는 새로운 방법에 대해서 기술하고 있다.

정현파지수감쇠함수의 푸리에 변환에 기초를 두고 푸리에 스펙트럼으로부터 파라미터를 추정하는 직접적인 방법을 제안하고 있는데, 이산푸리에 변환의 장점을 이용할 수 있으므로 신호에 포함되어 있는 중요 주파수를 빠르게 추정할 수 있다. 또한 스펙트럼의 첨두치와 첨두주파수 사이에 일정한 수학적 관계에서 모드의 실수부를 추정할 수 있는 방법을 제안하였다. 그리고 추정한 모드를 이용하여 신호의 residue와 위상을 계산할 수 있는 방법을 제안하였다.

이 논문에서 제안한 파라미터 추정방법은 수식에 기반을 둔 매우 단순한 알고리즘으로 계산속도가 매우 빠르므로 실시간 연산에 매우 적합한 알고리즘이다. 간단한 시험함수에 적용한 결과, 매우 빠르게 근사치 모드 추정하여 향후 실시간 시계열데이터의 파라미터 추정에 매우 중요한 역할을 할 것으로 기대된다.

감사의 글

이 연구는 산업자원부 및 고려대학교 전력시스템기술연구센터 지원에 의해 수행되었음.

참 고 문 헌

[1] W. L. Briggs, V. E. Henson, The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform, SIAM, Philadelphia, 1995.
 [2] K. B. Howell, Principles of Fourier Analysis, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.
 [3] P. A. Lynn, W. Fuerst, Introductory Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
 [4] L. Ljung, System Identification, Theory for The User, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1999.
 [5] L. L. Scharf, Statistical Signal Processing : Detection, Estimation, and Time Series Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1991.

Appendix

A.1. Fourier Transform of Exponential Damped Function

연속함수 $x(t)$ 가 다음과 같이 제동계수 α 로 이루어진 지수함수라 하자.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \quad (A.1)$$

이 함수의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) &= \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \quad (A.2) \\ &= \frac{A}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

• Exponential Damped Sine Function

연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 을 가진 사인 함수와 제동계수 α 로 이루어진 지수함수의 곱으로 이루어진 함수라 하자.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) \quad (A.3)$$

이 식의 푸리에 변환은 frequency shifting theorem[1-4]을 적용하면 쉽게 구할 수 있다. Frequency shifting theorem은 시간함수 $x(t)$ 에 $e^{j\omega_0 t}$ 를 곱하여 푸리에 변환한 결과는 시간함수 $x(t)$ 의 푸리에 변환에서 주파수 ω 를 ω_0 만큼 이동한 것과 같다. 즉,

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} x(t)] = X(\omega - \omega_0) \quad (A.4)$$

이 식으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathcal{F}[x(t) \sin(\omega_0 t)] = j \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] \quad (A.5)$$

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \quad (A.6)$$

그러므로 식 (A.3)을 푸리에 변환하면, 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$X(\omega) = \frac{A \omega_1}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega} \quad (A.7)$$

스펙트럼 $X(\omega)$ 는 복소함수로 나타나며 그 크기와 위상은 각각 다음과 같다.

$$X_w = \frac{A \omega_1}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad (A.8)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2}\right) \quad (A.9)$$

전력스펙트럼 P_w 는,

$$P_w = \frac{A^2 \omega_1^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (A.10)$$

• Exponential Damped Cosine Function

사인 함수와 동일한 과정을 코사인 함수에도 적용할 수 있다. 연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 을 가진 코사인 함수와 제동계수 α 로 이루어진 지수함수의 곱으로 이루어진 함수라 하자.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t) \quad (A.11)$$

이 식의 푸리에 변환은 식 (A.6)을 이용하여 다음과 같이 쉽게 유도할 수 있다.

$$X(\omega) = \frac{A(\alpha + j\omega)}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega} \quad (A.12)$$

스펙트럼 $X(\omega)$ 는 복소함수로 나타나며, 그 크기와 위상은 각각 다음과 같다.

$$X_w = \frac{A \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad (A.13)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2}\right) \quad (A.14)$$

전력스펙트럼 P_w 는,

$$P_w = \frac{A^2(\alpha^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (A.15)$$

A.2. Assumption Proof

시계열 데이터의 이산푸리에변환에서 모든 침두주파수 부근의 스펙트럼은 크기 A 와 제동계수 α 를 가진 복소지수함

수 $f(t)$ 로 역변환 될 수 있다.

$$f(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t)$$

or

$$f(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t)$$

비주기적인 신호의 푸리에 변환은 모든 점에서 연속적이므로 첨두주파수 부근의 스펙트럼 또한 연속적이다. 이산 푸리에 역변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (A.16)$$

만일 $k=m$ 일 때, 첨두주파수 $\omega_1 = 2\pi mn/N$ 이면, $x[n \pm p]$ 는,

$$x[n \pm p] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k(n \pm p)/N} \quad (A.17)$$

로 나타낼 수 있다. 그리고 첨두주파수를 중심으로 표현하면, 크기와 위상각만 바뀌게 된다.

$$x[n \pm p] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(\omega_1 \pm \frac{2\pi}{N})} \quad (A.18)$$

그러므로 $x[n]$ 은 항상 복소지수함수가 되고, 따라서 모든 첨두주파수 부근의 스펙트럼은 크기 A 와 제동계수 α 를 가진 복소지수함수 $f(t)$ 로 역변환 될 수 있다.

A.3. Proof of Theorem 1

연속함수 $x(t)$ 가 제동계수 α 와 주파수 ω_1 , 위상 ϕ_1 를 가진 지수감쇠코사인함수라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (A.19)$$

이 식을 푸리에 변환 하면,

$$X(\omega) = \frac{A(\alpha + j\omega)\cos\phi_1 - A\omega_1\sin\phi_1}{\alpha^2 + \omega^2 - \omega_1^2 + j2\alpha\omega} \quad (A.20)$$

주파수 ω_1 에 대응하는 위상을 ϕ_1 이라하고, 제동계수가 작아서 $\omega_1 \gg \alpha$ 이 성립할 때, 이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(\omega_1) = \frac{A(\alpha\cos\phi_1 - \omega_1\sin\phi_1) + jA\omega_1\cos\phi_1}{j2\alpha\omega_1} \quad (A.21)$$

이 식을 정리하면, 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$X(\omega_1) = \frac{A}{2\alpha} (\cos\phi_1 + j\sin\phi_1) \quad (A.22)$$

그러므로 스펙트럼의 크기 X_{ω_1} 과 각도 $\angle X(\omega_1)$ 을 분리하여 표현하면 다음과 같다.

$$X_{\omega_1} = \frac{A}{2\alpha} \quad (A.23)$$

$$\angle X(\omega_1) = \phi_1 \quad (A.24)$$

따라서 주파수 ω_1 에 대응하는 위상 ϕ_1 을 가진 지수감쇠코사인함수에서 위상은 스펙트럼의 위상과 같다.

저 자 소 개



심관식 (沈冠植)

1965년 8월 24일생. 1991년 전남대학교 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1997년~2004년 서남대 전기전자공학과 조교수

E-mail : simgong@ieee.org



남해곤 (南海鯤)

1950년 10월 16일생. 1975년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1980년 Univ. of Houston 졸업(석사). 1986년 Univ. of Texas at Austin 졸업(박사). 1975년~1978년 한국전력 원자력건설부 근무. 1986년~1988년 한국전기연구소 근무. 1988년~현재 전남대 전기공학과 교수

Tel : 062-530-1745

Fax : 062-530-1749

E-mail : hknam@chonnam.chonnam.ac.kr