

일단고정 타단스프링으로 지지된 변단면 Beck 기둥의 임계하중

Critical Loads of Tapered Beck's Columns with Clamped and Spring Supports

이 병 구† 김 석 기* 박 광 규**

Lee, Byoung-Koo Kim, Suk-Ki Park, Kwang-Kyou

(논문접수일 : 2005년 8월 3일 ; 심사종료일 : 2006년 2월 23일)

요 지

이 논문은 일단고정 타단스프링으로 지지된 변단면 Beck 기둥의 임계하중에 관한 연구이다. 기둥의 변단면을 중실 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하고, Bernoulli-Euler보 이론을 이용하여 경사종동력이 작용하는 소위 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 하중-고유진동수 곡선을 얻고 이로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 수치해석의 결과로부터 변단면 형태, 경사변수 및 스프링 강성이 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다.

핵심용어 : 변단면 Beck 기둥, 발산임계하중, 동요임계하중, 경사종동력, 동요진동수

Abstract

This paper investigates critical loads of the tapered Beck's columns with clamped and spring supports, subjected to a subtangential follower force. The linearly tapered columns with the solid rectangular cross-section is adopted as the column taper. The differential equation governing free vibrations of such Beck's columns is derived using the Bernoulli-Euler beam theory. Both divergence and flutter critical loads are calculated from the load-frequency curves which are obtained by solving the differential equation. The critical loads are presented as functions of various non-dimensional system parameters: the taper type, the subtangential parameter and the spring stiffness.

keywords : tapered Beck's column, divergence critical load, flutter critical load, subtangential follower force, flutter frequency

1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본적인 구조요소이므로 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정성 문제에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속체 또는 이산계로서 모형화하여 기둥에 작용하는 축하중으로는 그림 1(a)와 같은 보존력 또는 그림 1(b), (c)와 같은 비보존력을 고려하였다(Bok-aian, 1988).

Beck 기둥과 같이 비보존력인 종동력(follower force)을 받는 구조물의 실현성 여부에 관한 논란이 있었다(Koiter,

1996). 최근에는 제어기술의 발달로 필요에 따라서 하중의 방향을 바꿀 수 있게 되었으며 이러한 구조계는 비보존력을 형성하기 때문에 비보존력이 작용하는 구조계의 안정성 문제는 이제 현대 공학에서 매우 중요하게 다루어지고 있다(Sugiyama *et al.*, 1999).

Beck(1952)이 그림 1(c)에 보인 바와 같은 접선종동력(tangential follower force)을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중을 처음으로 구한 이후에 비보존력인 종동력을 받는 기둥의 진동 및 안정 특성에 관한 많은 연구가 이루어졌다. Kounadis와 Katsikadelis(1976)는 전단변형과 회전관성이 Beck 기둥의 거동에 미치는 영향에 대하여 연구하였고,

† 책임저자, 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

전화: 063-850-6718 ; Fax: 063-857-7204

E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr

* 단국대학교 토목환경공학과 교수

** 정회원 · 대전대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Sankaran과 Rao(1976)는 변단면 캔틸레버 기둥의 동요 임계하중(flutter critical load)과 이에 대응하는 동요고유진동수(flutter frequency)를 산출하였다. Pedersen(1977)은 그림 1(b)에서와 같은 경사종동력(subtangential follower force)이 작용하는 자유단이 스프링으로 지지되어 있고 집중질량을 갖는 등단면 캔틸레버 기둥의 안정성에 관한 연구를 수행하였다. Chen과 Ku(1992)는 자유단 집중질량을 갖는 Beck 기둥의 고유진동수 및 임계하중을 산출하기 위한 유한요소 모델을 제시하였다. Kuo와 Yang(1994)은 비감쇠 비보존력계의 임계하중을 산출하였다. Sato(1996)는 자유단에 집중질량을 갖고 종동력이 작용하는 Timoshenko 보의 동적 불안정성을 연구하였다. Ryu 등(1997)은 경사종동력이 작용하고 중간에 탄성지점을 갖는 캔틸레버 보의 동적 안정성에 대하여 연구하였다. Langthjem과 Sugiyama(1999)는 종동력이 작용하는 캔틸레버 기둥의 동적 안정에 대한 최적 형상을 산출하였다.

보존력이 작용하는 구조물은 반드시 발산임계하중(divergence critical load)을 갖는 것은 잘 알려진 사실이다. 비보존력이 작용하는 구조물은 기하적 형상, 경계조건 및 비보존력의 특성에 따라서 발산임계하중 또는 동요임계하중을 갖는다. 이와 같은 비보존력을 받는 구조물의 안정성 해석은 정적 개념에 의해서는 해석할 수 없고 관성효과가 고려된 동적 개념에 의한 해석이 수행되어야만 가능하다.

이 논문은 비보존력인 경사종동력이 작용하는 변단면 Beck 기둥의 고유진동수와 임계하중에 관한 연구이다. 기둥의 자유단은 스프링으로 지지되어 있다. 기둥의 변단면으로는 선형변단면을 채택하고, 직사각형 단면을 갖는 폭 변단면, 깊이 변단면 및 정방형 변단면을 고려하였다. 이러한 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 관계를 이용하여 발산임계하중과 동요임계하중을 산출하고, 기둥의 체변수 변화에 따른 임계하중의 영향을 고찰하고 이를 그림에 나타내었다.

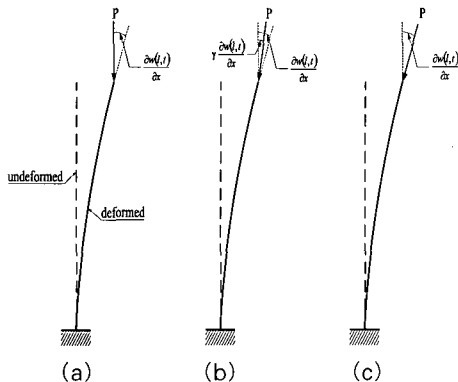


그림 1 (a) 보존력과 (b), (c) 비보존력이 작용하는 기둥

2. 수학적 모형

2.1 기둥의 변단면

변단면 형태는 구조물의 특성에 따라 여러 가지의 형태를 가질 수 있다. 이 연구에서는 기둥의 변단면으로 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하였다. 선형 변단면의 형태는 구조물의 정·동적 및 안정해석에서 자주 이용되고 있으며 그림 2와 같이 폭 변단면(width taper), 깊이 변단면(depth taper) 및 정방형 변단면(square taper)의 3 가지 형태가 있다.

이 그림에서 l 은 기둥 길이이고, x 축은 기둥의 종방향 좌표이며 이와 수직인 d 축은 변단면의 변화제원을 나타낸다. 따라서 그림 2(a)의 폭 변단면은 d 축과 휨 축인 z 축이 일치하고 직교좌표계에서 w 축은 d , z 축에 수직한다. 그림 2(b), (c)에 높이 및 정방형 변단면이 기술되어 있다. 기둥 하단($x=0$)에서 $d=d_a$ 이고, 기둥상단($x=l$)에서 $d=d_b$ 이다. 변화제원 d 는 직선적으로 변화하는 선형이므로 기둥축의 임의점 x 에서 d 는 다음 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$d = d_a(\beta - 1)x/l + d_b \quad (1)$$

여기서 β 는 단면비이며 다음 식 (2)와 같이 정의된다.

$$\beta = d_b/d_a \quad (2)$$

식 (1)과 같은 제원을 갖는 선형 변단면의 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 는 다음 식 (3), (4)와 같이 나타낼 수 있다(Kupta, 1985).

$$A = A_a[1 + (\beta - 1)x/l]^m \quad (3)$$

$$I = I_a[1 + (\beta - 1)x/l]^n \quad (4)$$

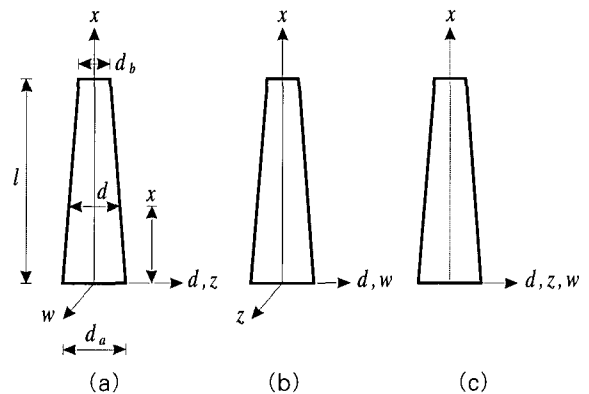


그림 2 선형 변단면: (a) 폭 변단면 (b) 깊이 변단면 및 (c) 정방형 변단면

위에서 A_a, I_a 는 고정지점($x=0$)에서 기둥의 단면적과 단면2차모멘트를 나타내고, (m, n) 은 변단면의 기하적 특성을 나타내는 단면형상계수이며 이 값은 변단면 형상별로 다음과 같다.

폭 변단면: $m=1, n=1$ (5a)

깊이 변단면: $m=1, n=3$ (5b)

정방형 변단면: $m=2, n=4$ (5c)

2.2 지배 미분방정식

그림 3에서 점선은 길이가 l 이고, 자유단이 스프링으로 지지되어 있는 변형 전의 변단면 캔틸레버 기둥을 나타낸다. 실선은 자유단에 경사종동력 P 가 작용하고 있는 소위 Beck 기둥이 자유진동하고 있는 진동형의 전형적인 예를 나타낸다.

이 그림에서 A 와 I 는 2.1절에서 이미 정의한 바와 같이 기둥 축 x 에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타내며, A_a 와 I_a 는 기둥하단($x=0$)에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타낸다. K 는 자유단 스프링의 스프링 상수이며, α 는 자유단의 단면회전각이고, γ 는 비보존력인 하중 P 의 경사정도를 나타내는 경사변수(subtangential parameter)이다. 여기서 경사변수 γ 는 기둥의 필요한 제어조건에 따라서 결정되는 각도이므로 출력변수가 아니고 입력변수이다. $w(x,t)$ 는 횡방향 진동변위이고 t 는 시간이다.

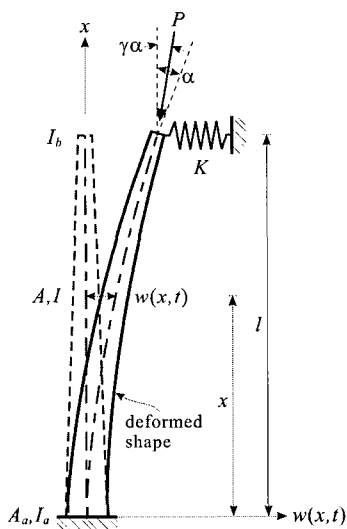


그림 3 Beck 기둥의 진동형 예 및 제변수

Bernoulli-Euler보 이론에 의한 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (6)과 같으며 이 편미분방

정식은 비보존력을 받는 경우에도 적용될 수 있다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

여기서 E 와 ρ 는 기둥 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면, 횡방향의 동적 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수(r/s), i 는 모드 번호이다.

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (8)$$

$$\eta = w_x/l \quad (9)$$

$$p = Pl^2/(EI_a) \quad (10)$$

$$k = Kl^3/(EI_a) \quad (11)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)} \quad (12)$$

여기서 식 (8), (9)의 (ξ, η) 는 직교좌표계 (x, w_x) 를 기둥 길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이며, p 는 무차원 하중, k 는 스프링 변수, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (6)에 식 (3), (4), (7)을 대입하고, 식 (8)~(12)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 식 (13)과 같이 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = - \frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \left\{ \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} + \frac{p}{[1+(\beta-1)\xi]^n} \right\} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n} \eta \quad (13)$$

2.3 경계조건

기둥하단 ($x=0$)은 고정지점이므로 자유진동의 진폭은 $w_x=0$ 이고 단면회전각은 $dw_x/dx=0$ 이 된다. 여기에 식 (8), (9)의 무차원 변수식을 적용하면 $\xi=0$ 에서 무차원 경계조건을 다음 식 (14), (15)와 같이 얻을 수 있다.

$$(\eta)_{\xi=0} = 0 \tag{14}$$

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0 \tag{15}$$

기둥의 자유단($x=l$)에서 휨 모멘트는 0이므로 $EI_b d^2 w_x / dx^2 = 0$ 이다. 자유단에는 경사종동력 P 가 작용하고 있고, 스프링 상수가 K 인 스프링으로 지지되어 있으므로 전단력은 $EI_b d^3 w_x / dx^3 = -P(1-\gamma)dw_x/dx + Kw_x$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 I_b 는 자유단의 단면2차모멘트이며, 식 (4)를 이용하여 얻을 수 있다. 이 식들에 무차원 변수인 식 (8)~(13)을 적용하면 $\xi=1$ 에서 무차원 경계조건을 다음 식 (16), (17)과 같이 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\xi=1} = 0 \tag{16}$$

$$\left(\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{p(1-\gamma)}{\beta^n} \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{k}{\beta^n} \eta\right)_{\xi=1} = 0 \tag{17}$$

2.4 수치해석 방법

유도된 상미분방정식을 식 (14)~(17)의 경계조건을 이용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 $\eta(\xi)$ 를 구할 수 있다. 진동형 $\eta(\xi)$ 를 산출하기 위해서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하고 미분방정식의 고유치인 C_i 를 산출하기 위해서는 Regula-Falsi법과 결합한 시행착오적 행렬값 탐사법을 이용하였다(이병구 등, 2002; Lee 등, 2000:). 이와 같은 수치해석 방법을 설명하면 다음과 같다.

- ① 입력변수인 (m, n), β, k, p 를 정의한다.
- ② 고유치 C 를 가정한다. 최초의 가정 값은 0이다.
- ③ Runge-Kutta법을 이용하여 미분방정식을 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 까지 수치적분하여 착오적 해 $d^3\eta/d\xi^3, d^2\eta/d\xi^2, d\eta/d\xi, \eta$ 를 산출한다.
- ④ 수치적분의 결과로부터 $\xi=1$ 에서의 경계조건인 식 (16), (17)의 만족여부를 판단할 수 있는 행렬값 D 를 계산한다. 앞에서 가정한 C 가 고유치의 참 값이면 $D=0$ 이다. 제1수렴조건은 다음 식과 같다.

$$|D| \leq 1 \times 10^{-8} \tag{18}$$

⑤ 식 (18)의 수렴조건을 만족하지 않으면 C 값을 증가하여 2~4의 과정을 반복시행하며 D 의 부호를 관찰한다.

⑥ 반복시행하는 과정에서 D 의 부호가 바뀌면 참 C 값은 전 단계의 C_a 와 현 단계의 C_b 사이에 있으므로 Regula-Falsi법에 의하여 참 C 값에 근접한 C_c 값을 다음과 같이 계산한다.

$$C_c = \frac{C_a|D_b| + C_b|D_a|}{|D_a| + |D_b|} \tag{19}$$

여기서 D_a, D_b 는 C_a, C_b 에 대응하는 D 값이다.

⑦ 제2의 수렴조건은 다음 식과 같다.

$$\left| \frac{C_c - C_a}{C_c} \right| \leq 1 \times 10^{-3} \tag{20}$$

⑧ 제1 또는 제2의 수렴조건 중 하나를 만족하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 $\eta(\xi)$ 을 출력한다.

본 연구에서는 $i=1, 2$ 의 2개의 최저차 C_i 를 산출하였다. 이렇게 산출된 하중 단계별 고유진동수를 이용하면 하중-고유진동수 관계를 그릴 수 있고, 이러한 전형적인 예를 그림으로 들면 다음 그림 4와 같다.

이 그림에서 종동력 p 가 증가함에 따라서 C_i 는 감소하고 $C_1=0$ 이 되는 □로 표시된 좌표의 p 값이 발산임계하중 p_d 이다. 발산임계하중에서 기둥은 정적으로 좌굴한다. 그림 1(a)에서 $\gamma=0$ 인 Euler 기둥은 반드시 발산임계하중을 갖는다. 이 그림의 또 다른 곡선에서 $C_1=C_2$ 가 되는 ■로 표시된 좌표의 p 값이 동요임계하중 p_f 이고, 이 C_i 값이 동요고유진동수 C_f 이다. 동요임계하중에서는 2개의 진동형이 서로 같아지기 때문에 기둥이 자유진동하게 되면 기둥은 동요하여 동적 불안정 상태에 빠진다. 그림 1(c)에 보인 $\gamma=1$ 인 접선종동력이 작용하는 경우에는 반드시 동요임계하중을 갖는다. 한편, 그림 1(b)에 보인 $0 < \gamma < 1$ 인 경사종동력이 작용하는 기둥에서는 γ 값의 크기에 따라서 임계하중의 형태가 발산임계하중 또는 동요임계하중으로 달라질 수 있다.

본 연구에서는 전술한 수치해석 방법을 이용하여 하중단계별 고유진동수를 얻고 이로부터 $C_1=0$ 가 되는 최저 발산임계하중 p_d 와 $C_1=C_2$ 가 되는 최저 동요임계하중 p_f 를 산출하였다.

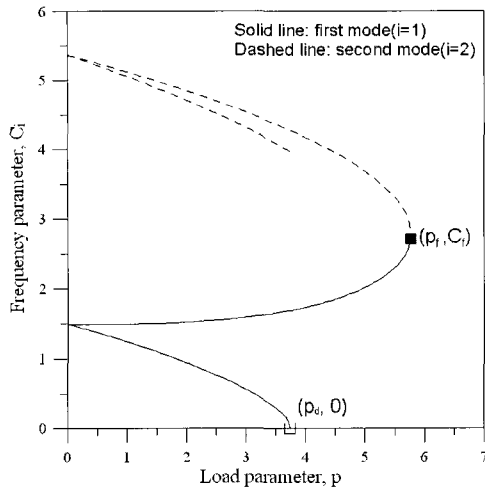


그림 4 하중-고유진동수 곡선의 예

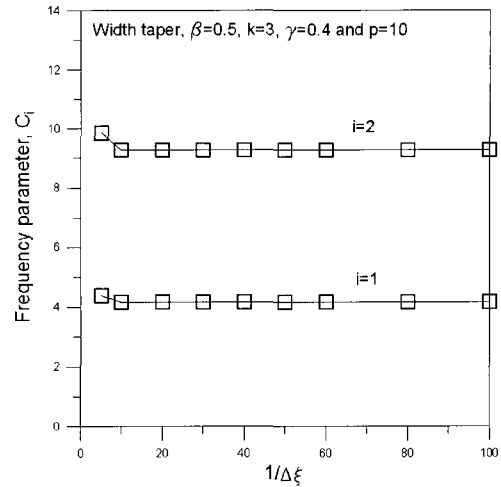


그림 5 수렴해석

수치해석 과정에서 엄밀하게 정확한 임계하중을 산출할 수 없기 때문에 $C_1 \leq 1 \times 10^{-3}$ 의 오차를 고려하여 p_d 를 산출하였다. 또한 $C_2 - C_1 \leq 1 \times 10^{-3}$ 의 오차한계를 고려하여 p_f 를 산출하고 $C_f = (C_1 + C_2)/2$ 를 동요고유진동수로 결정하였다.

이상에서 설명한 알고리즘을 이용하여 단면형상계수 (m, n), 단면비 β , 스프링 변수 k 및 경사변수 γ 값이 입력되면 $i=1, 2$ 의 2개의 무차원 고유진동수 C_i 와 진동형 $\eta(\xi)$ 및 최저 임계하중(p_d 또는 p_f)을 산출할 수 있는 2개의 컴퓨터 프로그램을 FORTRAN어로 작성하였다.

3. 수치해석 예 및 고찰

수치해석 예를 실시하기 전에 수렴해석을 실시하여 Runge-Kutta법에서 적절한 단계길이 $\Delta\xi$ 를 결정하였다. 그림 5는 수렴해석의 결과를 나타낸 그림이며, 이 그림으로부터 $1/\Delta\xi$ 를 10이상 즉 $\Delta\xi = 1/10 (=0.1)$ 이면 수치해 C_i 는 충분한 정도로 수렴되는 것을 알 수 있다. 이 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\xi = 50$ 을 이용하여 이 연구의 모든 수치해를 산출하였다. $1/\Delta\xi = 50$ 을 이용하면 유효숫자 3자리 정도의 C_i 값을 산출할 수 있었다.

본 연구 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 문헌(SAP 2000, 1999; Sato, 1996)의 고유진동수와 임계하중을 표 1에서 비교하였다. 본 연구의 결과는 문헌의 결과와 매우 우수하게 근접하여 이 연구에서 개발한 이론적 방법 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있다.

그림 6은 폭 변단면, $\beta=0.5, k=3, \gamma=0.10/0.32/0.33/0.80$ 에 대하여 하중-고유진동수곡선을 나타낸 그림이

다. $\gamma=0.10, 0.32$ 에서는 p 가 증가함에 따라 C_i 는 계속 감소하여 \square 로 표시된 $C_1=0$ 이 되는 발산임계하중 $p_d = 5.02, 9.31$ 을 갖는다. 이 기동에 발산임계하중이 작용하면 기동은 정적으로 좌굴한다. 이 그림의 $\gamma=0.33, 0.80$ 에 대해서는 \blacksquare 로 표시된 $C_1=C_2$ 가 되는 동요고유진수 $C_f = 5.57, 11.8$ 을 갖고, 이에 대응하는 동요임계하중은 $p_f = 11.6, 14.0$ 이다. 동요임계하중이 작용하는 기동은 동요하여 동적으로 안정성을 잃게 된다. 이 그림에서 $0.32 < \gamma < 0.33$ 의 γ 값 범위에서 임계하중은 발산임계하중에서 동요 임계하중으로 변환되는 것을 알 수 있다.

표 1 본 연구와 문헌의 결과 비교

기동의 기하적 형상	C_1, C_2 또는 p_f	
	본 연구	문헌 a, b
등단면 $\beta=1.0, k=2,$ $\gamma=0, p=0$	$C_1 = 4.495$ $C_2 = 22.22$	$C_1 = 4.495$ (a) $C_2 = 22.22$
깊이 변단면 $\beta=0.5, k=1,$ $\gamma=0, p=0$	$C_1 = 4.686$ $C_2 = 18.60$	$C_1 = 4.676$ (a) $C_2 = 18.56$
폭 변단면 $\beta=0.4, k=0,$ $\gamma=1$	$p_f = 14.83$	$p_f = 14.81$ (b)
정방형 변단면 $\beta=0.6, k=0,$ $\gamma=1$	$p_f = 8.425$	$p_f = 8.422$ (b)

a SAP2000 ; b Sato 1996

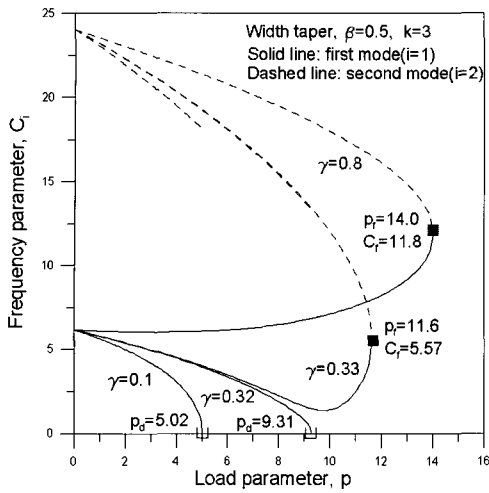


그림 6 하중-고유진동수 곡선

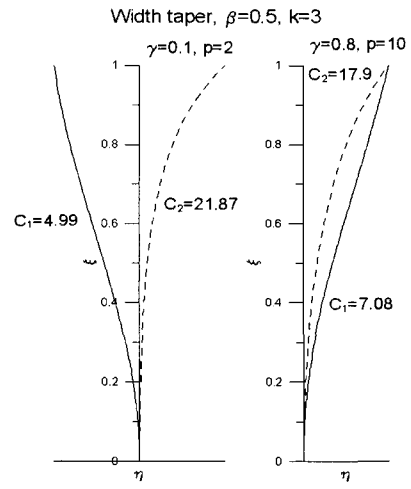


그림 7 진동형의 예

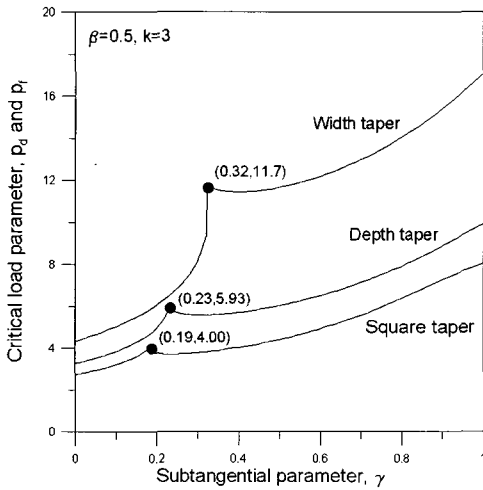


그림 8 경사변수-임계하중 곡선

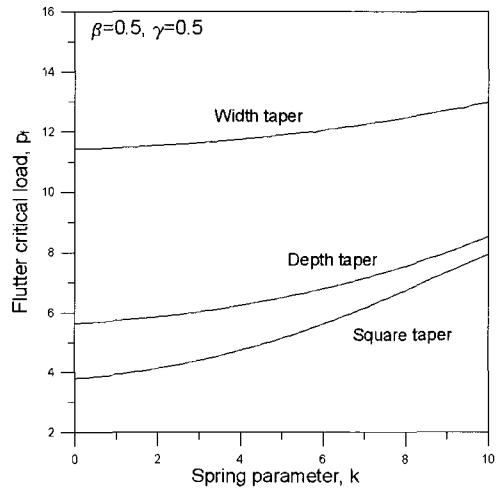


그림 9 스프링 변수-동요임계하중 곡선

그림 7은 그림 6에서 보여준 하중-고유진동수 곡선에서 ($\gamma=0.10, p=2$) 와 ($\gamma=0.80, p=10$) 에 대응하는 진동형을 나타낸 그림이다. 전자의 경우는 발산임계하중을 갖는 γ 값의 범위이며 일반적인 진동형의 형태를 갖지만 경사종동력과 스프링의 영향으로 무변위 절점(nodal point)을 갖고 있지 않은 진동형들이 모두 제1, 2모드의 진동형이 되고 있다. 일반적인 경우는 제2모드에서 무변위 절점을 갖는다. 후자의 경우는 γ 값의 범위가 동요임계하중을 갖는 범위이다. 여기에서도 제2진동형은 무변위 절점을 갖지 않는다. 자유단이 스프링으로 지지되어 있어 자유단 처짐이 구속되고 있지만 전자, 후자 모두 자유단에서 최대 진폭을 보이고 있다. 독자의 참고를 위하여 이 그림에 C_1, C_2 값을 표기하였다.

그림 8은 $\beta=0.5, k=3$ 에 대하여 폭 변단면/깊이 변단면/정방형 변단면 기둥의 γ 값 변화에 따른 임계하중의

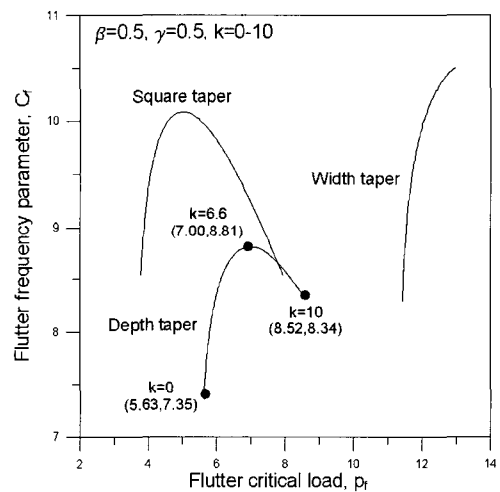


그림 10 동요임계하중-동요고유진동수 곡선

변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 ●로 표시된 γ 값에

서 임계하중은 발산임계하중에서 동요임계하중으로 변환된다. 예로서 변화폭 변단면인 경우에 γ 값이 0.32이하이면 발산임계하중을 갖고, γ 값이 0.32이상이면 동요임계하중을 갖는다. γ 값이 증가하면 발산임계하중은 증가하고, 동요임계하중은 감소하다가 다시 증가한다. 발산임계하중과 동요임계하중은 모두 폭-변단면>깊이-변단면>정방향-변단면의 순서로 크다.

그림 9는 $\beta=0.5$, $\gamma=0.5$ 에 대하여 깊이/폭/정방향 기둥의 스프링 변수 k 값의 변화에 따른 동요임계하중 p_f 의 변화를 나타낸 그림이다. k 가 증가하면 구조물의 강성도 증가하여 p_f 도 증가함을 알 수 있다.

그림 10은 그림 9에 나타낸 동요임계하중 p_f 와 이에 대응하는 동요고유진동수 C_f 와의 관계를 나타낸 그림이다. 여기서 (p_f, C_f) 의 값들은 이 그림에 나타낸 바와 같이 $\beta=0.5$, $\gamma=0.5$, $0 \leq k \leq 10$ 의 조건에서 산출된 값들이다. p_f 가 증가하면 C_f 는 증가하다가 감소한다. 이 그림으로부터 Beck 기둥의 동적 안정 영역을 판단 할 수 있다. 예로서 깊이 변단면인 경우에 ●로 표시된 좌표로부터 p_f , C_f 의 범위는 각각 $5.63 \leq p_f \leq 8.52$ 및 $7.35 \leq C_f \leq 8.81$ 임을 알 수 있다. 이러한 범위는 Beck 기둥의 안정성을 확보하는데 정·동적 자료를 제공해준다. 이 그림에서 폭 변단면이 다른 변단면에 비하여 상대적으로 더 큰 p_f , C_f 값을 보여 기둥의 안정성에 대하여 유리하다.

4. 결 론

이 논문은 일단고정 타단스프링으로 지지되고 비보존력인 경사중동력이 작용하는 변단면 Beck 기둥의 안정성에 관한 연구이다. 기둥의 변단면은 선형으로 변화하는 변단면을 채택하였다. 대상기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 수치적 기법을 개발하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 곡선으로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 수치해석의 결과를 분석하여 경사변수와 스프링 변수가 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다. 이 연구의 결과는 변단면 Beck 기둥의 정·동적 안정해석에 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

이병구, 진태기, 이태은 (2002) 크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동, 한국전산구조공학회논문집, 15(1), pp.189~195.

- Beck, M.(1952) Die Knicklast Des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 3, pp.225~228.
- Bokaian, A.(1988) Natural frequencies of beams under compressive axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, 126, pp.49~65.
- Chen, L.W. Ku, D.M.(1992) Eigenvalue sensitivity in the stability analysis of Beck's column with a concentrated mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, 153, pp.403~411.
- Koiter, W.T.(1996) Unrealistic follower forces, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp.636~638.
- Kounadis, A, Katsikadelis, J.T.(1976) Shear and rotatory inertia effect on Beck's column, *Journal of Sound and Vibration*, 49, pp.171~178.
- Kuo, S.R. Yang, Y.B.(1994) Critical load analysis of undamped non-conservative systems using bieigenvalue curves, *AIAA Journal*, 32, pp.2462~2468.
- Kupta, A.K.(1985) Vibrations of tapered beams, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 113, pp. 1244~1247.
- Langthjem, A., Sugiyama, Y.(1999) Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load, *Journal of Sound and Vibration*, 226, pp.1~23.
- Lee, B.K., Oh, S.J.(2000) Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume, *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp.2507~2518.
- Pedersen, P.(1977) Influence of boundary conditions on the stability of a column under non-conservative load, *International Journal of Solids and Structures*, 13, pp.445~455.
- Ryu, B.J., Sugiyama, Y., Lee, G.S.(1997) The influence of an intermediate support on the dynamic stability of cantilevered Timoshenko beams subjected to subtangential forces, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '97, Kyongju, Korea, pp.163~168.
- Sankaran, G.V., Rao, G.V. (1976) Stability of tapered cantilever columns subjected to follower forces, *Computers and Structures*, 6, pp.217~220.
- Sato, K.(1996) Instability of a clamped-elastically

restrained Timoshenko column carrying a tip load, subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp.623~630.

Sugiyama, Y., Langthjem, M.A., Ryu, B.J.
(1999) Realistic follower forces, *Journal of Sound and Vibration*, 225, pp.779~782.