

## 효율적인 수치 모델링 기법 개발을 위한 ELLAM과 LEZOOMPC의 비교분석

석 희 준\*

한국수자원공사 수자원연구원

## Comparison of ELLAM and LEZOOMPC for Developing an Efficient Modeling Technique

Heejun Suk\*

Korea Water Resources Corporation, Korea Institute of Water and Environment

### ABSTRACT

This study summarizes advantages and disadvantages of numerical methods and compares ELLAM and LEZOOMPC to develop an efficient numerical modeling technique on contaminant transport. Eulerian-Lagrangian method and Eulerian method are commonly used numerical techniques. However Eulerian-Lagrangian method does not conserve mass globally and fails to treat boundary in a straightforward manner. Also, Eulerian method has restrictions on the size of Courant number and mesh Peclet number because of time truncation error. ELLAM (Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method) which has been popularly used for past 10 years in numerical modeling, is known for overcoming these numerical problems of Eulerian-Lagrangian method and Eulerian method. However, this study investigates advantages and disadvantages of ELLAM and suggests a change for the better. To figure out the disadvantages of ELLAM, the results of ELLAM, LEZOOMPC (Lagrangian-Eulerian ZOOMing Peak and valley Capturing), and visual MODFLOW are compared for four examples having different mesh Peclet numbers. The result of ELLAM generates numerical oscillation at infinite of mesh Peclet number, but that of LEZOOMPC yields accurate simulations. The simulation results suggest that the numerical error of ELLAM could be alleviated by adopting some schemes in LEZOOMPC. In other words, the numerical model which combines ELLAM with backward particle tracking, forward particle tracking, adaptively local zooming, and peak/valley capturing of LEZOOMPC can be developed for not only overcoming the numerical error of ELLAM, but also keeping the numerical advantage of ELLAM.

**Key words :** ELLAM, LEZOOMPC, Local zooming, Peak/valley capturing

### 요 약 문

본 연구는 오염물 거동에 대한 수치해석을 위해 보편적으로 사용되고 있는 수치 방법들의 장단점을 총괄적으로 나타내고, 효율적인 수치모델링 기법 개발을 위해 ELLAM과 LEZOOMPC를 비교분석하였다. 지하수 분야에서 가장 많이 사용되는 수치 방법은 Eulerian-Lagrangian 방식과 Eulerian 방식인데, Eulerian-Lagrangian 방식은 수치영역 내에서 일반적으로 질량을 보존하지 못하고, 경계조건을 체계적으로 처리하지 못하는 한계를 갖고 있다. 반면에 Eulerian 방식은 시간 및 공간 절삭 오차로 인해서 시간 간격 및 격자 크기를 극히 줄여야 하는 제약을 갖고 있다. 최근 10년간 지하수 분야에서 크게 대두되고 있는 수치기법인 ELLAM(Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method)은 Eulerian-Lagrangian 방식과 Eulerian 방식에서 나타나는 수치 제약점이나 한계점을 동시에 해결하는 수치기법으로 알려져 왔다. 그러나 본 연구에서는 ELLAM의 장단점을 파악하고 보완점을 제안한다. ELLAM의 단점을 파악하기 위해, mesh Peclet number가 다른 예제들을 설정하고, 그 예제들에 대한 ELLAM, LEZOOMPC(Lagrangian-Eulerian

\*Corresponding author : sxh60@kowaco.or.kr

원고접수일 : 2005. 7. 27 게재승인일 : 2005. 12. 14

질의 및 토의 : 2006. 4. 30 까지

ZOOMing Peak and valley Capturing)와 visual MODFLOW의 수치결과들을 해석해와 비교하였다. Mesh Peclet number가 무한대일 때 ELLAM의 수치결과는 수치진동으로 인해 해석해와 일치하지 않았으나, LEZOOMPC의 수치결과는 해석해와 일치했다. 위의 결과는 ELLAM의 수치오차가 LEZOOMPC의 특성을 이용하여 개선 및 보완될 수 있는 가능성을 시사해 준다. 따라서 ELLAM에 LEZOOMPC의 후향 입지추적, 전향 입지추적, 선택적 국부 격자 세립화 과정과 최고/최저 농도점 이동 추적 과정을 결합하면 ELLAM의 수치적 장점을 유지하면서 mesh Peclet number에 제약을 받지 않는 효율적인 수치모델링 기법을 개발할 수 있을 것으로 판단된다.

**주제어 :** ELLAM, LEZOOMPC, 선택적 국부 격자 세립화 과정, 최고/최저 농도점 이동 추적 과정

## 1. 서 론

지하 내에 오염물 거동 현상은 이송-확산 식으로 표현된다. 이송-확산 식은 극심한 비선형이기 때문에 해석해가 거의 존재하지 않는다. 그래서 오염물 거동 해석을 위해 수치 모델링 방법들이 사용되어져 왔다. 전통적으로 가장 많이 사용되는 수치 방법은 Eulerian 방식이며, Eulerian 방식에는 유한 차분법과 유한 요소법이 있다. 그러나 Eulerian 방식은 Courant number와 mesh Peclet number의 크기가 충분히 작아야 하고 그렇지 않은 경우 수치 진동, 수치 확산과 같은 수치 오차가 발생할 수 있다(Baptista et al., 1984; Williamson and Rasch, 1988; Leonard, 1988; Leonard and Mokhtari, 1990).

Eulerian 방식의 수치 오차는 주로 이송 항 때문에 발생하므로(Celia et al., 1990; Healy and Russell, 1998; Yeh et al., 1992), 위의 문제점을 피하기 위해서 많은 사람들이 Eulerian-Lagrangian 방식을 종종 사용하여 왔다(Konikow and Bredehoeft, 1978; Douglas and Russell, 1982; Baptista, 1987; Yeh, 1990). Eulerian-Lagrangian 방식에서는 이송 항은 Lagrangian 방식을 사용하여 풀고, 확산 항은 Eulerian 방식을 사용하여 풀기 때문에 Eulerian 방식에 비해 시간절삭 오차를 줄일 수 있어서 긴 시간간격을 사용해도 해의 정확성은 유지된다(Douglas and Russell, 1982; Baptista, 1987; Yeh, 1990). 그러나 Eulerian-Lagrangian 방식은 수치영역 내에서 질량을 전체적으로 보존하지 못하고, 경계조건을 체계적이고 일관되게 처리하지 못하는 문제점이 있다(Celia et al., 1990; Russell, 1990; Healy and Russell, 1998).

위에서 언급한 Eulerian 방식과 Eulerian-Lagrangian 방식의 수치문제들을 극복하기 위해 Celia et al.(1990)과 Russell(1990)은 ELLAM(Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method)을 개발하였다. ELLAM은 시간, 공간을 동시에 고려하는 시험 함수를 사용해서 시간 절삭 오차를 줄일 수 있으므로, 긴 시간간격을 사용해도 수치해의 정확성이 유지된다(Healy and Russell, 1998; Celia et al.,

1990). 또한 수치영역 내에서 질량을 전체적으로 보존하고, 모든 경계조건을 체계적이고 일관되게 처리할 수 있는 알고리즘이다(Celia et al., 1990; Russell, 1990; Healy and Russell, 1998). ELLAM은 오른쪽 행렬 성분을 계산할 때 시험함수를 적분함으로써 구하고, 왼쪽 벡터성분을 계산할 때 표준 수치적분 기법을 이용하여 구할 수 있다. 이때, ELLAM에서 수치 적분을 통해서 정확한 해를 얻기 위해서는, 급격한 농도 변화구간에서 농도 변화를 잘 반영하도록 적분 점의 간격을 충분히 좁혀야 한다는 문제점이 있다(Healy and Russell, 1998). 만약 급격한 농도변화 구간에서 적분 점의 간격이 넓으면 수치오차가 생길 수 있다.

ELLAM은 농도 변화를 잘 반영하도록 적분 점의 간격을 충분히 좁혀야 정확성이 유지되는 알고리즘이지만, Cheng et al.(1996)이 개발한 LEZOOMPC(Lagrangian-Eulerian ZOOMing Peak and valley Capturing)는 급격한 농도변화 구간에 대해서 긴 시간간격과 넓은 격자간격을 사용해도 해의 정확성이 유지되는 알고리즘이다. 왜냐하면 LEZOOMPC는 후향 입지추적, 전향 입지추적, 선택적 국부 격자 세립화 과정, 최고/최저 농도점 이동 추적의 기능들을 가진 알고리즘이기 때문이다. 따라서 LEZOOMPC는 mesh Peclet number가 0에서부터 무한대 범위에서도 사용자가 정한 오차 한계 내에서 오염물 거동 방정식을 정확하게 풀 수 있다(Cheng et al., 1996). 그러므로 ELLAM과 LEZOOMPC를 결합하면 ELLAM의 수치적 장점을 유지하면서 mesh Peclet number가 큰 경우에 발생하는 ELLAM의 수치오차를 극복할 수 있을 것으로 판단된다.

## 2. 수치 모델링 기법 검토

### 2.1. ELLAM

최근 많은 사람들이 Eulerian 방식과 Eulerian-Lagrangian 방식의 수치적인 문제점을 극복하기 위해 ELLAM(Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method)이라는 새로

은 수치방법을 사용하고 있다(Binning and Celia, 1996; Celia, 1994; Healy and Russell, 1993, Herrera et al., 1993).

ELLAM은 시간과 공간에 대한 시험함수  $\omega(x, t)$ 를 사용한다.

$$\int_0^{\infty} \int_0^l (\mathcal{L}u - f)\omega(x, t) dx dt = 0 \quad (1)$$

여기서  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $V$ 는 속도,  $D$ 는 확산계수,  $l$ 은 관심영역의 길이,  $t$ 는 시간,  $x$ 는 거리,  $u$ 는 오염물의 농도,  $f$ 는 소멸/생성 항,  $\omega(x, t)$ 는 시험함수이다. 시험함수  $\omega(x, t)$ 는 homogeneous adjoint equation의 해의 공간으로부터 선택된다(Celia et al., 1990).

$$\mathcal{L}^* \omega(x, t) = -\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} - V \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

여기서  $*$ 는 adjoint operator이다. 격자간격이  $\Delta x$ 로 일정하고, 속도  $V$ 와 확산계수  $D$ 가 일정한 경우를 가정하면, 시험함수  $\omega(x, t)$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다(Celia et al., 1990).

$$\omega_i^{n+1}(x, t) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{\Delta x} + V \frac{t^{n+1}-t}{\Delta x}, & (x, t) \in \Omega_1^i \\ \frac{x_{i+1}-x}{\Delta x} + V \frac{t^{n+1}-t}{\Delta x}, & (x, t) \in \Omega_2^i \\ 0, & \text{all other } (x, t) \end{cases} \quad (3)$$

식 (3)에서 정의된 시험함수를 표현하면 Fig. 1(b)과 같다. 여기서  $\omega_i^{n+1}(x, t)$ 는 격자점  $i$ 의  $n+1$  번째 시간간격에서의 시험함수이다.  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ 는 각각 격자점  $i-1, i, i+1$ 에서 위치,  $\Delta x$ 는 격자간격,  $t^{n+1}, t^n$ 는 각각  $n+1$ 과  $n$ 번째 시간간격에서의 시간이다.  $\Omega_1^i$ 는 격자점  $i$  시험함수의 왼편에 해당하는 영역,  $\Omega_2^i$ 는 격자점  $i$  시험함수의 오른편에 해당하는 영역으로 시간과 공간에 의해 정의된다. Fig. 1(b)에서  $x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*$ 는 각각  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ 에서 시작하여 주어진 시간간격( $\Delta t$ ) 동안 후향 입지추적을 하여 도달하는 위치이다.

$\omega_i(x)$ 는 유한 요소법에서 사용되는 가중 함수이고(Fig. 1(a)),  $\omega_i^{n+1}(x, t)$ 는 ELLAM에서 사용되는 시험함수이다(Fig. 1(b)). Fig. 1에서 보는 바와 같이 유한요소법에서 사용되는 가중 함수는 공간에 대해서만 고려하지만 ELLAM에서의 시험함수는 시간과 공간을 동시에 고려하고 있다. 따라서 ELLAM은 시간 절삭 오차가 적어 긴 시간간격을 사용해도 수치해의 정확성이 유지된다(Celia

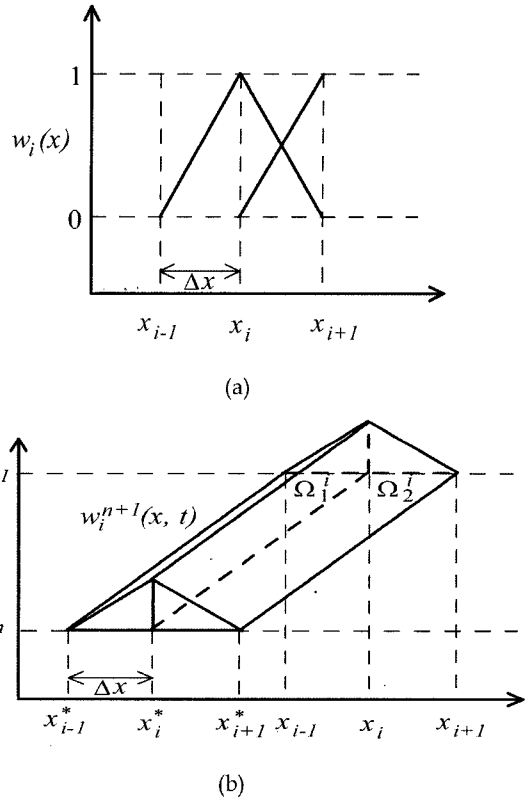
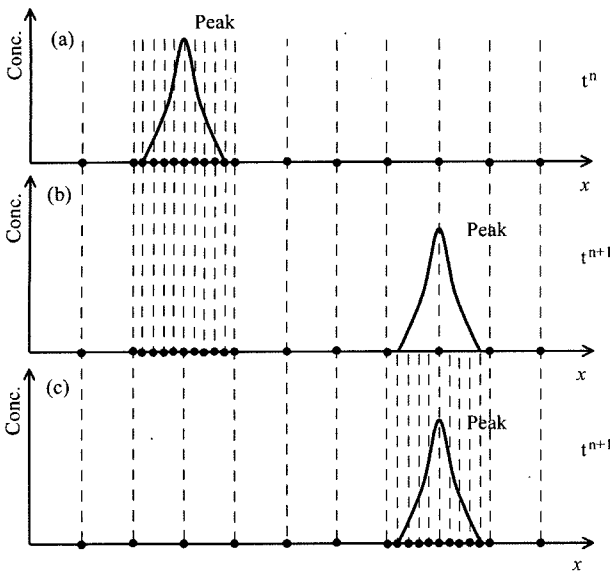


Fig. 1. Comparison of (a) weighting function in FEM and (b) test function in ELLAM (Celia et al., 1990).

et al., 1990; Healy and Russell, 1998). 또한 ELLAM은 localized homogeneous adjoint equation을 만족하는 특별한 해들로부터 시간, 공간을 동시에 고려하는 시험함수를 선택하여 사용하기 때문에 수치영역 내에서 자연스럽게 질량을 전체적으로 보존하고, 모든 경계조건에 대해서 체계적이고 일관되게 처리할 수 있다는 장점이 있다(Celia et al., 1990). 그러나, ELLAM은 농도 구배가 급격한 구간에서 정확한 수치 해를 얻기 위해서는 적분 점의 간격을 충분히 좁혀야 하는 제약이 있다(Healy and Russell, 1998).

### 2.2. LEZOOMPC

LEZOOMPC는 Cheng et al.(1996)이 Eulerian-Lagrangian 접근방식을 이용하여 개발한 모델로, 기존의 Eulerian-Lagrangian 접근 방식에 비해 효율적인 면과 정확성 면에서 우수한 방법이다. 이 방법은 후향입지추적과 전향 입지추적을 실시하여 농도구배가 급격한 곳을 찾아내고, 농도구배가 급격한 지점을 중심으로 선택적으로 국부 격자 세립화 과정을 실시한다. 그리고 농도가 가장 높은 지점과 가장 낮은 지점을 각각 최고 농도점(peak)과 최저



**Fig. 2.** Sketch for peak/valley capturing and adaptively local zooming in LEZOOMPC, (a) refining temporally meshes around the peak at time  $t^n$ , (b) tracking the movement of peak by advection at time  $t^{n+1}$ , and (c) refining temporally meshes around the new position of peak and kicking off unnecessary refined nodes at time  $t^{n+1}$ .

농도점(valley)으로 지정하고, 그 지점에 임시적으로 격자망을 생성하여 지속적으로 최고/최저 농도점을 추적한다.

여기에서 LEZOOMPC의 후향 입자추적, 전향 입자추적, 최고/최저 농도점 이동 추적 과정과 선택적 국부 격자 세립화 과정에 대해서 간단히 서술하면 다음과 같다. 시간  $t^n$ 에서 최고/최저 농도점(peak)의 이동을 추적해서 농도구배가 급격한 구간에 세립화된 격자망을 생성시킨다(Fig. 2(a)). 시간  $t^n$ 에서 다음 시간  $t^{n+1}$ 로 넘어가면, 이송에 의한 최고/최저 농도점의 이동을 추적한다(Fig. 2(b)). 시간  $t^{n+1}$ 에서 이동된 최고/최저 농도점 부근의 농도구배가 급격한 구간에, 세립화된 격자망을 자동적으로 생성시킨다(Fig. 2(c)). 시간  $t^{n+1}$ 에서 농도구배가 완만한 구간에서는, 농도구배가 급격할 때 임시적으로 생성시켰던 격자망을 자동적으로 모두 버려서 원래의 격자망으로 돌아간다(Fig. 2(c)). 따라서 LEZOOMPC는 농도 구배가 급격한 지역에서는 임시적으로 세립화된 격자망을 생성시켜 격자간격을 좁히고, 농도구배가 완만한 지역에서는 임시적으로 세립화시켰던 격자망을 모두 버려 격자 간격을 넓히기 때문에, 수치해석의 정확성과 효율성을 극대화시킨다. 그래서 LEZOOMPC는 mesh Peclet number가 0에서 무한대 범위에서도 정확성을 유지한다. 그러나 LEZOOMPC는 기존의 Eulerian-Lagrangian 방법과 마찬가지로 수치영역 내에서 질량을 전체적으로 보존하기 어

렵고, 경계조건을 체계적이고 일관되게 처리하기 어렵다는 단점이 있다.

### 3. 결과 및 토의

본 연구에서는 ELLAM의 수치적 정확성 및 효율성을 평가하기 위하여, mesh Peclet number가 다른 네 개의 예제에 대한 ELLAM, LEZOOMPC, 그리고 upstream 유한 차분법을 이용하는 visual MODFLOW(Harbaugh et al., 2000)의 결과를 비교하였다. 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

첫 번째, 두 번째 예제는 가우시안 농도분포를 갖는 오염물의 거동을 묘사하는 문제로, 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x, 0) = \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (5)$$

$$u(x, t) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \quad (6)$$

여기서 초기 농도 분포의 중심  $x_0$ 는 2,000 m로, 표준편차  $\sigma$ 는 264 m로 하였다. 세 번째, 네 번째 예제는 오염물이 진행할 때 오염물의 진행 면에서의 농도 분포를 묘사하는 문제로, 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x \leq \infty) \quad (7)$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, t) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (8)$$

각 예제에 대한 속도  $V$ 와 확산계수  $D$ 는 Table 1에 나타나 있다. 모든 예제에서 수치모의를 위한 격자간격  $\Delta x$ 는 200 m로, 시간간격  $\Delta t$ 는 96일로 일정하게 설정하였다. ELLAM, LEZOOMPC, 그리고 upstream 유한 차분법을 이용하는 visual MODFLOW의 결과는 Fig. 3에 나타나 있다.

여기서 예제 1과 3은 mesh Peclet number가 무한대이고, 예제 2와 4는 50으로서 mesh Peclet number는 다음과 같이 정의된다.

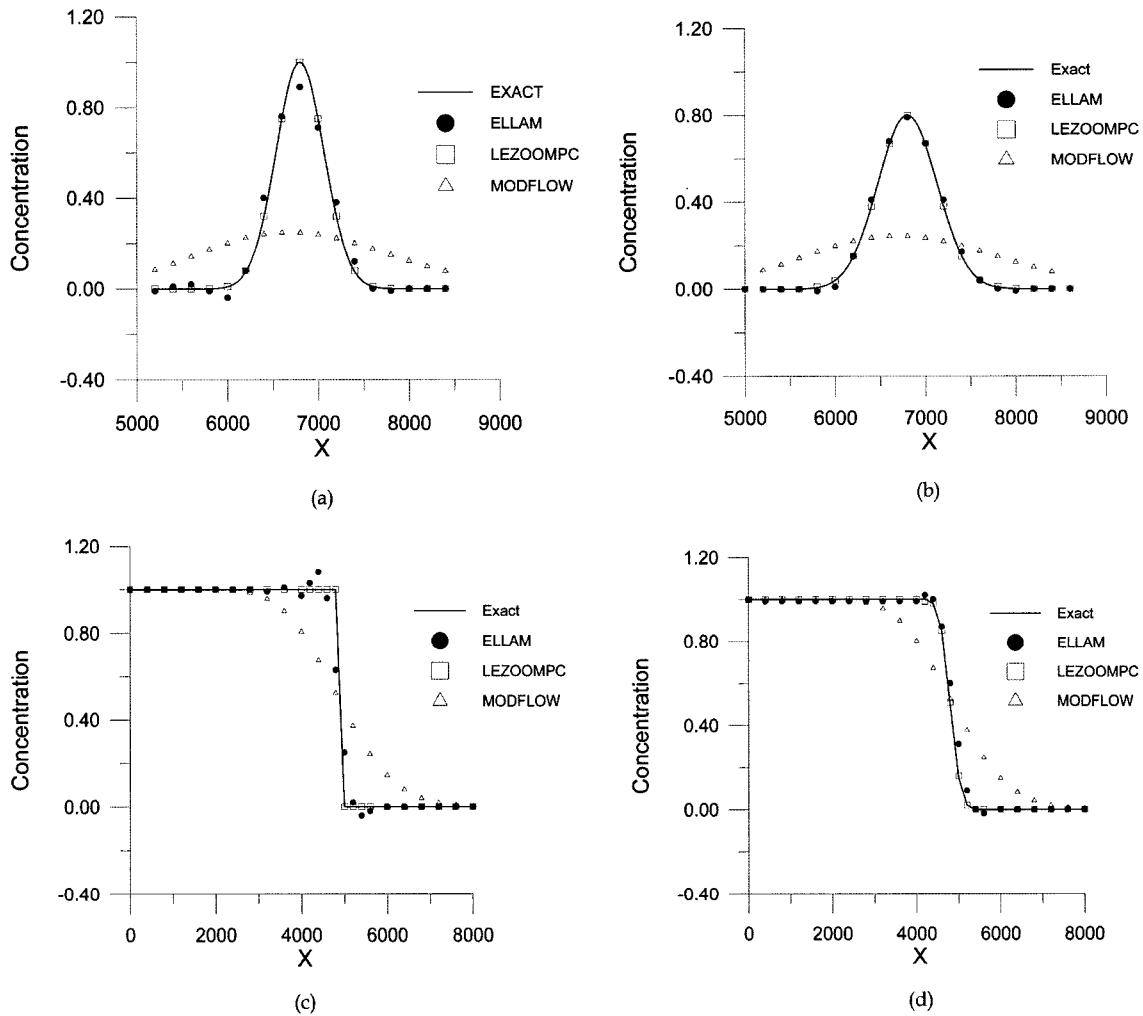
$$Pe = \frac{\Delta x \cdot V}{D} \quad (9)$$

식 (9)에서 보듯이 mesh Peclet number는 확산계수  $D$ , 속도  $V$ , 격자간격  $\Delta x$ 의 함수로서 일반적으로 mesh Peclet number가 작으면 안정적으로 수치계산을 할 수 있다.

**Table 1.** Velocities,  $V$  and Diffusion Coefficients,  $D$  for four examples

Examples	Problems	$V$ (m/day)	$D$ (m <sup>2</sup> /day)	Peclet Number
Example 1	Problem for solute transport having Gaussian distribution	0.5	0	infinite
Example 2		0.5	2	50
Example 3	Problem for an advanced front of solute transport	0.5	0	infinite
Example 4		0.5	2	50

(Courant number = 0.24)



**Fig. 3.** Simulation results of (a) Example 1, (b) Example 2, (c) Example 3, and (d) Example 4.

Mesh Peclet number가 무한대인 첫 번째 예제와 세 번째 예제의 경우(Table 1), LEZOOMPC의 결과만 해석해와 일치하였다(Fig. 3(a), 3(c)). 이때 Upstream 유한 차분법을 이용한 visual MODFLOW의 결과에는 수치 확산이 커다랗게 발생했고, ELLAM의 결과에는 수치진동이 발생한 것을 볼 수 있다(Fig. 3(a), 3(c)). 반면 mesh Peclet number가 50인 두 번째 예제와 네 번째 예제의 경

우(Table 1), LEZOOMPC와 ELLAM의 결과는 해석해와 대체적으로 일치하였으나(Fig. 3(b), 3(d)), upstream 유한 차분법을 이용한 visual MODFLOW의 결과는 수치 확산 때문에 해석해와 커다란 차이를 보였다(Fig. 3(b), 3(d)).

수치 알고리즘에서 수치오차가 발생하는 원인에는 다음과 같은 두 가지 요인이 있다. 첫 번째 요인은 농도 변화가 급격한 구간에서 격자 간격을 세밀하게 설정하지 못

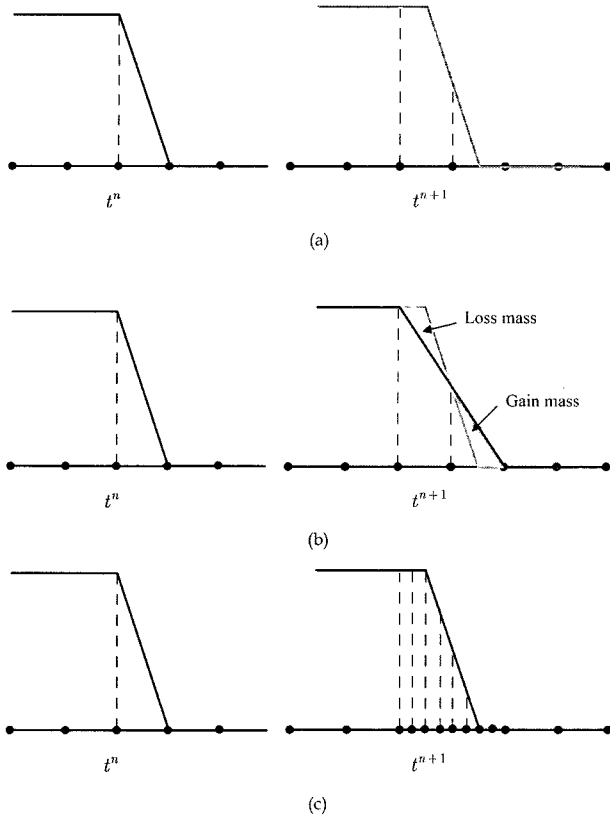


Fig. 4. Sketch of numerical dispersion caused by advection: (a) lost sharp front because of large grid size, (b) numerical diffusion, (c) adaptively local zooming for sharp front.

해서 수치오차가 발생하는 것이다(Yeh, 1990; Celia et al., 1990; Healy and Russell, 1998). 시간  $t^n$ 에서 각 격자점에서의 농도분포가 Fig. 4(a)의 왼편과 같고, 시간 간격  $\Delta t$  동안 이송에 의해 이동 후, 시간  $t^{n+1}$ 에서 농도 분포가 Fig. 4(a)의 오른편과 같다고 가정하자. 이때 고정된 격자망을 고려하는 수치 알고리즘을 사용하면 급격한 농도 변화 구간 내에서 농도를 표현하는 격자점의 수가 적어, 일부 격자망에서는 질량손실이 발생하고, 다른 일부 격자망에서는 질량 보상이 발생된다. 그 결과 Fig. 4(b)에서 보이는 것처럼 수치 확산이 발생한다. 그러나 Fig. 4(c)에서 보이는 것처럼 급격한 농도 변화 구간에서 격자를 세립화할 수 있는 알고리즘을 사용하면, 농도 구배가 급격한 구간 내에서 농도를 표현하는 격자점의 수가 충분히 많이 되어 수치오차를 피할 수 있다(Fig. 4(c)).

두 번째 수치오차가 발생하는 요인은 격자점에서 최고/최저 농도점을 잃게 되어 일어나는 것이다(Yeh et al., 1992). 시간  $t^n$ 에서 각 격자점에서의 농도분포가 Fig. 5(a)의 왼편과 같고, 시간 간격  $\Delta t$  동안 이송에 의해 이

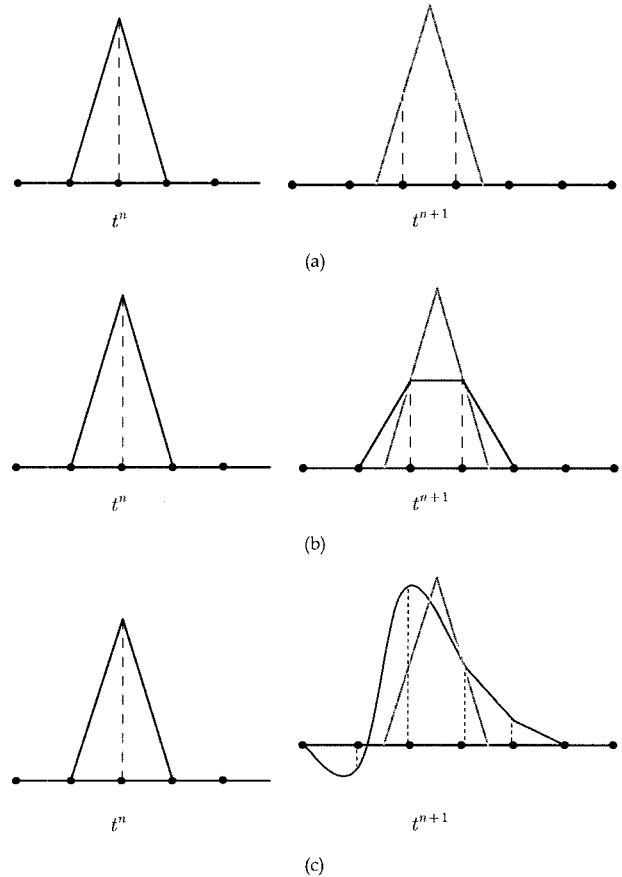


Fig. 5. Sketch of numerical problems caused by advection: (a) lost peak, (b) numerical diffusion, (c) spurious oscillation (Yeh et al., 1992).

동 후, 시간  $t^{n+1}$ 에서 농도분포가 Fig. 5(a)의 오른편과 같다고 가정하자. 이때 최고/최저 농도점이 격자점에서 벗어났기 때문에, 시간  $t^{n+1}$ 에서 격자망은 최고/최저 농도점의 위치를 잃게 된다. 따라서 최고/최저 농도점의 농도 값은 시간  $t^{n+1}$ 에서의 격자망에 나타나지 못한다(Fig. 5(b)). 일차 내삽함수를 사용하는 수치 알고리즘에서는, 최고/최저 농도점의 위치를 잃어버려서 없어진 농도만큼, 최고/최저 농도점 주변에 있는 격자점들에 선형형태로 농도를 보상하여 질량을 보존한다(Fig. 5(b)). 결과적으로 수치 확산이 발생하게 되는 것이다. 그리고 이차 내삽함수를 사용하는 수치 알고리즘에서는, 최고/최저 농도점의 위치를 잃어버려서 없어진 농도만큼, 최고/최저 농도점 주변에 있는 격자점들에 이차 곡선 형태로 농도를 보상한다. 이때 시간  $t^n$ 에서 최고/최저 농도 값은 일차 내삽함수를 사용하는 경우에 비해 덜 손실되지만 수치진동이 나타나게 된다(Fig. 5(c)). 즉, 정확한 최고/최저 농도점을 잃게 되면 수치 확산이나 수치 진동과 같은 수치오차가 발생된다.

**Table 2.** Summary of advantages and disadvantages of numerical schemes for contaminant transport

Numerical methods	Advantages	Disadvantages
Eulerian method	1. Conserve mass globally (Healy and Russell, 1998). 2. Treat boundaries in a straightforward manner.	1. Have restrictions on the size of the Courant number and mesh Peclet number (Healy and Russell, 1998; Yeh et al., 1992). 2. Have time truncation error (Healy and Russell, 1998)
Eulerian-Lagrangian method	1. Have the significant advantage in the Courant number (Celia et al., 1990; Healy and Russell, 1998). 2. Improve in time truncation error (Healy and Russell, 1998).	1. Do not conserve mass globally (Healy and Russell, 1998). 2. Fail to treat boundaries in a straightforward manner (Healy and Russell, 1998).
ELLAM	1. Conserve mass globally (Healy and Russell, 1998; Celia et al., 1990). 2. Allow for systematic and complete treatment of boundaries (Healy and Russell, 1998; Celia et al., 1990). 3. Do not have limitation for restrictions on the size of the mesh Peclet number or Courant number (Healy and Russell, 1998; Celia et al., 1990). 4. Solve time truncation error (Celia et al., 1990).	Critical aspect of ELLAM is evaluation of mass storage integral from the preceding time level (Healy and Russell, 1998).
LEZOOMPC (a kind of Eulerian-Lagrangian method)	1. Consist of forward particle tracking, backward particle tracking, adaptively local zooming (Cheng et al., 1996). 2. Capture peak and valley (Cheng et al., 1996). 3. Solve accurately by using mesh Peclet number ranging from 0 to infinite (Cheng et al., 1996).	1. Do not conserve mass (Healy and Russell, 1998). 2. Fail to treat boundaries in a straightforward manner (Healy and Russell, 1998).

위의 수치 모의 결과를 다시 고려하면, LEZOOMPC의 결과는 mesh Peclet number가 무한대인 경우에도 해석해와 잘 일치하는 반면, ELLAM의 결과는 mesh Peclet number가 무한대인 경우 수치진동이 발생했다. ELLAM은 최고/최저 농도점을 잃어버리고, 농도 변화가 급격한 구간에서 적분 점의 간격을 세밀하게 설정하지 못하기 때문에, Fig. 3(a), 3(c)과 같이 수치 오차가 발생하는 것으로 판단된다. 따라서 ELLAM에 LEZOOMPC의 후향 입자추적, 전향 입자추적, 최고/최저 농도점 이동 추적 과정과 선택적 국부 격자 세립화 과정을 결합한다면, 격자점에서 최고/최저 농도점을 잃어버려서 나타나는 수치오차 (Fig. 5)와 농도 변화가 급격한 구간에서 적분 점의 간격을 세밀하게 설정하지 못해서 나타나는 수치오차 (Fig. 4)를 줄일 수 있을 것으로 판단된다.

**4. 결 론**

본 연구는 오염물 거동에 대한 수치 해석을 위해 보편적으로 사용되고 있는 수치 방법들의 장단점을 검토하였고 이를 요약하면 Table 2와 같다. 특히 최근 10년간 지하수 분야에서 크게 대두되는 ELLAM의 단점을 파악하기 위해 mesh Peclet number가 다른 예제들에 대한 ELLAM, LEZOOMPC, visual MODFLOW의 결과를

비교하였다. 그 결과, mesh Peclet number가 무한대일 때 ELLAM의 결과에는 수치진동이 발생되었지만, LEZOOMPC의 결과는 해석해와 잘 일치하였다. 따라서 ELLAM의 결과에 수치오차가 발생한 이유를 파악하기 위해, 수치 알고리즘에서 일반적으로 수치오차가 발생하는 원인들을 분석하였다. 그 결과, ELLAM은 격자점에서 최고/최저 농도점을 잃어버리고, 농도 변화가 급격한 구간에서 적분 점의 간격을 세밀하게 설정하지 못 하기 때문에, 수치 오차가 발생하는 것으로 판단되었다. 따라서 본 연구는 ELLAM에 LEZOOMPC의 후향 입자추적, 전향 입자추적, 최고/최저 농도점 이동 추적 과정과 선택적 국부 격자 세립화 과정을 결합하면, 격자점에서 최고/최저 농도점을 잃어버리고, 농도변화가 급격한 구간에서 적분점의 간격을 세밀하게 설정하지 못하여 발생하는 수치오차를 해결할 수 있을 것으로 판단하고 앞으로 이에 대한 연구가 진행되어야 할 것으로 판단된다.

**5. 감사의 글**

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발사업단의 연구비지원(대수층 활용 상수도 공급 시스템 개발, 과제번호 3-4-2)에 의해 수행되었다. 연구비를 지원해준 사업단 측에 감사드린다.

## 참고 문헌

- Baptista, A.M., 1987, Solution of advection-dominated transport by Eulerian-Lagrangian methods using the backward methods of characteristics, Ph.D. thesis, Dep. of Civ. Eng., Mass. Inst. of Technol., Cambridge.
- Baptista, A.M., Adams, E., and Stolzenbach, K., 1984, Eulerian-Lagrangian analysis of pollutant transport in shallow water, Rep. 296, R.M. Parsons Lab. for Water Resour. and Hydrodyn., Mass. Inst. of Technol., Cambridge.
- Binning, P.J. and Celia, M.A., 1996, A finite volume Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for solution of contaminant transport equations in two-dimensional multiphase flow systems, *Water Resour. Res.*, **32**, 103-114.
- Celia, M.A., 1994, Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods for contaminant transport simulations, In *Computational Methods in Water Resources X*, ed. Alexander Peters et al. Kluwer Academic Press, London, 207-216.
- Celia, M.A., Russell, T.F., Herrera, I., and Ewing, R.E., 1990, An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation, *Adv. Water Resour.*, **13**, 187-206.
- Cheng, J.R., Cheng, H.P., and Yeh, G.T., 1996, A Lagrangian-Eulerian method with adaptively local zooming and peak/valley capturing approach to solve two-dimensional advection-diffusion transport equations, *International J. Numerical Methods in Engineering*, **39**, 987-1016.
- Douglas, J. and Russell, T.F., 1982, Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**, 871-885.
- Harbaugh, A.W., Banta, E.R., Hill, M.C., and McDonald, M.G., 2000, MODFLOW-2000, The U.S. Geological Survey modular ground water model-User guide to modularization concepts and the ground water flow process, Open-File Report 00-92, US Geological Survey.
- Healy, R.W. and Russell, T.F., 1993, A finite-volume Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for solution of the advection-dispersion equation, *Water Resour. Res.*, **29**, 2399-2413.
- Healy, R.W. and Russell, T.F., 1998, Solution of the advection-dispersion equation in two dimensions by a finite-volume Eulerian-Lagrangian localized adjoint method, *Adv. Water Resour.*, **21**(1), 11-26.
- Herrera, I., Ewing, R.E., Celia, M.A., and Russell, T.F., 1993, Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods: the theoretical framework, *Numer. Meth. PDEs*, **9**, 431-458.
- Konikow, L.F. and Bredehoeft, J.D., 1978, Computer model of two-dimensional solute transport and dispersion in groundwater, Techniques of Water-Resources Investigation of the United States Geological Survey, chapter C2, book 7, USGS, Reston, Va.
- Leonard, B.P., 1988, Universal limiter for transient interpolation modeling of advective transport equations: The ULTIMATE conservative difference scheme, NASA Tech. Memo. 100916.
- Leonard, B.P. and Mokhtari, S., 1990, Beyond first-order unwinding: The ULTRA-SHARP alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **30**, 729-866.
- Russell, T.F., 1990, Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods for advection-dominated problems. In *Numerical Analysis*, 1989, Pitman Res. Notes Math, Series, Vol. 228, ed. D.F. Griffiths & G.A. Watson. Longman Scientific and Technical, Harlow, U.K., 206-228.
- Williamson, D.L., and Rasch, P.J., 1988, Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape preserving interpolation, *Mon. Weather Rev.*, **117**, 102-109.
- Yeh, G.T., 1990, A Lagrangian-Eulerian method with zoomable hidden fine-mesh approach to solving advection-dispersion equations, *Water Resour. Res.*, **26**(6), 1133-1144.
- Yeh, G.T., Chang, J.R., and Short, T.E., 1992, An exact peak capturing and oscillation-free scheme to solve advection-dispersion transport equations, *Water Resour. Res.*, **28**(11), 2937-2951.