

나선형으로 꼬여 만들어진 케이블의 휨거동 모델 I

- 케이블의 기하학적 형상과 철사들 사이의 마찰력 -

Bending Model for Helically Wrapped Cables - Geometry of Cable and Normal Forces between Wires -



홍기증*

*국민대학교 건설시스템 공학부 전임강사

1. 서론

나선형으로 꼬여진 철사로 만들어진 케이블은 여러 산업분야에서 쓰여지고 있다. 전력발전소나 송전소에서는 전도용 케이블로, 케이블교량이나 guyed tower의 지지구조물로, 물건을 들어올리는 기기에서 로프로 사용되고 있다. 그림 1에서 보여주듯이 케이블은 곧게 뻗은 core와 서로 다른 lay angle을 갖고 나선형으로 꼬여져 있는 여러 layer로 이루어져 있다. 철사들간의 마찰력과 미끄러짐 때문에 장력과 휨력을 받는 케이블의 거동은 매우 복잡하다. 이러한 미끄러짐 때문에 케이블의 유효휨강성은 두 개의 한계값(철사들이 서로 모두 붙어있을 때와 철사들이 모두 미끄러질 때) 사이에서 변하게 된다. 이 두 한계값들은 보통 100배정도의 차이를 갖는다.

본 연구의 최종 목적은, 나선형으로 꼬인 철사로 이루어진 케이블의 역학적 모델을 개발하여 인장과 휨을 받는 케이블의 거동을 알아보고자 함이다. 이 연구에서 개발된 모델은 유한요소해석 프로그램에 적용하여 케이블 구조물의 해석에 사용될 수 있다. 지면상의 한계로 인해, 본 논문에서는 케이블의 기하학적인 형상을 수학적식으로 유도하고 인접한 layer의 철사들 간의 접촉면에 작용하는 수직력에 대한 식의 유도까지만 소개하고자 한다. 특히, 변형이 일어난 케이블에서 철사곡률과 변형 없이 곧은 케이블에서

의 철사곡률을 서로 비교하여 후자가 전자를 대신하는 근사식으로 대치될 수 있음을 보여준다. 차후의 논문에서는 본 논문에서 유도된 식을 이용하여 인장과 휨을 받는 케이블에서 철사가 미끄러질 때의 조건식을 유도하고, 철사가 미끄러지는 영역과 미끄러지지 않는 영역으로 구분하여, 적절한 가정을 통하여 각 영역의 철사들에 생기는 축력을 유도한 역학적 모델을 소개할 것이다.

케이블은 수백년 동안 사용되어 왔음에도 불구하고 (Costello 1978) 나선형으로 꼬인 철사로 이루어진 케이블의 휨에 대한 모델은 최근에서야 나타났고 그 수 또한 매우 적다. Costello와 Buston(1982)은 휘어진 막대에 대한 Love(1994)의 식으로부터 비틀림까지 고려하는 케이블의 휨모델을 제안하였지만 철사간의 마찰과 미끄러짐은 무시하였다. Raoof와 Hobbs(1984)는 각 철사의 layer를 orthotropic sheet으로 이상화 하였다. 각 sheet 사이의 마찰과 미끄러짐이 고려되었으며 케이블이 변형되면서 철사간 미끄러짐이 전혀 없는 상태에서 모두 미끄러지는 상태로 변화되는 현상을 나타내었다. Knapp(1988)은 미끄러짐이 없는 상태에서와 마찰이 없는 상태의 두 극한 조건에서 변형된 철사와 변형되지 않은 철사의 kinematic 모델을 가정하여 휨과 비틀림 변형을 계산하였다. Lanteigne(1985)는, 보에 대한 Bernoulli-Euler-Navier (BEN) kinematic 가정과 각 철사의 독립된 휨을 고려하여, 철사의 축력으로부터 케이블의 휨력을 계산하였

다. 여기서 2는 철사들의 미끄러짐이 완전히 없을 때로부터 모든 철사들이 미끄러질 때까지의 상태에서의 휨강성을 계단식의 변화로 보여주었다. 그의 모델에서는 중립축에서 가장 멀리 떨어진 철사에서 미끄러짐이 시작된다고 하였다. 이것은 layer 간의 미끄러짐이 케이블 단면의 중심축 부근에서 시작되는 것을 보여주는 Raof(1989)의 실험결과와 상충된다. Papailiou (1995, 1997)는 미끄러짐이 없는 철사의 축력을 BEN kinematic 가정으로 구하였고, 미끄러지는 철사의 축력을 최대마찰력과 평형식을 통해 구하였다. Papailiou의 모델에서 미끄러짐은 중립축 부근에서 시작되며 이는 Raof의 실험결과와 일치한다. 그의 모델에서는 철사의 미끄러짐이 없는 상태에서부터 미끄러짐이 생기는 상태로 변화할 때, 케이블 휨강성의 변화를 곡선형으로 보여주고 있다. Cardou and Jolicoeur(1997)는 기존의 케이블 모델들의 비교를 훌륭히 요약했다. 마지막으로, 케이블에 관한 두 서적을 언급할 필요가 있다. Irvine(1981)이 펴낸 책은 케이블의 정적거동에 대한 고전적 이론과 팽팽한 케이블의 자유진동에 대한 선형이론에 대해 설명하였다. Costello(1997)는 그와 그의 동료들의 연구를 바탕으로 철사 로프에 대한 여러 가지 이론을 설명하였다. 하지만 이 두 서적 모두 케이블 내부 철사의 미끄러짐에 대해서는 언급하지 않았다.

이 논문에서 개발된 모델은 이전의 Papailiou(1997)의 모델을 개선하고 확장시킨 것이다. 다음과 같은 부분에 그 의미가 있다: (1) 모델을 유도하는 과정에 쓰인 가정들과 근사법에 대해 명쾌하게 기술하였으며, 가능한 부분에서는 수치적인 확인도 제공하였다. 특히, 철사곡률에 대한 단순 근사식을 면밀히 검토하였다. 게다가, 케이블의 대칭성과 Raof 실험(1989)에서 관측된 미끄러지는 철사영역의 변화를 기초로 철사변형의 기본적인 kinematic 가정을 검토하였다. (2) 각기 다른 layer에서 철사의 미소각 변화를 본 논문의 유도과정에서 적절히 고려하여 Papailiou (1995)의 유도과정을 개선하였다. (3) 본 유도식은 실제에서 많이 사용되는 각 layer마다 lay angle이 다른 케이블의 경우에도 적용이 된다. (4) 케이블의 곡률이 증가함에 따라 철사간 미끄러짐 영역이 확장되면서 생기는 케이블의 기하학적 거동과 내부의 힘 거동에 대해 새롭고 분명한 설명과 더 나은 이해를 본 유도과정이 제공한다는 것이 무엇보다 가장 중요하다(이에 대한 내용은 다음 논문에서 게재할 예정임). 제안된 모델은 유한요소 해석 프로그램에 적용되어 대변형에 따른 기하학적 비선형과 철사간의 미끄러짐 때문에 생기는 비선형을 함께 고려하여 정적해석과 동적해석을 수행할 수 있다.

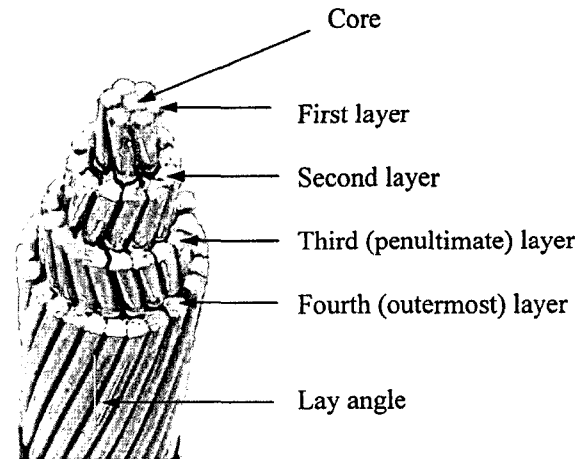


그림 1 나선형으로 꼬여 만들어진 보통의 케이블

2. 케이블과 철사의 기하학적 형상

내부응력이 없는 초기 변형이전의 곧게 뻗은 케이블 형상을 고려해보자. 이 기본형상에서 각 철사는 각 layer에서 일정한 lay angle을 갖는 나선형상을 갖는다. 만약 케이블이 축방향으로 균일하게 늘어나서 곧은 상태를 유지한다면, 인접한 layer에 있는 철사 사이의 축방향 미끄러짐은 생기지 않을 것이다. 다만, 각 layer내부의 철사들 사이에서 미끄러짐이 존재하고, 늘어난 철사는 좀더 작은 lay angle을 갖는 나선형의 형상을 유지할 것이다(Huang and Vinogradov 1993). 이러한 형상에서는, 각 철사의 lay angle과 중심축으로부터의 거리에 따라 각 철사는 일정한 곡률과 tortuosity를 갖는다(Love 1944; Nutbourne and Martin 1988).

케이블이 휘어지면 lay angle과 곡률, tortuosity가 철사의 길이방향을 따라 바뀌며 철사는 더 이상 나선형상을 갖지 않는다. 만약 철사가 인장을 받으면서 철사간의 마찰력이 없다면 철사들은 자유롭게 미끄러지며 geodesic 형상을 갖게 된다(Out and von Morgen 1997). 마찰이 있는 휘어진 케이블 내부의 철사의 형상은 나선형상과 geodesic 형상의 중간 정도의 형상을 갖게 된다.

그림 2는 수직평면 상에서 변형된 케이블 미소요소의 i 번째 철사 layer의 형상을 보여주고 있다. 그림 2a의 휘어진 원통은 한 layer에 있는 철사들의 중심선을 나타내며 굵은 실선은 그 layer에 있는 한 개의 철사를 나타내고 있다. 선택된 단면에서 철사의 점선과 케이블의 중심선이 만드는 각이 lay angle α_i 가 된다. 변형된 형상에서는 이 각은 한 layer 안에 있는 각각의 철사마다 다르고, 철사의 길이 방향에 따라서도 달라진다. 변형된 케이블 속의 철사의

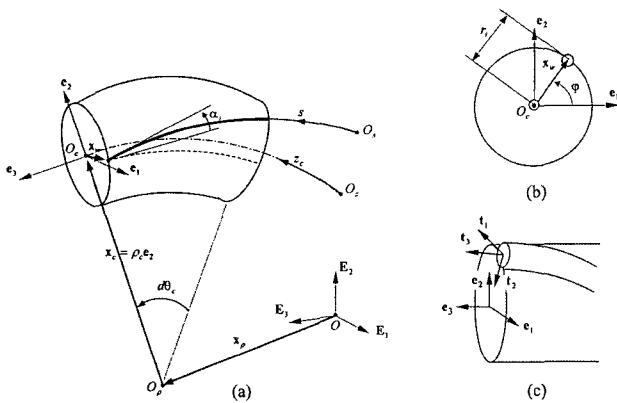


그림 2 변형된 케이블의 형상과 i번째 철사 layer

형상을 나타내기 위해서는 원점 O 와 오른손 법칙을 따르는 서로 수직인 단위벡터 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ 로 이루어진 기본좌표계를 그림 2a에 보이는 바와 같이 정의한다. 단위벡터 $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ 는 휘어진 케이블의 중심선이 놓여있는 수직평면을 정의한다. 오른손 법칙을 따르며 서로 수직인 국부좌표계 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 는, 케이블의 단면 위의 케이블 중심을 원점으로 하여 정의한다(그림 2a와 2b). \mathbf{e}_3 는 케이블 중심선의 접선방향이고, \mathbf{e}_1 은 \mathbf{E}_1 과 평행하면서 케이블이 휘고 있는 수직평면에 수직이 된다. 케이블이 곧은 초기형상으로 있을 때는 두 개의 좌표계는 서로 평행이다. z_c 를 케이블 중심선 위에 있는 원점 O_c 로부터 케이블 중심선을 따라 측정된 거리라고 하자. z_c 의 양의 방향은 \mathbf{e}_3 와 같도록 선택되었다. 같은 방법으로, 철사 중심선 위에 있는 원점 O_s 로부터 철사 중심선을 따라 측정된 거리를 s 라고 하자. 이들을 그림 2a에 나타내었다. s 의 양의 방향은 철사의 접선벡터(s 가 증가하는 방향)와 \mathbf{e}_3 의 scalar product가 양의 값을 갖도록 선택하였다.

θ_c 를 \mathbf{E}_2 로부터 \mathbf{e}_2 까지의 반시계 방향 각도라고 하자. 서로 수직인 국부좌표계의 단위벡터($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$)를 기본좌표계의 단위벡터로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos\theta_c \\ \sin\theta_c \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_c \\ \cos\theta_c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

그림에 보여진 케이블 단면에서, O_p 를 케이블의 순간곡률중심이라 하자. 케이블 단면에 있는 철사 중심을 기본좌표계로 나타내면

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_w \quad (2)$$

여기서, \mathbf{x}_p 는 좌표계 원점 O 로부터 순간곡률중심 O_p 까

지의 벡터, \mathbf{x}_c 는 순간곡률중심으로부터 케이블 단면의 중심 O_c 까지의 벡터, \mathbf{x}_w 는 O_c 로부터 케이블 단면 위의 철사 중심까지의 벡터를 나타낸다.

이제, 케이블은 일정한 곡률을 갖는 곡선으로 변형된다고 가정한다. 여기서 구해진 기하학적인 관계식들은 작은 곡률의 변화를 가지며, 한 평면 위에서 변형하는 케이블에도 유용하게 쓰일 수 있다. 이러한 가정에 의해 \mathbf{x}_p 는 상수 벡터가 된다. $\rho_c = 1/k_c$ 를 O_p 로부터 \mathbf{e}_2 를 따라 측정된 상수곡률반경이라 하면, $\mathbf{x}_c = \rho_c \mathbf{e}_2$ 가 된다. 게다가, 극좌표계를 써서 표현하면 $\mathbf{x}_w = r_i \cos\varphi \mathbf{e}_1 + r_i \sin\varphi \mathbf{e}_2$ 이 된다. 여기서, r_i 는 케이블중심으로부터 철사중심까지의 거리이며, 각 layer에 대해서는 상수가 된다. φ 는 \mathbf{e}_1 으로부터 \mathbf{x}_w 까지의 각도이다. 이 두 변수는 그림 2b에서 보여주듯이 케이블 단면 위에서 정의된다. 이 관계식을 식 (2)에 대입하면

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \begin{Bmatrix} r_i \cos\varphi \\ (\rho_c + r_i \sin\varphi) \cos\theta_c \\ (\rho_c + r_i \sin\varphi) \sin\theta_c \end{Bmatrix} \quad (3)$$

를 얻는다.

3. 철사의 곡률

이 절에서는 미끄러짐이 없는 휘어진 케이블 안의 철사 곡률에 대한 정확한 식을 유도한다. 우리는 정확한 식을 통하여 이후의 해석에서 철사곡률의 단순 근사식의 사용이 가능함을 보여줄 것이다.

그림 2c에서와 같이 철사단면 위에 놓여있고 오른손법칙을 따르며 서로 수직인 단위 방향벡터($\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$)를 고려해 보자. \mathbf{t}_3 는 철사 중심선의 접선방향이며, \mathbf{t}_2 는 principal normal 방향으로 순간곡률중심을 향하고, \mathbf{t}_1 은 binormal 방향이다. 이 벡터들에 대한 수학적 정의는 $\mathbf{t}_3 = d\mathbf{x}/ds$, $\mathbf{t}_2 = (d\mathbf{t}_3/ds) / \|d\mathbf{t}_3/ds\|$, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3$ 이다. 여기서, s 는 철사의 곡선길이를 나타낸다. 철사의 곡률벡터는 $\kappa_w = d\mathbf{t}_3/ds$ 이다(Nutbourne and Martin 1988).

케이블의 축방향변형 ϵ_c 와 곡률 $\kappa_c (= 1/\rho_c)$ 를 갖는 케이블의 미소요소를 고려하고 lay angle α 와 케이블단면 위의 반경과 각 좌표 (r, φ)를 갖는 철사를 고려하자(그림 3). 다음의 관계식은 모든 철사에 적용되므로 subscript i 를 쓰지 않기로 한다. 변형된 케이블을 구성하고 있는 철사의 미소요소에서 $dz = ds \cos(\alpha)$, $r d\varphi = ds \sin(\alpha) = dz \tan(\alpha)$ 가 된다. 여기서, ds 는 철사의 미소곡선길이이며, dz 는 ds 를 케이

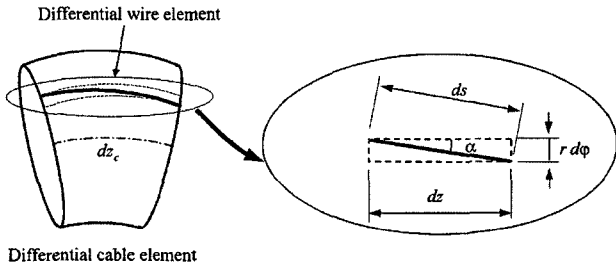


그림 3 변형이 생긴 케이블에 있는 미소철사요소

블 중심선에 투영한 길이이다. 변형되지 않은 곧은 케이블에서도 같은 관계식이 적용되어 $dz_0 = ds_0 \cos(\alpha_0)$, $rd\varphi = ds_0 \sin(\alpha_0) = dz_0 \tan(\alpha_0)$ 가 된다. 여기서 subscript '0'는, 변형이 없는 곧은 케이블과 관련된 변수임을 나타낸다. 케이블의 중심선에서 늘어난 미소길이 $dz_c = \rho_c d\theta_c = (1 + \epsilon_c) dz_0$ 이 된다. $\rho_c = 1/\kappa_c$ 와 $dz_0/d\varphi = r/\tan(\alpha_0)$ 를 이용하면

$$\frac{d\theta_c}{d\varphi} = (1 + \epsilon_c) \frac{k_c r}{\tan \alpha_0} \quad (4)$$

식(4)는 φ 로부터 독립이므로 φ 에 대한 θ_c 의 이차미분은 '0'이다.

부록에서 보여주듯이 변형된 케이블 내부에 있는 철사의 미소곡선길이는

$$ds = ds_0 \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 (1 + \epsilon_c)^2 (1 + k_c r \sin \varphi)^2} \quad (5)$$

이다. 이 결과는 이전에 Knapp(1988)이 케이블의 휨변형에 대해서만 유도했던 식을 더욱 일반화한 것이다. 부록에서 또한 보여주듯이 휘어진 케이블의 곡률벡터는

$$\kappa_w = \left(\frac{\sin \alpha_0}{r} \right)^2 \frac{ds_0}{ds} \left[-k_c A \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} + \frac{ds_0}{ds} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \right) \right] \quad (6)$$

여기서,

$$A = \frac{r \cos \varphi \cos^2 \alpha_0 (1 + \epsilon_c)^2 (1 + k_c r \sin \varphi)}{[\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 (1 + \epsilon_c)^2 (1 + k_c r \sin \varphi)^2]^{3/2}} \quad (7)$$

이고 ds_0/ds 는 식 (5)로부터 이미 알고 있으며, $d\mathbf{x}/d\varphi$ 와 $d^2\mathbf{x}/d\varphi^2$ 는 식 (3)과 식 (4)로부터 $d^2\theta/d\varphi^2 = 0$ 을 이용하여 유도되었다.

케이블단면에서 곡률벡터 κ_w 의 원심방향성분이 인장을 받는 철사의 수직력을 증가시키기 때문에 이것이 우리의 관심대상이다. 이 성분의 크기는 κ_{wr} 로 나타내며, 곡률벡터를 단위원심벡터 위에 투영함으로써 구할 수 있다. 즉, $\kappa_{wr} = \kappa_{wr} \cdot (-\mathbf{x}_w / \|\mathbf{x}_w\|)$ 이다. 여기서, 음부호는 변형 없는 케이블형상에서 κ_{wr} 의 부호를 양으로 만들기 위해 사용되었다. 변형 없는 (곧은) 케이블의 철사곡률의 원심방향성분은 κ_{wr0} 로 나타내며 $\kappa_c = 0$, $\epsilon_c = 0$, $\theta_c = 0$ 을 위 식에 대입하여 구할 수 있다. 그 결과는

$$\kappa_{wr0} = \frac{\sin^2(\alpha_0)}{r} \quad (8)$$

그림 4는 케이블 내부의 각기 다른 layer에서 철사곡률의 원심방향 성분, 케이블 곡률이 바깥에 따라 변형 없는 케이블(dashed line)과 변형된 케이블(solid line)에서, 어떻게 변화하는지를 비교한 것이다. 전력산업에서 많이 쓰이는 Jessamine 케이블(ALCOA 1974)을 선택하여 계산을 수행하였다. 이 케이블은 4개의 layer와 core로 이루어져 있으며, 각 철사의 지름은 4.30mm 이고, 모든 철사의 lay angle은 12°라고 가정하였다. 이 케이블에 대한 정보는 표1에 정리하였다. 변형된 케이블의 중심선상의 축방향 변형은 $\epsilon_c = 10^{-6}$ 이라 가정하였다. 대칭성에 의하여 그림 4에서 단면이 회색으로 덧칠해진 철사들의 곡률만을 보여 주고 있다. 케이블곡률이 $\kappa_c = 1\text{m}^{-1}$ 이 될 때까지는 변형이 생긴 케이블의 철사곡률이 변형 없는 케이블의 철사곡률과 대체로 같음을 보여준다. 더 큰 케이블 곡률에서는 케이블의 위쪽(아래쪽) 반구 영역에 있는 철사들의 곡률이

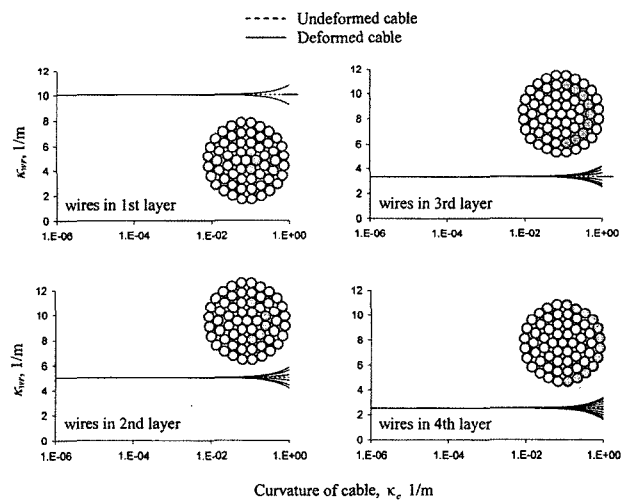


그림 4 변형이 없는 케이블과 변형이 생긴 케이블에서 각기 다른 layer에 생기는 철사곡률의 원심방향성분

표 1 Jessamine 케이블에 대한 정보

Property	Jessamine
Young's modulus	$70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
number of layers except core	4
number of strands	61
strand diameter	4.303 mm
overall conductor diameter	38.73 mm
cross section area	831 mm^2
mass per unit length	2.253 kg/m
lay angle	12 degree
I_{\min}	$1,004 \text{ mm}^4$
I_{\max}	$76,585 \text{ mm}^4$

변형 없는 케이블의 철사곡률보다 더 커진다(작아진다). 이 반구에 있는 철사들은 케이블의 휨에 의해 철사의 인장력이 증가(감소)하게 된다. 매우 큰 케이블 곡률에서는 몇몇 철사의 곡률들은 음의 값을 갖는다. Knapp(1988)도 이러한 현상을 지적하였다.

그림 4는 일반적인 철사의 lay angle을 갖는 케이블이 변형함에 따라 생기는 철사곡률의 원심방향성분은, 케이블 곡률이 $\kappa_c = 1\text{m}^{-1}$ 이 될 때까지는, 변형 없이 곧은 케이블의 같은 성분 값으로 근사화할 수 있음을 보여준다. 일반적인 케이블에서는 케이블 곡률이 $\kappa_c = 1\text{m}^{-1}$ 이 되기 훨씬 이전에 철사들이 미끄러지게 된다. 그러므로, 실용적인 목적을 위해서 κ_{wr} 을 변형 없는 케이블에서의 철사곡률 κ_{wr0} 로 근사화할 수 있다. 이것은 철사에 작용하는 수직력을 계산하는 과정을 매우 간단하게 만든다. Papailiou(1997)는 이 철사곡률에 대한 근사법을 정확도에 대한 평가 없이 사용하였다. 본 연구에서는 이 근사법에 대한 정확도와 한계를 명확히 나타내었다.

4. 철사에 작용하는 수직력

그림 5에서 보여주듯이 인장력 T 와 휨모멘트 M 을 받는 케이블의 미소요소를 생각해 보자. 두꺼운 회색 선으로 표시된 i 번째 layer의 일반적인 철사요소의 양단에 작용하는 인장력은 dT_i 만큼의 차이를 갖는다. 이 힘의 차이는 케이블 중심선으로부터 철사요소 양단까지의 수직거리가 dy 만큼 차이를 갖기 때문에 나타난다. 인장력의 차이 dT_i 는 철사를 길이 방향으로 미끄러지게 하는 원인이 된다. 철사들이 모두 붙어 미끄러지지 않는 상태에서, 이 힘은 그림 5b에서 보여주듯이 철사에 작용하는 마찰력과 평형을 이룬다. dT_i 가 가능한 최대마찰력과 같게 되면 철사는 길이 방향으로 미끄러지려고 할 것이다. 철사가 미끄러지기 시작하면 철사에 작용하는 힘은 재분배 되고 다시 평형

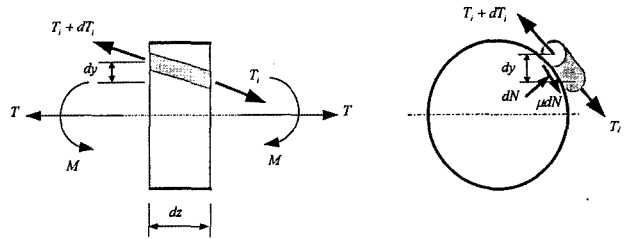


그림 5 미소요소에 작용하는 힘

에 다다를 때까지 미끄러짐이 일어난다.

이 절에서는 각 layer에서 철사에 작용하는 수직력을 구하고자 한다. 이것은 차후의 논문에서 철사들이 붙어있는 상태(stick state)와 철사들이 미끄러지는 상태(slip state)를 나타내는 조건을 표현하는데 쓰이며, 각 철사의 인장력을 계산하는데도 쓰인다. layer는 안쪽에서 바깥쪽으로 순서를 정한다: $i=1, \dots, N$. 여기서, layer 1은 core를 둘러싼 layer를 뜻하며, layer N은 가장 바깥의 layer를 뜻한다. 또한 n_i 는 layer i 에 있는 철사들의 개수, d_i 는 이 철사들의 지름(각 layer에서 철사들의 지름이 모두 같다고 가정함), $A_i = \pi d_i^2 / 4$ 는 이 철사들의 단면적, r_i 는 케이블단면의 중심으로부터 이 철사들의 중심까지의 원심방향 거리를 뜻한다. 철사들은 빈틈없이 꼬여져 있어 $n_i d_i / \cos \alpha_{0,i} = 2\pi r_i$ 라고 가정한다. 게다가, 식의 단순화를 위해 다음과 같은 가정을 한다: (1) 변형이 생긴 케이블에서의 철사의 lay angle은 변형 없는 케이블에서의 철사의 lay angle과 근사하다고 가정한다, 즉, $\alpha_i \cong \alpha_{0,i}$; (2) 철사중심의 위치를 나타내는 극좌표 (r_i, φ_i) 는 케이블에 변형이 일어난 후에도 변화가 없다고 가정한다. (3) 철사곡률을 위해 식 (8)에 나타난 근사식을 쓴다.

먼저 가장 바깥 layer에 있는 철사의 미소요소를 고려하자. 기본적인 정적해석에 의하면, \mathbf{x}_w 와 \mathbf{t}_3 가 만드는 평면내에서 철사에 작용하는 수직분포하중은 $p = k_{wr} T_N$ 이 된다. 여기서, k_{wr} 은 철사곡률의 원심방향성분 값이고, T_N 은 그 철사의 인장력이다. 수직분포하중을 철사요소의 곡선길이 $ds = r_N d\varphi_N / \sin \alpha_N$ 와 곱하면 수직력 $dN_N = k_{wr} T_N r_N d\varphi_N / \sin \alpha_N$ 을 얻는다. 식 (8)의 근사식을 사용하면

$$dN_N = T_N \sin \alpha_N d\varphi_N \tag{9}$$

이 된다. 위의 식은 철사에 인장력이 작용하면 당연히 유효하다. 만약 철사에 인장력이 없다면 철사에는 수직력이 작용하지 않는다.

이제 안쪽의 i 번째 layer($1 \leq i < N$)에 있는 철사를 고

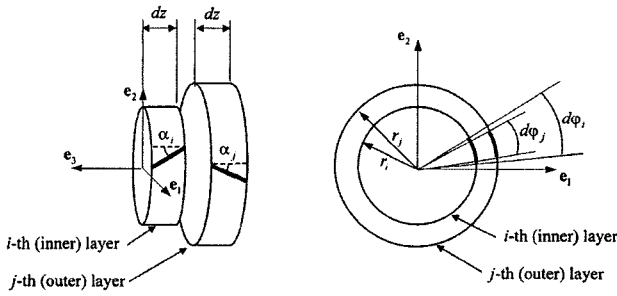


그림 6 두 layer에 있는 철사요소들의 형상

려하자. 이 철사는 인접한 layer들과 맞닿아 있는 안쪽 면과 바깥쪽 면에 수직력이 작용한다. 바깥쪽 면에 작용하는 수직력은 $(i+1)$ 번째에서 N 번째 layer에 있는 철사들의 인장력 때문에 생기는 모든 수직력을 더한 것이다. 또한, 각기 다른 layer에서 철사의 지름과 lay angle이 다를 수 있으므로 이들을 고려하여야 한다. 그림 6은 길이 dz 를 갖고 있는 케이블 미소요소에서 i 번째 layer와 j 번째 layer의 철사요소를 보여주고 있으며($i < j$), i 번째 layer(inner layer) 철사요소의 j 번째 layer(outer layer)로의 원심방향 투영을 보여주고 있다(그림 6b). 이 투영된 영역에 있는 바깥 철사들의 수직력이 i 번째 layer에 있는 안쪽 철사에 전달된다. 그림 6에서 유추되듯이, 투영된 영역은 $r_j(2\pi/n_i)dz$ 과 같다. 그러므로, 투영된 영역 안에 있는 바깥 layer의 총 등가길이는

$$\frac{r_j(2\pi/n_i)dz}{d_j} = \frac{n_j}{n_i} \frac{1}{\cos \alpha_j} dz \quad (10)$$

여기서, 철사들이 빈틈없이 꼬여져 있다고 가정하였으므로 $n_j d_j / \cos \alpha_j = 2\pi r_j$ 가 이용되었다. 식 (9)를 사용하면, j 번째 layer 철사의 인장력 때문에 생기는 이 철사의 단위 길이당 수직력은

$$\frac{dN_j}{ds_j} = T_j \sin \alpha_j \frac{d\phi_j}{ds_j} = T_j \sin^2 \alpha_j \frac{1}{r_j} \quad (11)$$

이 된다. 식 (10)과 식 (11)을 서로 곱하면, j 번째 layer 철사의 인장력 때문에 생겨 i 번째 layer 철사요소의 바깥 면에 작용하는 수직력의 총 합은

$$\begin{aligned} dN_j &= T_j \sin^2 \alpha_j \frac{1}{r_j} \times \frac{n_j}{n_i} \frac{1}{\cos \alpha_j} dz \\ &= T_j \sin \alpha_j \frac{r_i}{r_j} \times \frac{n_j}{n_i} \frac{\tan \alpha_j}{\tan \alpha_i} d\phi_i \end{aligned} \quad (12)$$

이 되며, 여기서 $dz = r_i d\phi_i / \tan \alpha_i$ 가 사용되었다. 모든

바깥 layer에 대해 모두 더하면, 철사요소의 바깥 면에 작용하는 수직력은

$$dN_{i, outer} = \sum_{j=i+1}^N T_j \sin \alpha_j \frac{r_i}{r_j} \times \frac{n_j}{n_i} \frac{\tan \alpha_j}{\tan \alpha_i} d\phi \quad (13)$$

철사요소의 안쪽 면에 작용하는 수직력은 위의 식에 철사요소 자신의 인장력 때문에 생기는 수직력을 더하면 된다. 식 (9)와 식 (13)을 사용하면,

$$\begin{aligned} dN_{i, inner} &= \left(T_j \sin \alpha_i + \sum_{j=i+0}^N T_j \sin \alpha_j \frac{r_i}{r_j} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{n_j}{n_i} \frac{\tan \alpha_j}{\tan \alpha_i} \right) d\phi_i \end{aligned} \quad (14)$$

만약 모든 철사가 똑같은 lay angle과 지름을 갖고 있다면, $r_i n_j \tan \alpha_j / r_j n_i \tan \alpha_i = 1$ 가 되고 식(13)과 식(14)가 단순한 식으로 정리된다. Papailiou(1997)는 그가 고려한 케이블의 각 layer 철사들의 지름과 lay angle이 달랐음에도 불구하고 이 단순화된 식을 사용하였다. 게다가, 그의 유도식에서는 각 layer의 $d\phi_i$ 의 변화를 무시하였다. 이러한 변화는 그림 6에서 명확히 보여주고 있다.

5. 결 론

축방향 변형과 휨을 동시에 갖는 케이블과 구성요소인 철사들에 대한 기하학적 정보를 수학식으로 유도하였으며, 이전 논문들에서 사용된 가정들을 명확히 설명하였다. 특히, 변형된 케이블 내부의 철사곡률을 정확히 계산하고 변형 없는 케이블에서의 철사곡률과 비교하여, 후자가 전자를 대신하여 좋은 근사식으로 쓰일 수 있음을 보여 주었다.

변형이 생긴 케이블 내부의 인접한 layer에 있는 철사들 간의 수직력을 유도하였다. 이 유도식은, 기존의 연구결과보다 진보되어, 다른 layer의 철사들이 서로 다른 지름과 lay angle을 가진 경우도 정확히 계산할 수 있는 일반적인 식이다.

이 논문에서 유도된 케이블과 철사의 기하학적 정보에 대한 유도식과 철사간의 수직력에 대한 유도식을 이용하여 철사의 미끄러짐에 대한 조건식을 수립할 수 있으며, 이를 바탕으로 케이블의 휨거동에 따른 모든 철사들의 축력을 계산하여 케이블 휨거동 모델을 유도할 수 있다. 이에 대한 소개를 차후의 논문에서 게재할 것이다.

부록 - 유도과정

철사요소의 미소곡선길이 ds 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} \\ &= ds_0 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds_0}\right)^2} \quad (15) \\ &= ds_0 \sqrt{\left[\left(\frac{dx_1}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\varphi}\right)^2\right] \left(\frac{d\varphi}{ds_0}\right)^2} \end{aligned}$$

여기서, 철사의 작은 요소에서 s_0 와 φ 는 서로 일대일 대응을 하므로 미분의 chain rule로 이를 적용하였다. 식 (3)과 $rd\varphi = ds_0 \sin\alpha_0$ 를 사용하여 정리하면

$$ds = ds_0 \sqrt{\left\{r^2 + (\rho_c + r \sin \varphi)^2 \left(\frac{d\theta_c}{d\varphi}\right)^2\right\} \left(\frac{\sin \alpha_0}{r}\right)^2} \quad (16)$$

$d\theta_c/d\varphi$ 에 대한 식(4)를 대입하면 식(5)가 유도된다.

철사의 곡률벡터는 $\kappa_w = d^2\mathbf{x} / ds^2$ 로 정의된다. s 와 s_0 는 일대일 대응이므로 미분의 chain rule에 의해

$$\begin{aligned} \kappa_w &= \frac{ds_0}{ds} \frac{d}{ds_0} \left(\frac{ds_0}{ds} \frac{d\mathbf{x}}{ds_0} \right) \\ &= \frac{ds_0}{ds} \left[\frac{d}{ds_0} \left(\frac{ds_0}{ds} \right) \frac{d\mathbf{x}}{ds_0} + \frac{ds_0}{ds} \frac{d}{ds_0} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds_0} \right) \right] \\ &= \frac{ds_0}{ds} \left[\frac{d\varphi}{ds_0} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{ds_0}{ds} \right) \frac{d\varphi}{ds_0} \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} + \frac{ds_0}{ds} \frac{d\varphi}{ds_0} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds_0} \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \right) \right] \\ &= \left(\frac{d\varphi}{ds_0} \right)^2 \frac{ds_0}{ds} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{ds_0}{ds} \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} + \frac{ds_0}{ds} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

미분 $d(ds_0/ds)/d\varphi$ 는 식 (16)을 φ 에 대해 미분하면 구해진다. $d\varphi/ds_0 = \sin\alpha_0/r$ 를 사용하면 식 (6)과 식 (7)이 유도된다.

참고 문헌

- ALCOA (1974). *Electrical conductors*, Pittsburgh.
- Cardou, A., and Jolicoeur, C. (1997). "Mechanical models of helical strands". *Appl. Mech. Rev.*, 50(1), 1-14.
- Costello, G. A. (1978). "Analytical investigation of wire rope". *Appl. Mech. Rev.*, 31(7), 897-900.
- Costello, G. A. (1997). *Theory of Wire Rope*, 2nd Ed., Springer, New York.
- Costello, G. A., and Butson, G. J. (1982). "Simplified bending theory for wire rope". *J. Eng. Mech. Div.*, 108(2), 219-227.
- Hong, K.-J. (2003). "Dynamic interaction in cable-connected equipment". PhD Philosophy dissertation, Univ. of California, Berkeley, Calif.
- Hong, K.-J., Der Kiureghian, A., and Sackman, J. L. (2001). "Seismic interaction in cable-connected equipment items". *J. Eng. Mech.*, 127(11), 1096-1105.
- Huang, X., and Vinogradov, O. (1993). "Analysis of dry friction hysteresis in cables under uniform bending". *Proc. of Damping 93*, San Francisco, FCA1-FCA 20.
- Irvine, H. M. (1981). *Cable Structures*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Knapp, R. H. (1988). "Helical wire stresses in bent cables". *J. Offshore Mech. Arct. Eng.*, 110, 55-61.
- Lanteigne, J. (1985). "Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion and bending". *J. Appl. Mech.*, 52, 423-432.
- Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover, New York.
- Nutbourne, A. W., and Martin, R. R. (1988). *Differential geometry applied to curve and surface design*, Halsted, New York.
- Out, J. M. M., and von Morgen, B. J. (1997). "Slippage of helical reinforcing on a bent cable". *Eng. Struct.*, 19(6), 507-515.
- Papailiou, K. O. (1995). "Die seilbiegung mit einer durch die innere seibung, dir zugkraft und die seilkrümmung veränderlichen biegesteifigkeit". PhD thesis No. 11057, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, Switzerland.
- Papailiou, K. O. (1997). "On the bending stiffness of transmission line conductors". *IEEE Trans. Power Deliv.*, 12(4), 1576-1588.
- Raof, M. (1989). "Free bending tests on large piral stands". *Proc., Inst. Civ. Eng., Part 2: Research and Theory* 87, 605-626.
- Raof, M., and Hobbs, R. E. (1984). "The bending of spiral strand and armoured cables close to terminations". *J. Energy Resour. Technol.*, 106(3), 349-355. 