

# Lyapunov 강인 안정성 조건을 이용한 강인 최적 뱅뱅 제어기

## Robust Optimal Bang-Bang Controller Using Lyapunov Robust Stability Condition

임 채 욱\*, 박 영 진, 문 석 준, 박 윤 식

(Chae-Wook Lim, Youngjin Park, Seok-Jun Moon, and Youn-Sik Park)

**Abstract** : There are mainly two types of bang-bang controllers for nominal linear time-invariant (LTI) system. Optimal bang-bang controller is designed based on optimal control theory and suboptimal bang-bang controller is obtained by using Lyapunov stability condition. In this paper, the suboptimal bang-bang control method is extended to LTI system involving both control input saturation and structured real parameter uncertainties by using Lyapunov robust stability condition. Two robust optimal bang-bang controllers are derived by minimizing the time derivative of Lyapunov function subjected to the limit of control input. The one is developed based on the classical quadratic stability(QS), and the other is developed based on the affine quadratic stability(AQS). And characteristics of the two controllers are compared. Especially, bounds of parameter uncertainties which theoretically guarantee robust stability of the two controllers are compared quantitatively for 1DOF vibrating system. Moreover, the validity of robust optimal bang-bang controller based on the AQS is shown through numerical simulations for this system.

**Keywords** : robust optimal bang-bang controller, quadratic stability, affine quadratic stability, bounds of parameter uncertainties

### 1. 서론

기계공학, 항공우주공학, 토목/건축공학, 화학공학 등의 공학 분야에서 제어 구동 장치의 포화를 고려한 능동 제어 방법들이 실제적으로 고려되어야 하는 경우가 종종 있게 된다[1]. 여기에는 항공우주 분야나 반도체 제조 분야에서의 미소 능동 진동 시스템, 선박이나 고층 건물과 같은 대형 구조물의 능동 진동 시스템 등 광범위하게 그 고려 대상 영역이 적용된다. 기대치 않게 매우 큰 외란들은 제어 구동 장치의 최대 허용치를 넘는 포화를 일으킬 수 있다. 또한 제어 대상 구조물의 파라미터들의 값들(강성, 질량 등)은 설계자가 정확히 모르는 경우가 많으므로, 제어기의 설계 시에 가정한 수학적인 모델과 실제 구조물과는 모델링 오차가 생기게 되고 이 때의 오차는 불확실성으로 제어기의 설계 시에 고려되어야 한다. 또한 이런 대부분의 파라미터 불확실성은 시간에 따라 변하는 것이 아니므로 시불변 불확실성으로 가정할 수 있다. 본 논문에서는 제어입력의 한계와 선형계의 시불변 파라미터 불확실성을 동시에 고려하는 강인 최적 뱅뱅 제어기(robust optimal bang-bang controller)를 다루고자 한다.

제어입력의 한계를 고려한 방법 중 가장 대표적인 방법이 뱅뱅 제어 방법이다. 공칭 선형 시불변계에 대한 뱅뱅

제어 방법에는 크게 두 가지의 방법이 있다. 먼저 이 두 방법 중 가장 기초가 되는 방법은 최적 뱅뱅제어 (optimal bang-bang control)이다[2-4]. 이는 최적제어 이론과 Pontryagin의 최소 원리에 바탕을 둔 것으로 제어입력에 제한 조건을 두어 이차의 성능 지수를 최소화함으로 최적의 제어입력을 구하는 방법이다. 하지만 이 이론은 제어입력이 계의 상태의 함수로 표현되지 않기 때문에 실제 적용하기에 어려운 단점이 있다. 따라서 이의 단점을 해결하기 위하여 제안된 두 번째 방법이 준최적 뱅뱅 제어(suboptimal bang-bang control)이다[5]. 이는 Lyapunov 안정성 조건을 이용한 것으로 제어입력 제한 조건 하에서 Lyapunov 함수의 시간 미분치를 최소화하는 최적의 제어입력을 구하는 방법으로, 제어입력이 계의 상태의 함수로 표현되어 실제 적용하기에 유용한 장점을 가진다.

본 논문에서는 공칭 선형 시불변계에서의 준최적 뱅뱅 제어 방법의 원리를 파라미터 불확실성이 존재하는 불확실한 선형계로 확장하여, 제어입력의 한계와 구조적 파라미터 불확실성(structured real parameter uncertainty)이 동시에 존재하는 선형 시불변계에 대한 강인 최적 뱅뱅 제어기를 다룬다. 파라미터 불확실성을 구조적 파라미터 불확실성으로 표현하는 방법은 모델링 오차의 불확실성을 상태공간으로 표현하는데 유용하며, 파라미터 불확실성의 상하한을 정해줄 수 있는 장점이 있다. 불확실한 계에 대하여 Lyapunov 강인 안정성을 정의하는 방법이 크게 두 가지가 있다. 하나는 이차 안정성(QS; Quadratic Stability)으로 파라미터를 수학적으로 시변으로 간주하는 방법이고, 다른 하나는 유사 이차 안정성(AQS; Affine Quadratic Stability)으로 파라미터를 수학적으로 시불변 또는 시변으로 간주하는 방법이다. 계의 불확실성을 수학적으로 시변으로 두고 접근하는 경우는 수학

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 10. 14., 채택확정 : 2006. 1. 9.

임채욱 : KAIST 기계공학과 박사 후 연구원

(chwhlim@kaist.ac.kr)

박영진, 박윤식 : KAIST 기계공학과 교수

(yjpark@kaist.ac.kr/yspark0117@kaist.ac.kr)

문석준 : 한국기계연구원 선임연구원(sjmoon@kimm.re.kr)

※ 본 연구는 “중소형 MD-ARS 설계 기술 개발”과제, 국가지정연구사업(NRL : M10500000112-05J0000-1121) 및 두뇌한국사업(Brain Korea 21)의 지원으로 수행되었음.

적으로 다루기가 용의하여 해석적으로 쉽고 제어기의 설계가 간단한 장점이 있지만, 시불변 불확실성을 시변으로 간주함으로 인한 보수성이 크게 증가되어 해의 존재 영역이 좁아져서 파라미터 불확실성의 상하한이 좁아지는 단점을 가진다. 이에 반해 계의 불확실성을 수학적으로 시불변으로 다루는 경우는 시불변 불확실성을 시변으로 간주함으로 인한 보수성을 제거하게 되어 해의 존재 영역이 시변 불확실성을 다루는 경우보다 훨씬 넓어져서 파라미터 불확실성의 상하한이 매우 넓어지는 장점이 있지만, 수학적으로 다루기가 복잡하여 해석적으로 어려워지고 제어기의 설계가 복잡해지는 단점이 있다. 본 논문에서는 QS와 AQS의 강인 안정성을 각각 이용한 두 개의 강인 최적 뱅뱅 제어기를 새로이 제시하고 제어기의 특성을 비교한다. 그리고 1자유도 진동계에 대하여 두 제어기의 해가 존재하기 위한 강성과 질량의 파라미터 불확실성의 상하한을 정량적으로 비교한다. 또한 AQS를 이용한 제어기의 타당성을 1자유도 진동계에 대한 수치실험을 통하여 보인다.

**II. 준최적 뱅뱅 제어기[5]**

먼저 공칭 선형 시불변계에 대하여 Lyapunov 안정성 조건을 이용하여 설계되어지는 준최적 뱅뱅 제어기를 살펴보자. 이는 제어입력 제한 조건 하에서 Lyapunov 함수의 시간 미분치를 최소화하는 최적의 제어입력을 구하는 방법이다.

다음 (1)의 공칭 선형 시불변계를 고려해보자.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

여기서  $A_0$ 는  $n \times n$  크기의 공칭 시스템 행렬,  $B$ 는  $n \times 1$  크기의 제어입력 벡터,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는  $n \times 1$  크기를 가지는 상태 벡터이고, 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{\max}$ 로 (2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

$$|u(t)| \leq u_{\max} \tag{2}$$

계의 상태에 대한 2차 함수의 형태인 Lyapunov 함수를 (3)과 같이 정의한다.

$$V(x(t)) = x^T(t)P_0x(t) \tag{3}$$

여기서  $P_0$ 는 양정대칭행렬이다.

(3)의 Lyapunov 함수를 시간에 대하여 미분하면 (4)와 같다.

$$\dot{V}(x) = x^T(A_0^T P_0 + P_0 A_0)x + 2x^T P_0 B u \tag{4}$$

(2)의 제어입력 제한조건을 만족시키면서 (4)를 최소화하는 최적 제어입력은 (5)와 같다.

$$u(t) = -u_{\max} \cdot \text{sgn}[B^T P_0 x(t)] \tag{5}$$

여기서  $P_0$ 는 (6)의 LMI(Linear Matrix Inequality)를 만족한다.

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 < 0 \tag{6}$$

시스템 행렬  $A_0$ 가 안정하면 (6)을 만족하는 양정대칭행

렬  $P_0$ 는 항상 존재한다. 일반적으로 (6)의 LMI를 푸는 대신에 양정대칭인 가중행렬  $Q$ 를 도입하여 (7)의 Lyapunov 행렬 등식으로부터 행렬  $P_0$ 를 쉽게 구할 수 있다.

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 = -Q \tag{7}$$

**III. 이차 안정성과 강인 최적 뱅뱅 제어기**

**1. 이차 안정성(QS; Quadratic Stability)**

여기에서는 불확실한 선형계의 불확실성을 수학적으로 시변으로 다루는 경우를 살펴본다. 시변 불확실성인 경우는 QS의 정의를 이용해서 제어기를 쉽게 구할 수 있다. 만약에 불확실성을 수학적으로 시변으로 다루었을 때 QS를 만족하는 불확실성의 상하한이 충분히 크면, 시불변 불확실성을 시변으로 간주함으로 인한 보수성은 있지만 제어기를 쉽게 구할 수 있게 된다. 다음에서 다룰 불확실한 파라미터에 의존적인 Lyapunov 함수(parameter dependent Lyapunov function)를 이용한 제어기의 설계 방법들이 최근 10여 년간 본격적으로 연구되기 전까지는 사실 시불변 불확실성을 다룰 해석적 방법이 별로 없었다. 많은 연구가들이 시변 불확실성을 수학적으로 다루기 위해서 시간영역의 접근 방법인 QS를 연구하였는데[6-14], 이 방법은 불확실한 파라미터에 독립적인 Lyapunov 함수(parameter independent Lyapunov function)를 이용한다. 다음 (8)의 시변 불확실성을 가지는 선형계를 고려해보자.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{8}$$

여기서  $A_0$ 는  $n \times n$  크기의 공칭 시스템 행렬이고,  $\Delta A(t)$ 는 시변 불확실성이고,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는  $n \times 1$  크기를 가지는 상태 벡터이다.

(8)의 불확실한 선형계에 대하여 Lyapunov 함수를 정의할 때 양정대칭행렬  $P$ 는 (9)와 같이 불확실한 파라미터에 독립적이고 고정된 한 값을 가지도록 표현한다.

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \tag{9}$$

(8)의 불확실한 선형계를 고려할 때 모든 가능한 시변 불확실성  $\Delta A(t)$ 의 범위와 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여,  $V(x(t)) > 0$ 이고  $dV(x(t))/dt < 0$ 를 만족하는 (9)로 정의되는 Lyapunov 함수가 존재한다면 이 불확실한 선형계는 이차 안정하다고 말한다.

정의 1: 이차 안정성(QS; Quadratic Stability) [6]

모든 가능한 시변 불확실성  $\Delta A(t)$ 에 대하여 (10)을 만족하는 양정대칭행렬  $P$ 와 양수  $\alpha$ 가 존재한다면, (8)의 시변 불확실성을 가지는 선형계는 이차 안정하다.

$$(A_0 + \Delta A(t))^T P + P(A_0 + \Delta A(t)) \leq -\alpha I \tag{10}$$

**2. 강인 최적 뱅뱅 제어기**

여기에서는 앞에서 정의된 QS 정의를 이용하여 시변 불확실성을 가지는 선형계에 대한 강인 최적 뱅뱅 제어기를 제한한다. 이는 공칭계에 대한 기존의 준최적 뱅뱅 제어기

의 설계 방법의 원리를 불확실한 선형계로 확장한 것이다.

(11)과 같이 시스템 행렬에 시변 불확실성이 있는 선형계에 제어입력이 있는 경우를 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (11)$$

여기서  $B$ 는 제어입력 벡터이고, 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{max}$ 로 (2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

(11)의 불확실한 선형계에 대한 Lyapunov 함수를 (9)와 같이 둔다. (11)의 불확실한 선형계와 (9)의 Lyapunov 함수에 대하여 앞의 QS를 적용한다. Lyapunov 함수를 시간에 대하여 미분하면 (12)가 얻어진다.

$$\dot{V}(x) = x^T [(A_0 + \Delta A)^T P + P(A_0 + \Delta A)]x + 2x^T P Bu \quad (12)$$

(2)의 제어입력의 제한조건을 만족시키면서 (12)를 최소화하는 최적의 제어입력은 (13)과 같다. (14)를 만족하는 행렬  $P$ 가 존재한다면 (12)의 첫째 항은 항상 0보다 작고, (13)을 (12)에 대입하면 (12)의 둘째 항도 항상 0보다 작다. 그러므로 (13)의 제어입력은 (12)를 항상 0보다 작게 한다.

$$u(t) = -u_{max} \cdot \text{sgn}[B^T P x(t)] \quad (13)$$

여기서  $P$ 는 (14)를 만족하는 양정대칭행렬이다.

$$(A_0 + \Delta A(t))^T P + P(A_0 + \Delta A(t)) < 0 \quad (14)$$

시변 불확실성을 가지는 선형계에 대한 (13)의 강인 최적 뱅뱅 제어기의 형태는 (5)의 공칭 선형 시불변계에 대한 제어기의 형태와 같다. 단지 행렬  $P$ 는 시변 불확실성의 상하한 내의 모든 영역에서 성립해야 하므로, 불확실성의 상하한이 커질수록 행렬  $P$ 가 존재하는 영역이 공칭 선형 시불변계의 해인 행렬  $P_0$  보다 점점 더 좁아지게 된다.

### 3. 구조적 시변 불확실성의 상하한

시변 불확실성  $\Delta A(t)$ 가 구조적 파라미터 불확실성인 경우, 많은 연구자들이 시간 영역의 접근 방법인 QS에 대한 연구를 수행하여 다양한 보증된 비용 바운드들 (guaranteed cost bounds)이 개발되어졌다. 이 중에 (9)와 같이 불확실한 파라미터에 독립적인 Lyapunov 함수를 고려한 것으로는 이차 바운드(quadratic bound[6-8]), 절대값 바운드 (absolute value bound[9]), 선형 바운드(linear bound[10-12]), 역 바운드(inverse bound[13]), 정점 LMI 바운드(vertex LMI bound[14,15]) 등이 있다. 이 중 정점 LMI 바운드는 일반적으로 이 방법들 중에서 가장 덜 보수적인 방법으로 알려져 있으므로, 본 논문에서는 정점 LMI 바운드에 대해서 살펴 보도록 한다.

정점 LMI 바운드는 (15)와 같이  $k$  개의 불확실성을 가지는  $\Delta A(t)$ 를 폴리토픽 불확실성(polytopic uncertainty)으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + \Delta A(t))x(t), \\ \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^k \delta_i(t) A_i, \quad |\delta_i(t)| \leq \delta_{mi} \end{aligned} \quad (15)$$

정리 1 [15]: (15)의 시스템이 이차 안정하기 위한 필요 충분조건은 양정대칭행렬  $P$ 가 (16)의  $2^k$  개의 LMI를 만족하는 것이다.

$$A_0^T P + P A_0 \pm \sum_{i=1}^k \delta_{mi} (A_i^T P + P A_i) < 0 \quad (16)$$

### 4. 1자유도 진동계에 대한 예

여기에서는 강인 최적 뱅뱅 제어기 (13)의 해 행렬  $P$ 가 존재하는 불확실성의 상하한이 어느 정도인지를 수치적으로 확인한다. Fig. 1과 같은 질량( $m$ )-강성( $s$ )-감쇠( $c$ )를 가지는 1자유도 진동계(고유 진동수  $w_n = \sqrt{s/m}$ , 감쇠비  $\zeta_n = c/2mw_n$ )에 대하여 강성과 질량의 구조적 불확실성의 상하한이 어느 정도인가를 살펴보자. 이 경우에 시스템 행렬은  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{s}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\zeta_n w_n \end{bmatrix}$ 이다. 다음에서  $\zeta_0$ ,  $w_0$ ,  $s_0$ ,  $m_0$ 는 각각 공칭 시스템에서의 감쇠비, 고유 진동수, 강성 그리고 질량을 나타낸다. 수치적인 계산은 상용 프로그램인 MATLAB<sup>®</sup>에서 제공하는 LMI toolbox[16]를 이용하였다. 그리고 수치적인 값은  $w_0 = 2\pi \text{rad/sec}$ 를 사용했을 때의 결과이지만, 다른 값의  $w_0$ 의 값에 대해서도 이와 동일한 결과임을 확인할 수 있었다.

#### 4.1 강성에 불확실성이 있는 경우

불확실성이 있는 강성은  $s = s_0(1 + \alpha_s(t))$ , 강성의 불확실성의 상하한을  $|\alpha_s(t)| \leq \alpha_{sm}$ 으로 두면,  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_s(t)w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.  $\delta_1(t) = \alpha_s(t)$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$ 으로 두고, 정리 1을 적용해 보았다. 강성의 불확실성의 상하한은 진동계의 감쇠비와 관계있음을 확인할 수 있었는데, Fig. 2(a)는 진동계의 감쇠비에 따른 강성의 불확실성의 상하한을 보여 주고 있다. 감쇠비가  $\pm 5\%$  내에서는 대략  $\alpha_{sm} \approx 2\zeta_0$ 의 관계임을 알 수 있다.

#### 4.2 질량에 불확실성이 있는 경우

불확실성이 있는 질량은  $m = m_0(1 + \alpha_m(t))$ , 질량의 불확실성의 상하한을  $|\alpha_m(t)| \leq \alpha_{mm}$ 으로 두고,  $\frac{1}{m(1 + \alpha_m(t))} = \frac{1}{m} (1 - \frac{\alpha_m(t)}{1 + \alpha_m(t)})$ 인 관계를 이용하면,  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\alpha_m(t)}{1 + \alpha_m(t)} w_0^2 & \frac{\alpha_m(t)}{1 + \alpha_m(t)} 2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ 이다.  $\delta_1(t) = \frac{\alpha_m(t)}{1 + \alpha_m(t)}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_0^2 & 2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ 로 두고, 정리 1을 적용해 보았다. 질량의 불확실성의 상하한도 진동계의 감쇠비와 관계있음을 확인할 수 있었는데, Fig. 2(b)은 진동계의 감쇠비에 따른 질량의 불확실성의 상하한을 보여 주고 있다. 감쇠비가  $\pm 5\%$  내에서는 대략  $\alpha_{mm} \approx 2\zeta_0$ 의 관계임을 알 수 있다.

#### 4.3 고찰

(13)의 강인 최적 뱅뱅 제어기를 1자유도 진동계에 적용했을 때 강성과 질량의 상하한을 정량적으로  $\pm 10\%$  정도

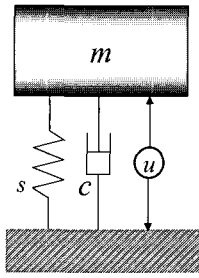


그림 1. 1자유도 진동계.  
Fig. 1. 1DOF vibrating system.

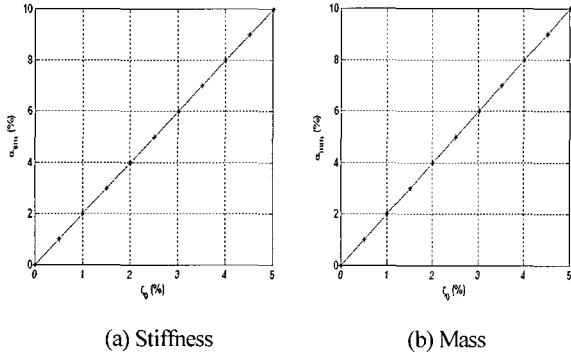


그림 2. 시변 불확실성의 상하한.  
Fig. 2. Bounds of time-varying uncertainties.

로 두기 위해서는 감쇠비가 최소 5% 정도는 되어야 함을 알 수 있다. 이와 같은 특성은 이 제어기의 적용에서 한계를 가져온다. 강성과 질량의 불확실성을 수학적으로 시변으로 고려할 경우, 이들 불확실성의 변화에 대한 이 제어기의 강인 특성은 진동계가 가지고 있는 감쇠비에 크게 의존하게 된다. 만약에 진동계의 감쇠비가 매우 크다면 불확실성의 상하한은 감쇠비에 비례하여 커지게 되므로 실제적으로 사용할 수 있을 것이다. 그러나 진동계의 감쇠비가 1% 미만인 경우도 많으므로 (13)의 강인 최적 뱅뱅 제어기를 감쇠비가 작은 진동계에 실제로 사용하기에는 불확실성의 상하한이 너무 작아 부적절함을 알 수 있다.

IV. 유사 이차 안정성과 강인 최적 뱅뱅 제어기

1. 유사 이차 안정성(AQS; Affine Quadratic Stability)

여기에서는 불확실한 선형계의 불확실성을 수학적으로 시불변으로 다루는 경우를 살펴본다. 앞의 시변 불확실성의 경우는 Lyapunov 함수를 정의할 때 고정된 한 값을 사용하였다. 여기에서는 QS 검사 방법의 보수성을 줄이기 위해서 불확실한 선형계를 (17)과 같이 시불변 불확실성 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(\theta))x(t), x(0) = x_0 \quad (17)$$

여기서  $A_0$ 는  $n \times n$  크기의 공칭 시스템 행렬이고,  $\Delta A(\theta)$ 는 시불변 불확실성이고,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in R^k$ 는  $k$ 개의 시불변 불확실성 파라미터들의 벡터이고,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$

는  $n \times 1$  크기를 가지는 상태 벡터이다.  $\theta$ 는 시변 불확실성 파라미터에 대해서도 표현할 수 있으나 여기에서는 시불변 파라미터에 대해서만 고려한다.  $\theta$ 에서 각각의 파라미터들은  $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ 로 각각의 끝점값들 사이의 범위를 가지고,  $\Theta$ 는 (18)의 파라미터 상자(parameter box)의  $2^k$ 개의 정점들의 집합이다.

$$\Theta := \{(w_1, w_2, \dots, w_k) : w_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (18)$$

불확실한 시스템 행렬  $A(\theta)$ 는 (19)와 같이 불확실한 파라미터들에 의존하면서 파라미터들에 대하여 선형결합의 형태로 표현되는 구조적 파라미터 불확실성을 갖는 시스템이다.

$$A(\theta) = A_0 + \Delta A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \theta_k A_k \quad (19)$$

여기서  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ 는 고정된 값으로 이미 알고 있는 행렬들이다.

Lyapunov 함수를 정의함에 있어서도  $A(\theta)$ 와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$V(x(t), \theta) = x^T(t)P(\theta)x(t) \quad (20)$$

$$P(\theta) = P_0 + \Delta P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k \quad (21)$$

Lyapunov 함수를 (20)과 같이 불확실성 파라미터들의 함수로 표현하면 계의 불확실성을 시변이 아닌 시불변으로 다룰 수 있게 되어서, QS와 같이 시불변 불확실성을 시변으로 간주함으로 인한 보수성을 없애게 되어 해의 존재 영역이 시변 불확실성을 다루는 경우보다 훨씬 넓어져서 파라미터 불확실성의 상하한이 매우 넓어지는 장점이 있지만, 수학적으로 다루기가 복잡하고 해석적으로 어려워진다.

(17)의 시불변 불확실성을 가지는 선형계에 대하여 모든 가능한 시불변 불확실성  $\Delta A(\theta)$ 의 범위와 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여  $V(x(t), \theta) > 0$ 이고  $dV(x(t), \theta)/dt < 0$ 를 만족하는 (20)과 (21)로 정의되는 Lyapunov 함수가 존재하면 이 불확실한 선형계는 유사 이차 안정하다고 말한다.

정의 2: 유사 이차 안정성(AQS; Affine Quadratic Stability) [17]

모든 가능한 파라미터들의 벡터  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 에 대하여 (22)와 (23)을 만족하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 가 존재한다면, (17)의 불확실한 선형계는 유사 이차 안정하다.

$$P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k > 0 \quad (22)$$

$$L(\theta) = A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) < 0 \quad (23)$$

2. 강인 최적 뱅뱅 제어기

여기에서는 앞에서 정의된 AQS 정의를 이용하여 시불변 불확실성을 가지는 선형계에 대한 강인 최적 뱅뱅 제어기를 제안한다. 이 또한 공칭계에 대한 기존의 준최적 뱅뱅 제어기의 설계 방법의 원리를 불확실한 선형계로 확장한 것이다.

불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현되는

불확실한 선형계에 제어입력이 있는 경우를 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(\theta))x(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (24)$$

여기서  $B$ 는 제어입력 벡터이고, 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{\max}$ 로 (2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

이 경우에 Lyapunov 함수를 앞의 (20)과 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 정의하고, (24)의 시스템과 (20)의 Lyapunov 함수에 대하여 앞의 AQS를 적용한다. Lyapunov 함수를 시간에 대하여 미분하면 (25)가 얻어진다.

$$\dot{V}(x, \theta) = x^T [A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta)A(\theta)]x + 2x^T P(\theta)Bu \quad (25)$$

(2)의 제어입력 제한조건 하에서 (25)를 최소화하는 최적의 제어입력은 (26)과 같다. (23)을 만족하는 행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 가 존재한다면 (25)의 첫째 항은 항상 0보다 작고, (26)을 (25)에 대입하면 (25)의 둘째 항도 항상 0보다 작다. 그러므로 (26)의 제어입력은 (25)를 항상 0보다 작게 한다.

$$u(t) = -u_{\max} \cdot \text{sgn}[B^T P(\theta)x(t)] \quad (26)$$

여기서  $P(\theta)$ 는 (23)을 만족하는 양정대칭행렬이다. (26)의 강인 최적 뱅뱅 제어기는 (5)의 공칭 선형 시불변계에 대한 제어기와 비슷한 형태이지만, 불확실한 파라미터  $\theta$ 의 함수로 표현된 게인 스케줄링 제어기(gain-scheduling controller)이다. 따라서 불확실한 파라미터  $\theta$ 의 값을 알아야 하는 단점을 가진다.

### 3. 구조적 시변 불확실성의 상하한

(23)에서  $A(\theta)$ 와  $P(\theta)$ 가  $\theta$ 에 대한 함수로 표현되었다 하더라도, (17)의 불확실한 선형 계가 AQS를 만족하는지 만족하지 않는지를 평가하는 것은 일반적으로 이론적으로나 수치적으로 모두 다루기 쉽지 않다. 왜냐하면 AQS의 검사에 있어서는 (23)은  $\theta$ 에 대하여 볼록함이 아니기 때문이다. 따라서 AQS 검사에서는 QS 검사에서처럼 불확실한 파라미터 상자의 정점들에서 (22)와 (23)을 확인하는 것만으로는 충분하지 않다. AQS의 검사에 있어서 (29)의 멀티볼록함(multi-convexity)의 개념을 도입하면 볼록함이 회복되고, 상용 프로그램인 MATLAB<sup>®</sup>에서 제공하는 LMI toolbox[16] 등을 이용할 수 있다.

정리 2 [17]: 파라미터 벡터  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 는  $\theta_i \in [\theta_i, \bar{\theta}_i]$ 로 정의되는 고차원사각형의 범위 내에 존재하는, 고정되었지만 불확실한 값을 가지고,  $\theta$ 가 (18)로 정의되는 고차원사각형의 정점들의 집합이고, (19)의 시스템 행렬  $A(\theta)$ 와 (21)의  $P(\theta)$ 는 파라미터들에 의존하면서 파라미터들에 대하여 선형결합의 형태로 표현되는 경우, 시불변 불확실성을 가지는 선형계  $\dot{x}(t) = A(\theta)x(t), x(0) = x_0$ 에 대하여 만약 (27)-(29)를 모두 만족하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 가 존재한다면, 이 불확실한 선형계는 유사 이차 안정하다.

$$A(w)^T P(w) + P(w)A(w) < 0 \text{ for all } w \in \Theta \quad (27)$$

$$P(w) > 0 \text{ for all } w \in \Theta \quad (28)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, k \quad (29)$$

### 4. 1자유도 진동계에 대한 예

여기에서는 앞의 1자유도 진동계의 경우에 대하여 강인 최적 뱅뱅 제어기 (26)의 해  $P(\theta)$ 가 존재하는 불확실성의 상하한이 어느 정도인지를 수치적으로 확인한다. 그리고 수치적인 값은  $w_0 = 2\pi \text{rad/sec}$ 를 사용했을 때의 결과이지만, 다른 값의  $w_0$ 의 값에 대해서도 이와 동일한 결과임을 확인할 수 있었다.

#### 4.1 강성에 불확실성이 있는 경우

불확실성이 있는 강성은  $s = s_0(1 + \alpha_s)$ , 강성의 불확실성의 상하한을  $\alpha_s \in [\alpha_s, \bar{\alpha}_s]$ 로 두자. 이때  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\theta_1 = \alpha_s$ 로 두어 정리 2를 적용해 보았다.

Table 1의 두 번째 열은 진동계의 감쇠비에 따른 강성의 불확실성의 상하한을 보여주고 있다. 시변 불확실성을 가지는 선형계의 경우와 같이 감쇠비가 클수록 불확실성의 상하한은 점점 더 커짐을 알 수 있다. 그리고 1% 이하의 매우 작은 감쇠비에 대해서도 강성의 불확실성의 상하한은 매우 큼을 알 수 있다.

#### 4.2 질량에 불확실성이 있는 경우

불확실성이 있는 질량은  $m = m_0(1 + \alpha_m)$ , 질량의 불확실성의 상하한을  $\alpha_m \in [\alpha_m, \bar{\alpha}_m]$ 으로 두자. 이때  $\frac{1}{m(1 + \alpha_m)} = \frac{1}{m}(1 - \frac{\alpha_m}{1 + \alpha_m})$ 인 관계를 이용하여  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ ,

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_0^2 & 2\zeta_0 w_0 \end{bmatrix}$ ,  $\theta_1 = \frac{\alpha_m}{1 + \alpha_m}$ 으로 두고 정리 2를 적용해 보았다.

Table 1의 세 번째 열은 진동계의 감쇠비에 따른 질량의 불확실성의 상하한을 보여주고 있다. 이 경우 또한 불확실성의 상하한은 매우 크고 감쇠비가 클수록 불확실성의 상하한은 점점 더 커짐을 알 수 있다. 그리고 강성의 경우와 같이 1% 이하의 매우 작은 감쇠비에 대해서도 강성의 불확실성의 상하한은 매우 큼을 알 수 있다.

#### 4.3 고찰

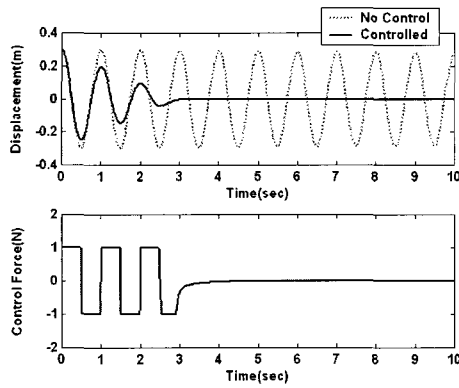
시불변 불확실성을 가지는 선형계에 대한 (26)의 강인 최적 뱅뱅 제어기는 매우 작은 감쇠비에 대해서도 강성과 질량의 불확실성의 상하한이 매우 충분히 크므로 감쇠비가 매우 작은 진동계에도 용이하게 사용할 수 있음을 확인할 수 있다. 이는 시변 불확실성을 가지는 진동계에 대하여 QS를 이용하는 (13)의 강인 최적 뱅뱅 제어의 강성과 질량의 불확실성의 상하한을 충분히 극복하는 것으로, 시불변 불확실성을 수학적으로 시변으로 간주함으로 인한 보수성을 없애게 되어 해의 존재 영역이 훨씬 넓어져서 불확실성의 상하한이 매우 넓어진 것이다.

Lyapunov 함수를 불확실한 파라미터에 의존하는 형태로 정의하고 이의 강인 안정성을 해석하는 방법은 본 논문에서 고려된 AQS 외에도 여러 방법들이 있다[18-21]. 이들 각

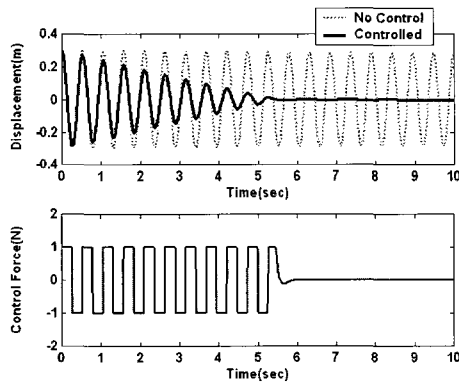
표 1. 시불변 불확실성의 상하한.

Table 1. Bounds of time-invariant uncertainties.

$\zeta_0$ (%)	$\bar{\alpha}_s$ ( $\alpha_s \in [-0.99, \bar{\alpha}_s]$ )	$\bar{\alpha}_m$ ( $\alpha_m \in [-0.99, \bar{\alpha}_m]$ )
0.01	2.1e3	1.3e4
0.10	6.7e3	4.1e4
1.00	2.1e4	1.3e5
2.00	3.0e4	1.8e5
3.00	3.6e4	2.3e5
4.00	4.2e4	2.6e5
5.00	4.7e4	2.9e5



(a) Nominal system ( $\alpha_s = 0$ )



(b) Uncertain system ( $\alpha_s = 0.9$ )

그림 3. 변위와 제어력의 시간이력.

Fig. 3. Time histories of displacements and control forces.

각의 방법들을 적용하여 구해진 시불변 불확실성의 상하한의 값은 약간의 차이가 있을 수 있겠으나 그 값의 차이는 본 논문의 주된 내용이 아니다. 왜냐하면 Table 1에서처럼 이들의 상하한은 매우 큰 값이므로 여기에서는 그 값 자체가 공학적 의미가 있는 것이 아니기 때문이다.

4.4 수치 실험

여기에서는 제안된 제어기의 타당성을 보이기 위하여 수치실험을 수행한다. 최대 제어력  $u_{max} = 1N$ , 감쇠비  $\zeta_0 = 0.1\%$ , 그리고 강성에 불확실성이 있는 경우를 고려한다. 강성의 불확실성의 상하한은  $\alpha_s \in [-0.9, 0.9]$ 인 경우로 이는 공학적으로 매우 큰 값이다. 먼저 (13)의 제어기를 사

용할 경우 해석적으로 보장되는 상하한은  $[-0.001, 0.001]$  정도이므로, 고려된 불확실성 상하한 내에서 제어기의 설계가 불가능하다. 그러나 Table 1에서 보여 주는 것처럼 (26)의 제어기는 설계는 가능하다. 또한 (26) 제어기의 실제적인 적용은 부호함수 대신에 포화함수를 사용하였다. 포화함수의 사용은 부호함수 형태의 제어기들에서 발생하는 제어 채터링(control chattering) 문제를 극복하기 위하여 전형적으로 선택하는 방법이다. 초기 상태  $x_0 = [0.3 \ 0]^T$ 인 경우의 제어력 파형과 진동계의 변위를 살펴보면 Fig. 3과 같다. Fig. 3(a)는 공칭계에 대하여, Fig. 3(b)는 강성이 90% 증가한 불확실한 계에 대하여 보여주고 있는데, 강성의 불확실성이 매우 큼에도 불구하고 강인 안정성이 보장됨을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 제어입력의 한계 만이 존재하는 선형계에 대한 기존의 준최적 뱁뱁 제어기의 설계 방법을 확장하여 제어입력의 한계와 구조적 파라미터 불확실성이 동시에 존재하는 선형계에 대한 강인 최적 뱁뱁 제어기에 대한 연구를 수행하였다. 본 논문에서는 두 개의 강인 최적 뱁뱁 제어기를 새로이 제시하고 특성을 비교하였다. 제어기는 Lyapunov 강인 안정성 조건을 이용하여 설계된 것으로 제어입력 구속조건 하에서 정의된 Lyapunov 함수의 시간 미분치를 최소화하는 최적의 제어입력을 구함으로 쉽게 얻어졌다.

이차 안정성(QS)을 이용한 강인 최적 뱁뱁 제어기는 파라미터 불확실성을 수학적으로 시변으로 다루는 경우로, 설계가 간단하고 고정된 계인을 가지는 제어기라는 장점이 있지만, 시불변 불확실성인 경우 이를 시변으로 간주함으로써 인한 보수성이 크게 증가된다. 이 보수성으로 인해 제어기의 해가 존재하는 영역이 좁아져서 파라미터 불확실성의 상하한이 좁아지게 된다. 1자유도 진동계에 대한 이론적인 해석 방법을 통하여 강성과 질량의 구조적 파라미터 불확실성의 상하한을 정량적으로 확인하였는데, 감쇠비가 매우 작은 진동계의 경우에는 강성과 질량의 파라미터 불확실성의 상하한이 너무 좁아 실제로 사용하기에 용의하지 않음을 알 수 있었다.

유사 이차 안정성(AQS)을 이용한 강인 최적 뱁뱁 제어기는 불확실한 파라미터들의 함수로 표현된 계인 스케줄링 형태여서 이들의 값을 알아야 하는 단점을 가진다. 그러나 이 제어기는 파라미터 불확실성을 수학적으로 시불변으로 다룰 수 있는 경우로, 시불변 불확실성을 시변으로 간주함으로써 인한 보수성을 없애게 되어서 제어기의 해가 존재하는 영역이 시변 불확실성을 다루는 경우보다 훨씬 넓어져서 파라미터 불확실성의 상하한이 매우 넓어지는 장점이 있다. 1자유도 진동계의 경우 1% 이하의 매우 작은 감쇠비에 대해서도 강성과 질량의 파라미터 불확실성의 상하한이 충분히 커서 감쇠비가 매우 작은 진동계에도 용의하게 사용할 수 있음을 정량적으로 확인하였고, 이의 타당성을 수치실험을 통하여 보였다.

## 참고문헌

- [1] D. S. Bernstein and A. N. Michel, "A chronological bibliography on saturating actuators," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 375-380, 1995.
- [2] W. M. Wonham and C. D. Johnson, "Optimal bang-bang control with quadratic performance index," *Transactions on ASME, Ser. D*, vol. 86, pp. 107-115, 1964.
- [3] B. Friendland, "Limiting forms of optimum stochastic linear regulators," *Journal of Dynamic Systems Measurement Control, Transactions on ASME, Ser. G*, vol. 93, no. 3, pp. 135-141, 1971.
- [4] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
- [5] Z. Wu and T. T. Soong, "Modified bang-bang control law for structural control implementation," *Journal Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 122, pp. 771-777, 1996.
- [6] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.
- [7] K. Wei, "Quadratic stabilizability of linear systems with structural independent time-varying uncertainties," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 3, pp. 268-277, 1990.
- [8] L. Xie, M. Fu, and C. E. de Souza, " $H_\infty$  control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 8, pp. 268-277, 1992.
- [9] S. S. L. Chang and T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, pp. 474-483, 1972.
- [10] B. N. Jain, "Guaranteed error estimation in uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 20, 1975.
- [11] D. S. Bernstein, "Robust stability and dynamic output-feedback stabilization : deterministic and stochastic perspectives," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, pp. 1076-1084, 1987.
- [12] O. I. Kosmidou and P. Bertrand, "Robust-controller design for systems with large parameter variations," *International Journal on Control*, vol. 45, pp. 927-938, 1987.
- [13] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "Robust stability and performance analysis for state space systems via quadratic Lyapunov bounds," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 11, pp. 239-271, 1990.
- [14] H. P. Horisberger and P. R. Belanger, "Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, pp. 705-708, 1976.
- [15] D. S. Bernstein and S. L. Osburn, "Guaranteed cost inequalities for robust stability and performance analysis," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, pp. 1275-1297, 2002.
- [16] P. Gahinet and A. Nemirovski, *The LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc., 1995.
- [17] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali, "Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 436-442, 1996.
- [18] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 7, pp. 1041-1046, 1996.
- [19] J. C. Geromel, M. C. de Oliveria, and L. Hsu, "LMI characterization of structural and robust stability," *Linear Algebra and Its Application*, vol. 285, no. 1-3, pp. 69-80, 1998.
- [20] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou, "A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty," *System & Control Letters*, vol. 40, pp. 21-30, 2000.
- [21] A. Trofino and C. E. de Souza, "Biquadratic stability of uncertain linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 8, pp. 1303-1307, 2001.



### 임 채 욱

1998년 부산대학교 기계설계공학과 졸업. 2000년 한국과학기술원 기계공학과 대학원 석사. 2006년 동 대학원 박사 후 연수 연구원. 관심분야는 자동 제어, 제어이론, 포화제어, 강인제어, 능동진동제어 및 장치개발.



### 박 영 진

1980년 서울대학교 기계공학과 졸업. 1982년 동 대학원 석사. 1987년 the university of michigan 박사. 1987년~1988년 the university of michigan research fellow. 1988년~1990년 New Jersey Institute of Technology assistant professor. 1990년~현재 한국과학기술원 기계공학과 교수. 관심분야는 자동제어, 3차원 입체음향, 능동 소음 및 진동제어, MR유체, 차량의 안정성 제어, 차량의 고장진단, 제어이론, 강인제어, 시스템규명.



### 문 석 준

1998년 서울대학교 조선해양공학과 졸업. 1990년 동 대학원 석사. 1995년 동 대학원 박사. 1996년~현재 한국기계연구원 e-엔지니어링연구센터 선임연구원. 관심분야는 진동/충격 제어 및 장치개발.



### 박 윤 식

1972년 서울대학교 기계공학과 졸업. 1979년 Iowa state university 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1981년~1984년 한국과학기술원 기계공학부 선임연구원. 1984년~현재 한국과학기술원 기계공학과 교수. 관심분야는 동역학, 진동 및 소음 제어, 구조물 동특성 변경법, 기계 및 매니플레이터의 동역학, 모달 해석, 시스템 규명.