한국학교수학회논문집 제 9 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 9, Number 1, 57-76, March 2006

예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할 모델의 탐구[1)]

김진환[2)] · 박교식[3)]

본 연구에서는 예비중등교사의 수학화 경험을 위해, 초보적인 상황의 문제를 기반으로 수를 분할하는 문제로 일반화하여, 수의 분할에 관한 일련의 문제 및 상황을 제공하는 데 적절한 수 분할 모델을 고안하고, 그것을 탐구하는 교수단원 <분할 모델의 탐구>를 Wittmann의 교수단원 사상에 따라 설계한다. 이 연구에서 설계하는 <분할 모델의 탐구>는 (1) 실마리 문제 (2) 분할 관점에서의 통합 (3) 분할 모델의 정의 (4) 분할 모델을 활용한 탐구의 네 단계로 이루어진다. 이 교수단원이 예비중등수학 교사교육에 기여할 수 있는 바는 다음과 같다. 첫째, 예비교사들로 하여금 수학화를 경험할 수 있게 해준다. 둘째, 예비교사들로 하여금 학교수학과 학문수학의 연결을 볼 수 있게 한다. 셋째, 예비교사들의 수학적 창의력을 기르는데 도움이 될 수 있다.

주요용어: 수학화, 수평적 수학화, 수직적 수학화, 교수단원, 분할 모델, 반교수학적 전도, 이중단절

I. 서론

작금의 우리나라 예비중등수학교사교육에서는 예비중등수학교사(이하, 간단히 '예비교사')들에게 상당히 많은 양의 학문적인 수학(이하, 간단히 '학문수학')이 부과된다. 대개 그들은 잘 체계화된 수학을 연역적으로 학습한다. 그들은 이미 잘 다듬어진 '정리'를 '증명'하는 과정을 반복적으로 학습한다. 사실상 그들은 정리의 의미가 무엇인지, 그것이 왜 만들어졌는지 미처 깨닫기도 전에, 정리를 증명해야 한다. 그러한 모습의 수학 교수-학습은 반교수학적으로 전도된 것인 바, '반교수학적 전도'(Freudenthal, 1983)란 수학이 발생되어온 대로 가르치는 대신, 객관화된 수학을 연역적 체계에 따라 가르치는 것이다. 이와는 달리 작금의 중등학교 수학교육에서는 반교수학적으로 전도된 수학 교수-학습 대신, '실행수학'의 관점에서 수학화를 바탕으로 하는 수학 교수-학습(Freudenthal, 1973, 1991)을 매우 강조한다. 그러나 반교수학적으로 전도된 수학 교수-학습에 익숙한 예비교사들이 장차 중등학교에서 수학화를 바탕으로 한 수학 교수-학습을 잘 인도할 수 있을 것으로 생각하기는 어렵다. 그들이 장차

1) 이 논문은 2005학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 것임.
2) 영남대학교 (kimjh@yu.ac.kr)
3) 경인교육대학교 (kimjh@yu.ac.kr)

중등학교에서 수학화를 바탕으로 하는 수학 교수-학습을 인도할 수 있기 위해서는, 그들이 먼저 수학화에 익숙해야 한다. 예비교사들이 예비중등교사교육의 과정에서 수많은 정리의 증명을 수없이 반복한다고 해서 그들이 수학화에 익숙해지는 것은 아니다.

이 연구에서는 예비교사들이 장차 중등학교에서 수학화에 바탕을 둔 수학 교수-학습을 인도하기 위해서는 그들이 먼저 수학화에 익숙해야 한다고 보며, 또 이를 위해서는 현재의 예비중등교사교육의 과정에서 수학화에 바탕을 둔 수학 교수-학습이 이루어져야 한다고 본다. 그러한 수학 교수-학습을 위해서는 적절한 수학화 프로그램이 요구되지만, 현재 잘 알려진 수학화 프로그램은 거의 없다. 이에 이 연구에서는 그러한 프로그램의 개발을 목적으로 하는 바, 이 개발을 위해 Wittmann(1984, 1995, 2001)의 '교수단원'의 사상을 따른다. 특히 이 연구에서는 예비교사들이 수학화를 실제로 학습해 볼 수 있도록, 몇 가지 구체적인 분할 상황을 일반화하여 수학적 실재로서의 '수 분할 모델'(이하, '분할 모델')을 실제로 조직해 보는 실속 있는 교수단원 <분할 모델의 탐구>를 설계한다.

수학화는 '현상'을 '본질'로 조직하는 활동인 바, 현상이 본질로 조직되고 나면, 그 본질을 다시 새로운 현상으로 취급하여, 그것을 새로운 본질로 조직하는 수학화 활동이 반복된다. 사실상 수학화는 거의 모든 수학적 활동의 원동력이다(Freudenthal, 1991; 정영옥, 1997; 우정호, 2000). 수학화는 '수평적 수학화'와 '수직적 수학화'로 구분될 수 있다. 수평적 수학화는 주어진 문제 장면을 수학적 실재로 변형하는 것이고, 수직적 수학화는 수학적 실재를 수학적 체계 내에서 가공·처리하는 것이다(Treffers, 1987). 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현상을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작하며, 수학적 경험이 축적되면 수직적 수학화가 시작된다(Freudenthal, 1973, 1991). <분할 모델의 탐구>에서는 먼저 네 개의 구체적인 분할 문제를 분석하여, 그 네 문제에 포함된 공통 요소를 찾고, 그 요소를 주축으로 한 하나의 새로운 수학적 실재인 분할 모델로 원래의 네 문제를 변형하는 바, 그러한 변형은 수평적 수학화에 해당한다. 또, 수평적 수학화의 결과로 생성된 분할 모델의 한 성질을 탐구하는 바, 그것은 수직적 수학화에 해당한다.

Wittmann(1984, 1995, 2001)에 의하면, 교수단원은 어떤 특정한 수학 지식의 교수라는 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 설계하고 조직해 놓은 교수 내용 전체이다. 특정한 지식의 교수-학습을 목표로 하는 실속 있는 교수단원(이하, 교수단원)은 그 지식을 지도하는 이유와 방법 등을 포함하고, 수학적 활동을 위한 풍부한 자원을 제공하며, 교실 조건에 따라 융통성 있게 그리고 쉽게 적용될 수 있다. 또, 교수-학습의 수학적, 심리학적, 교육학적 측면을 총괄적 방식으로 포함하며, 경험적 연구를 위한 광범위한 잠재력을 제공한다(平林一榮, 1999; 박교식, 2002a, 2002b, 2003; van den Heuvel-Panhuizen, 2003; 한대희, 2004; 山本信也, 2004; Sadovsky & Sessa, 2005). 교수단원에는 대개 이름이 있다. 이렇게 이름을 부여하는 것이 교수단원의 필요조건은 아니지만, 이름을 부여함으로서 나름대로 설계된 교수단원의 창의성을 부각할 수 있다. 이 연구에서 설계하는 교수단원의 이름은 <분할 모델의 탐구>이다. 이것의 핵심적인 내용이 수를 분할하는 모델을 탐구하는 것이기 때문에 그러한 이름을 붙였다. 교수단원에서는 '실마리 문제'만이 고정되며, 탐구를 위한 문제(이하, 간단히 '탐구 문제')는 본질적으로 개방적이다. 즉, 실마리 문제 자체는 쉽게 해결될 수 있는 평범한 문제이나, 탐구 문제는 그렇지 않으며, 계속해서 탐구되는 것이 가능하다. <분할 모델의 탐구>에서는 네 개의 실마리 문제와 한 개의 탐구 문제를 제시한다. 실마리 문제는 조직될 필요가 있는 구체적 현상으로 주어진 것이며, 탐구 문제는 분할 모델의 성질을 찾기 위해 주어진 것이다. 예비중등교사들은 실마리 문제를 분할 모델이라는 본질로 조직하기 노력해야

하고 또, 분할 모델의 성질을 찾기 위한 탐구 문제를 해결하기 위해 노력해야 한다.

이 연구에서는 Wittmann의 교수단원 사상을 바탕으로, 분할 모델의 탐구를 위한 교수단원 <분할 모델의 탐구>를 설계하는 바, 이것은 예비교사들이 분할 모델의 탐구를 통해 수학화를 경험하는 것을 목적으로 한다. 분할 모델을 소재로 한 것은 그것이 학교수학과 연결되기 때문이다. 분할 모델에 대한 한 유형을 제7차 교육과정(교육부, 1997)에서 처음으로 설정한 교과목인 <이산수학>에서 찾을 수 있는 바, '자연수의 분할'이 그것이다(신현성, 이준열, 2002). 즉, <분할 모델의 탐구>에서 논의하는 '수의 분할'은 학교수학에서 취급하는 자연수의 분할과 수학적으로 연결된다. <분할 모델의 탐구>에서는 <이산수학>에서 취급하는 자연수의 분할을 대폭 확장하지 않고, 소폭 확장하는 것에 그친다. <분할 모델의 탐구>가 전문적인 수학 연구를 지향하는 것이 아니라, 예비중등교사의 수학화를 경험하기 위한 프로그램이기 때문이다. <분할 모델의 탐구>는 '실마리 문제의 분석 → 분할 관점에서의 통합 → 수 S의 k-분할 모델의 정의 → 분할 모델의 탐구'라는 네 단계로 이루어진다. 먼저 실마리 문제가 되는 구체적인 분할 문제를 분석하여, 그것을 분할 모델로 일반화한다. 이렇게 일반화된 분할 모델은 다양한 측면에서 다양하게 탐구될 수 있다. 분할 모델은 그 자체로 탐구되기를 기다리는 하나의 수학적 실재이기 때문이다. <분할 모델의 탐구>에서는 그러한 탐구의 한 가지 예를 제시한다. <분할 모델의 탐구>에서는 예비교사들에게 요구되는 것을 [과제]로 제시하고, 그리고 각 과제에 대한 모범 답안을 제시하고 있다. 예비교사들이 모두 이러한 모범 답안에 근접하는 것은 아니다. 그러나 수학화의 완성을 위해서는 예비교사들이 모범 답안에 근접하도록 고무하고, 아울러 근접했는지 확인해야 한다.

이 연구에서 교수단원을 '설계'한다고 할 때, 그것은 건물을 '설계'한다고 할 때의 설계와 사실상 거의 같은 의미를 가진다. 즉, 어떤 건물의 설계도에 근거하여 그 건물을 짓는 것처럼, 교수단원이라는 설계도에 근거하여 수학 교수-학습이 이루어지는 것이다. 그런 만큼 교수단원의 설계는 실제의 수학 교수-학습에 앞서 필요한 과정이다. 건물을 잘 짓기 위해서는 좋은 설계가 요구되는 것처럼, 수학 교수-학습이 잘 이루어지기 위해서는 좋은 교수단원의 설계가 요구된다. Wittmann(1995)은 이러한 교수단원을 특히 '실속 있는' 교수단원이라 하고 있다. 그에 의하면, 설계하는 사람의 '재능'에 따라 다양한 교수단원이 만들어질 수 있는 바, 이 재능은 교수단원 설계 이론에 바탕을 둔 재능이다. 그러나 실속 있는 교수단원은 사실상 설계자의 재능뿐만 아니라, 그 재능에 바탕을 둔 충실한 '사고실험'(Freudenthal, 1991)의 소산이다. 또, 건물의 실제 사용을 통해, 그 건물의 설계도를 실질적으로 평가하는 것이 가능한 것처럼, 교수단원의 실질적인 평가 역시, 그 교수단원을 사용한 수학 교수-학습의 과정을 통해 이루어질 수 있다. 바로 이런 뜻에서 교수단원은 경험적 연구를 위한 광범위한 잠재력을 제공할 수 있다.

II. 수 분할 문제

교수단원 <분할 모델의 탐구>에서는 네 개의 실마리 문제를 분석하는 것으로 시작한다. 이 실마리 문제는 수평적 수학화를 위한 구체적인 현상으로 주어진 것이다. 예비교사들은 그것에 내재한 공통 요소를 추출하고, 그것을 주축으로 이 네 실마리 문제를 통합하여 수 분할 문제로 일반화해야 한다.

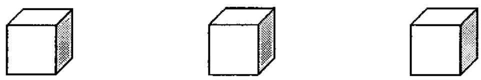
1. 실마리 문제의 도입

다음의 네 실마리 문제는 각각 어떤 구체적 상황을 나타낸다. 이들은 학교수학에서 흔히 볼 수 있으며, 또한 어렵지 않게 해결된다. <분할 모델의 탐구>는 바로 이 평범한 네 문제로부터 출발한다. 예비교사들은 이렇게 주어진 현상(즉, 실마리 문제)을 본질로 조직하기 위해, 먼저 네 문제의 공통적인 특징을 파악해야 한다. 예비교사들이 스스로 공통적인 특징을 파악해야 한다는 문제 의식을 가져야 하지만, 그러한 문제 의식이 모든 예비교사들에게 가능한 것은 아니다. 예비교사들이 문제 의식을 갖지 못하는 경우 다음 과제를 제시한다.

[과제 1] 다음 네 문제에서 찾을 수 있는 공통적인 특징은 무엇인가? 그 공통 특징으로 이 네 문제를 하나의 문제로 통합 하여라,

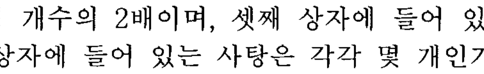
(문제 1) 넓이가 10이고 둘레가 13인 직사각형의 가로 및 세로의 길이를 구하여라.

(문제 2) (1) 다음 3개의 빈 상자에 15개의 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣는다. 뒤의 상자에 넣은 사탕은 바로 앞의 상자에 넣은 사탕보다 2개 많다. 상자에 각각 몇 개의 사탕을 넣어야 하는가? 각 상자에는 적어도 하나의 사탕을 넣어야 한다.

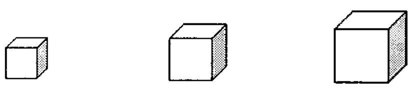


(2) 다음 4개의 빈 상자에 같은 방법으로 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣으려면, 상자에 각각 몇 개의 사탕을 넣어야 하는가? 각 상자에는 적어도 하나의 사탕을 넣어야 한다.

(문제 3) 다음 3개의 빈 상자에 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣었다. 첫째 상자와 둘째 상자에 들어 있는 사탕이 모두 15개이고 셋째 상자에 든 사탕의 개수는 둘째 상자에 든 사탕의 개수의 2배이며, 셋째 상자에 들어 있는 사탕은 10개이다. 첫째 상자 및 둘째 상자에 들어 있는 사탕은 각각 몇 개인가?



(문제 4) 다음과 같이 크기가 서로 다른 3개의 빈 상자에 사탕을 각각 순서대로 나누어 넣으려고 한다. 큰 상자에 넣은 사탕의 개수는 적은 상자에 넣은 사탕의 개수보다 적지 않다. 가장 큰 상자에 넣은 사탕은 7개이다. 각 상자에 사탕을 넣는 방법을 구하여라.



이 네 실마리 문제에서 공통적인 특징은 무엇인가? 그것은 주어진 수를 몇 개의 수로 분할한다는 것이다. 이 네 문제는 모두 그러한 구조를 가지고 있다. 예비교사들이 네 실마리 문제에서 이 공통적인 특징을 인식하는 것은 그다지 어려운 일이 아니다. <분할 모델의 탐구>에서는 이와 같이 수의 분할에 초점을 맞추고 있다.

예를 들어 자연수 5를 (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 4), (2, 3), (5)와 같이, 모두 합하면 5가 되는 순서쌍으로 나타낼 수 있다. 특히 여기서 주어진 것은 수학적으로 5를 뒤의 수가 앞의 수보다 작지 않도록 몇 개의 자연수로 분할하였다고 (여기서는 순서쌍의 각 원소의 배열 순서까지 고려함) 생각할 수 있다. 이때, 순서쌍 (5)에 어떤 실제적인 의미를 주는 것은 어렵다. 그러나 수학적 표기의 형식적 완성을 위해 (5)는 자연수 5를 한 개의 자연수 5로 분할한 것으로 취급하는 것이 편리하다.

한편, 5를 분할할 때 다른 조건을 더 추가할 수 있다. 예를 들어 5를 뒤의 수가 앞의 수보다 작지 않도록 세 개의 자연수로 분할한다고 할 때, 그 답은 (1, 1, 3), (1, 2, 2)뿐이다. 또, 분할된 세 수에 대해 인접한 두 분할된 수의 차가 1이 되어야 한다는 조건을 추가하면, 그 조건을 만족하도록 5를 분할하는 방법은 존재하지 않는다. 이렇게 보면 자연수 분할의 문제는 기본적으로 주어진 조건을 만족하도록 주어진 수를 분할하는 방법의 존재를 밝히는, 그리고 더 나아가 그렇게 분할하는 방법이 모두 몇 가지인지 구하는 문제로 귀착된다. 여기서 주어진 네 실마리 문제에서도, 각 문제에서 주어진 조건을 만족하는 자연수의 분할이 존재하는지, 그리고 그것이 존재하면 모두 몇 개나 존재하는지를 묻는 것이다. 예비교사들이 이러한 공통적인 특징을 파악했다면, 그 다음 과제로 수평적 수학화를 위해 각각의 문제를 수학적 표기를 사용하여 분석할 것이 요구된다.

2. 실마리 문제의 분석

앞의 네 실마리 문제는 분할하는 방법에 대한 조건들이 다를 뿐 주어진 수를 몇 개의 자연수로 분할한다는 공통적인 특징을 가지고 있다. 즉, 이 네 문제는 '자연수의 분할'이라는 관점에서 보면, 같은 맥락의 문제이다. 따라서 이 네 문제를 통합할 수 있다. 이때 이 네 문제를 통합하여 하나의 새로운 수학적 실재로 변형하기 위해, 예비교사들이 각 문제의 분석 과정에서 수학적 표기를 사용하게 한다. 구체적 맥락을 떠나 일반화의 맥락으로 가기 위해서는 적절한 기호를 사용하는 것이 거의 필연적이다. 그리고 사실상 기호를 정교하고 정확하게 사용하는 것은 중요한 수학적 사고의 한 가지이다(片桐重男, 1992). 예비교사들이 스스로 수학적 표기를 고안하고 사용해야 하지만, 그러한 고안 및 사용이 모든 예비교사들에게 가능한 것은 아니다. 예비교사들이 수학적 표기를 고안·사용하지 않을 경우에는 다음 과제를 제시한다.

[과제 2] 앞의 각 문제에 공통적으로 사용할 수 있는 적절한 수학적 표기를 고안하고, 그것을 사용하여 각 문제에서 주어진 조건을 나타내어라. 또, 각 문제의 답을 그 표기를 사용하여 나타내어라.

(문제 1)은 수 6.5를 직사각형의 가로 길이를 나타내는 수 p_1, 세로 길이를 나타내는 수

p_2로 분할하는 것이다. (여기서 6.5는 분할될 수로 간주한다.) 이때 두 수 p_1, p_2는 분할된 수로, 이들의 곱은 10이라는 조건을 만족해야 한다. 이 두 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$p_1+p_2=6.5$, $p_1p_2=10$

두 수 p_1과 p_2를 실제로 구하면 다음과 같다.

$p_1=2.5$, $p_2=4$ 또는 $p_1=4$, $p_2=2.5$

이것을 각각 순서쌍 (2.5, 4), (4, 2.5)로 나타내고, 그 각각을 수 6.5의 분할로 본다.

(문제 2)의 (1)은 자연수 15를 뒤의 수가 앞의 수보다 작지 않도록 세 자연수로 분할하는 것이다. 이때의 세 수를 각각 p_1, p_2, p_3라 하면, 인접한 두 수의 차는 2이어야 한다. 이 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=2$ $(p_1< p_2< p_3)$

세 수 p_1, p_2, p_3를 실제로 구하면 다음과 같다.

$p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$

이것을 순서쌍 (3, 5, 7)로 나타내고, 자연수 15의 분할로 본다.

(문제 2)의 (2)는 자연수 15를 네 개의 자연수를 뒤의 수가 앞선 수보다는 크도록, 그리고 인접한 두 수의 차는 2가 되도록 분할하는 것이다. 분할된 네 자연수를 각각 p_1, p_2, p_3, p_4라 하고, 이 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=2$, $p_4-p_3=2$ $(p_1< p_2< p_3< p_4)$

그러나 이 조건을 만족하는 네 자연수 p_1, p_2, p_3, p_4은 존재하지 않는다. 즉, 주어진 조건을 만족하도록 자연수 15를 네 개의 자연수로 분할할 수 없다.

(문제 3)에서는 어떤 수 S를 세 자연수 p_1(첫째 상자에 든 사탕의 개수), p_2(둘째 상자에 든 사탕의 개수), p_3(셋째 상자에 든 사탕의 개수 즉, 10)로 분할하는 것이다. 여기서 S는 분할될 수이다. 그러나 문제에서 S에 대한 조건이 제시되지 않았다. 분할된 세 수 사이에 성립해야 할 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$S=p_1+p_2+p_3$, $p_1+p_2=15$, $2p_2=p_3$, $p_3=10$

이것으로부터 S와 두 자연수 p_1, p_2, p_3를 실제로 구하면 다음과 같다.

$S=25$, $p_1=10$, $p_2=5$, $p_3=10$

이것을 순서쌍 (10, 5, 10)으로 나타내고, 자연수 25의 분할로 본다.

(문제 4)에서도 분할될 수 S가 제시되지 않았다. 이 제시되지 않은 수 S를 음이 아닌 세 정수 p_1(가장 작은 상자에 넣은 사탕의 개수), p_2(중간 상자에 넣은 사탕의 개수), p_3(가장 큰 상자에 넣은 사탕의 개수, 즉 7)로 분할하는 것이다. 이때 이 세 수 사이에 성립해야 할 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$p_1\le p_2\le p_3$, $p_3=7$(이것은 문제에서 주어진 것이다)

먼저 S의 값을 주어진 관계로부터 구할 수 있다. 그러나 그 값은 여러 가지이다. 따라서 각각의 S의 값에 따라, 가능한 순서쌍, 즉 자연수 S의 분할 $(p_1, p_2, 7)$를 모두 구해야 한다.

3. 실마리 문제의 통합

이 네 실마리 문제를 자연수의 분할이라는 관점에서 통합하기 위해, 먼저 통합을 가능하게 해 주는 것에 주목할 필요가 있다. 흔히 그러한 통합은 각 문제를 관통하는 공통 요소를 바탕으로 이루어진다. 이 네 문제에서도 각 문제를 관통하는 공통 요소를 찾을 수 있다. <분할 모델의 탐구>에서 이러한 공통 요소를 찾는 것은 예비교사들의 몫이다. 예비교사들이 공통 요소를 찾아야 한다는 것을 인식하지 못하거나, 옳게 찾지 못하는 경우 다음 과제를 제시한다.

[과제 3] 위의 네 문제를 분석한 결과를 참고하여, 네 문제에 공통으로 포함되는 요소를 찾아보아라. 그리고 그 공통 요소의 특성을 설명하여라.

어떤 분할될 수 S를 몇 개의 수(예를 들어 세 개의 수 p_1, p_2, p_3)로 분할할 때, 이 세 수는 인접한 두 수간의 어떤 관계(예를 들어 $p_1+p_2=15$, $2p_2=p_3$)를 만족해야 한다. 이때 가능한 각각의 분할을 순서쌍 (p_1, p_2, p_3)와 같이 나타내는 것이 유용하다. 이 순서쌍은 분할을 구성하는 각각의 수와 그 분할의 크기를 동시에 나타낸다. 즉, 순서쌍 (p_1, p_2, p_3)는 하나의 분할을 나타내는 바, 이 분할의 크기는 3이고, 이 분할을 구성하는 세 개의 수는 p_1, p_2, p_3이다. 이 각각의 수를 분할의 원소로 간주한다. 이러한 논의를 종합하여 네 공통 요소를 체계적으로 진술하면 다음과 같다.

a. 분할될 수
b. 분할의 크기
c. 분할
d. 인접한 분할의 원소들 사이의 관계

이 네 가지 공통 요소를 각각 기호 S, k, P, R로 나타내면, 결국 이 네 실마리 문제는 (S, k, P, R)라는 구조를 갖는 동일한 유형의 문제이다. 각 공통 요소를 자세히 설명하면 다음과 같다.

첫째, 학교수학에서 취급하는 '수 S의 분할'에서 수 S는 대개 자연수에 한정된다. 또, S의 값이 하나로 주어진다. 그러나 일반적으로 S가 반드시 자연수일 필요는 없다. 또, 위에서 이미 보았듯이 S의 값이 반드시 하나로, 먼저 주어져야 하는 것도 아니다.

둘째, 분할의 크기를 나타내는 k가 자연수라는 것은 분명하다. $k=1$은 S를 자기 자신으로 분할하는 자명한 분할이므로, k는 2이상이라고 생각하는 것이 자연스럽다. 그러나 수학적 표기의 일반화를 위해 $k=1$인 경우도 형식적으로 취급한다.

셋째, 크기가 k인 분할 P는 k개의 수로 된 순서쌍 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$를 의미한다. 이때 P의 각 원소가 자연수로 한정될 필요는 없다. 대개의 경우 P의 각 원소를 찾는 것이 과제가 될 수 있다. 또, 그러한 분할이 몇 개 존재하는지도 역시 과제가 될 수 있다. 문제에서 P의 일부 원소들이 미리 주어질 수도 있다. 그것이 명시적으로 주어지는 대신, 문제에서 암묵적으

로 제시될 수도 있다. 또, 그것을 특별히 실수의 적당한 부분집합, 예를 들어 자연수의 집합, 정수의 집합 등에 속하도록 한정시킬 수도 있다.

넷째, R은 크기가 k인 분할 P의 순서가 정해진 k개의 원소 중 인접한 두 원소 p_i, p_{i+1} 사이의 관계 $R_i(i=1, 2, \cdots, k-1)$들로 구성된 체계이다.

III. 분할 모델의 정의

앞 절에서 수학적 표기를 사용하여 실마리 문제를 재진술하고, 그것을 바탕으로, 각 문제의 공통 요소를 추출함으로써, 네 실마리 문제를 통합하여 하나의 수학적 실재로 변형할 수 있는 기틀을 마련하였다. 여기서는 그러한 변형 즉, 수평적 수학화를 완성하기 위해 실마리 문제를 S, k, P, R를 이용하여 기호적으로 재통합하고, 그리고 그것을 바탕으로 네 실마리 문제의 구조를 시각적으로 표현한 다음, 다시 그것에 바탕을 두어 새로운 수학적 실재로서의 분할 모델을 정의한다.

1. 실마리 문제의 시각적 표현

앞에서 네 실마리 문제는 (S, k, P, R)라는 구조를 갖는 동일한 유형의 문제라는 것을 알았다. 즉, 이 네 문제를 하나의 수학적 실재로 변형할 수 있는 기틀이 마련되었다. 이제 그러한 변형을 완성하기 위해, (S, k, P, R)라는 구조를 갖는 수학적 실재를 고안해야 한다. 이때 그러한 실재는 네 실마리 문제의 구체적 정황을 모두 만족해야 한다. 그래서 먼저 예비교사들이 (S, k, P, R)라는 구조에 맞추어 원래의 네 실마리 문제를 일목요연하게 정렬해 보게 한다. 이러한 정렬이 필수적인 것은 아니다. 그것은 장차 고안할 수학적 실재가 네 실마리 문제의 구체적 정황을 잘 반영한다는 것을 쉽게 확인하기 위한 절차로서 필요하다. 예비교사들이 이 절차를 소홀히 하는 경우 다음 과제를 제시한다.

> [과제 4] 앞의 문제 분석에서 얻은 S, k, P, R를 이용하여 각 문제를 차례로 구조화하여 표로 나타내어라. 그리고 그 표를 설명하여라.

위의 네 문제를 (S, k, P, R)라는 구조를 이용하여 다음 <표 1>과 같이 정리할 수 있다. <표 1>로부터 각 문제는 분할의 크기를 나타내는 k의 값에 따라 그 유형을 나눌 수 있음을 알 수 있다. 즉, (문제 1)에서는 분할의 크기가 2, (문제 2)의 (1), (문제 3), (문제 4)에서는 분할의 크기가 3, (문제 2)의 (2)에서는 분할의 크기가 4이다. 이렇게 보면 일반적으로 분할의 크기가 k인 유형을 생각할 수 있다. 앞에서 이미 언급했듯이 k=1은 수학적 표현을 통합하기 위한 형식적인 경우를 나타낸다.

<표 1> 분할 관점에서의 문제의 통합

	(문제 1)	(문제 2)		(문제 3)	(문제 4)
		(1)	(2)		
S	6.5	15	15	제시안함(25)	제시안함(7, 8,…, 20, 21)
k	2	3	4	3	3
P	(2.5, 4), (4, 2.5)	(3, 5, 7)	없다	(10, 5, 10)	(0, 0, 7), (0, 1, 7) … (6, 7, 7), (7, 7, 7)
R	$p_1 \cdot p_2=10$	$p_2-p_1=2$ $p_3-p_2=2$	$p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=2$ $p_4-p_3=2$	$p_1+p_2=15$ $2p_2=p_3$	$p_1 \leq p_2$ $p_2 \leq p_3$

<표 1>에서 볼 수 있듯이 분할될 수 S는 주어지기도 하지만, 주어지지 않을 수도 있다. 또, 그 값이 하나로 고정된 것도 아니라는 것을 알 수 있다. 분할 P는 k개의 원소로 이루어진 순서쌍이다. (문제 2), (문제 3)에서 원소는 양의 정수이어야 하고, (문제 4)에서 원소는 음이 아닌 정수이어야 한다. (문제 1)에서는 원소를 실수의 범위에서 구한다. 관계 R는 k개의 원소로 이루어진 순서쌍에서 인접한 두 원소 사이의 관계를 주기 위한 k-1개의 관계들로 구성되어 있다. 통상적으로 S 및 관계 R이 주어지면, 분할된 수들로 이루어진 순서쌍인 분할 P가 결정된다. 위의 표에 적힌 P는 원소가 확정된 결과를 쓴 것이다. 분할 P는 문제 상황에 따라, 한 개 혹은 여러 개 있을 수 있으며, 전혀 없을 수도 있다.

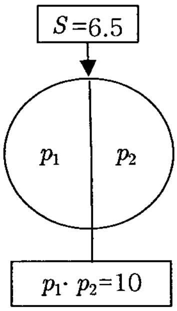
다음으로 예비교사들이 위의 <표 1>의 정보를 바탕으로 (S, k, P, R)라는 구조를 갖는 모델을 고안하게 한다. 이때 모델을 여러 가지 형태로 나타내는 것이 가능하지만, 여기서는 시각적 표현이 가능한 모델을 고안하게 한다. 시각적 표현은 앞으로 정의하고자 하는 분할 모델을 우선 직관적으로 파악할 수 있게 해 준다. 이를 위해 다음의 과제를 제시한다. 이때 예비교사들이 고안하는 시각적 모델은 서로 다를 수 있으므로, 고안된 각각의 모델을 교수단원 <분할 모델의 탐구>에 제시된 시각적 모델과의 동형성에 바탕을 두어, 최종적으로는 교수단원에 제시된 것을 이용하여 탐구를 계속하게 한다.

[과제 5] 위의 <표 1>의 정보를 바탕으로 분할의 크기가 k인 유형을 시각적으로 표현할 수 있는 모델을 고안하여라. 그리고 각 문제의 상황을 그것을 사용하여 나타내어라.

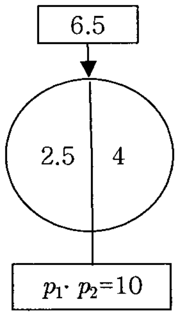
<분할 모델의 탐구>에서는 분할의 크기가 1, 2, …, k인 유형의 시각적 모델을 각각 '1-분할 모델', '2-분할 모델', …, 'k-분할 모델'이라고 부르기로 한다. 1-분할 모델은 자명하므로 그것에 대해서는 논의하지 않기로 한다.

(문제 1)에 해당하는 2-분할 모델은 다음 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 위의 사각형 내부에는 가로, 세로 길이의 합 S=6.5를 적고, 원 내부의 빈 두 영역에는 가로의 길이 p_1, 세로의 길이 p_2를 각각 적는다. 아래의 사각형 내부에는 $p_1 \cdot p_2$=10을 적는다. 이것은 '두 수를 곱한 값이 10'이라는 실수 집합에서의 두 원소 p_1, p_2의 관계(R_1)를 나타낸다. (문

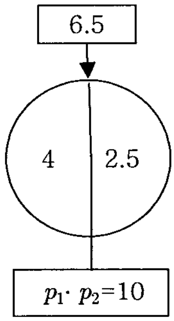
제 1)에서 알 수 있는 정보는 6.5와 10의 두 수이다. (문제 1)을 해결하는 것은 바로 원에서 빈 두 영역에 적을 수를 찾는 것이다. (문제 1)을 풀면 6.5를 분할될 수로 하는 2-분할이 다음 [그림 2], [그림 3]과 같이 두 개로 결정된다. 이때 '자연수의 분할'이라는 맥락에서 [그림 2]와 [그림 3]은 본질적으로 같다고 볼 수 있으나, <분할 모델의 탐구>에서는 문제 상황에 맞추어 이 두 경우를 다르게 본다.



[그림 1]

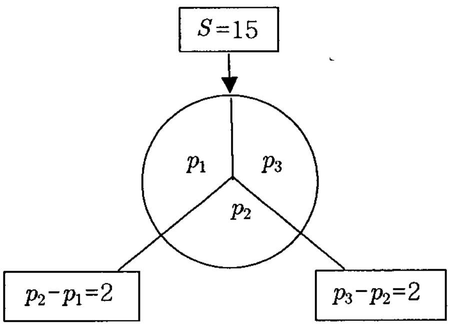


[그림 2]

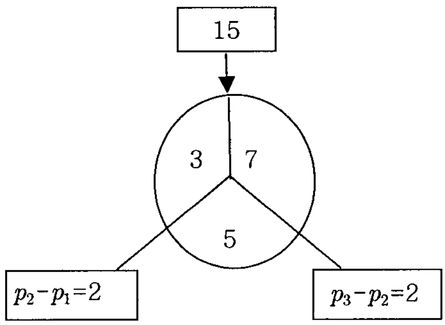


[그림 3]

(문제 2)의 (1)에 해당하는 3-분할 모델은 다음 [그림 4]와 같이 나타낼 수 있다. 위쪽의 사각형 내부에는 S=15를 적는다. 그리고 3개의 원소 p_1, p_2, p_3를 반시계 방향으로 차례로 적는다. (시계 방향으로 적는 것도 가능하다. 그러나 이 연구에서는 반시계 방향으로 통일하여 적기로 한다.) 또 반시계 방향으로 두 사각형의 내부에 $p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=2$를 적는다. (문제 2)의 (1)에서 알 수 있는 정보는 15와 2의 두 수이다. (문제 2)의 (1)을 해결하는 것은 바로 원에서 빈 세 영역에 적을 수를 찾는 것이다. (문제 2)의 (1)을 풀면 수 15의 3-분할이 [그림 5]와 같이 한 개로 결정된다.



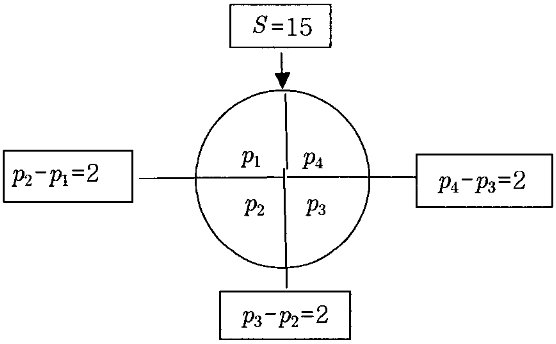
[그림 4]



[그림 5]

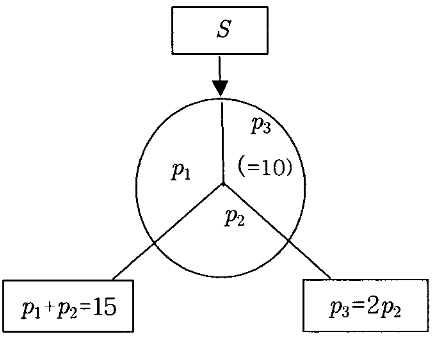
(문제 2)의 (1)의 해가 존재한다는 의미에서 한 개의 3-분할 모델이 확정되었다고 할 수 있다. 그러나 일반적으로 k-분할 모델이 언제나 확정되는 것은 아니다. 예를 들어 (문제 2)의 (2)는 4-분할 모델이 확정되지 않는 경우이다. (문제 2)의 (2)에 해당하는 4-분할 모델은 다음 [그림 6]과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 위의 사각형 내부에는 S=15를 적는다. 그리

고 4개의 분할된 자연수 p_1, p_2, p_3, p_4를 반시계 방향으로 차례로 적는다. 또 반시계 방향으로 세 사각형의 내부에 각각 $p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=2$, $p_4-p_3=2$를 적는다. (문제 2)의 (2)에서 알 수 있는 정보는 분할될 수가 15이고 인접한 두 수의 차가 2라는 정보이다. (문제 2)의 (2)를 해결하는 것은 바로 원에서 빈 네 영역에 적을 수를 찾는 것이다. 그러나 (문제 2)의 (2)의 해는 존재하지 않는다. 즉, (문제 2)의 (2)의 4-분할 모델은 확정되지 않는다.

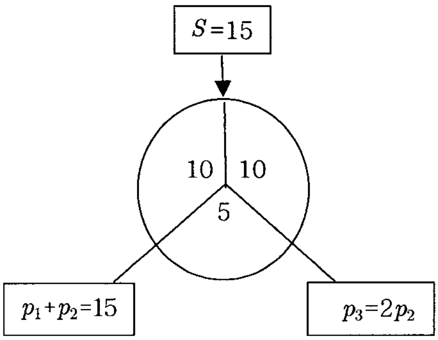


[그림 6]

(문제 3)에 해당하는 3-분할 모델은 다음 [그림 7]과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 위의 사각형 내부는 비어 있지만, 문제를 해결하는 과정에서 S의 값을 구할 수 있다. 3개의 분할된 자연수를 적기 위한 세 개의 영역 중 처음 두 개도 비어 있다. 나머지 한 영역에는 수 10을 적는다. 반 시계 방향으로 다른 두 사각형의 내부에는 $p_1+p_2=15$ 및 $2p_2=p_3$를 적는다. (문제 3)에서 알 수 있는 정보는 15와 2의 두 수이다. (문제 3)을 해결하는 것은 바로 원에서 빈 두 영역에 적을 수를 찾는 것이다. (문제 3)을 풀면 수 25의 3-분할 모델에 대한 분할이 [그림 8]과 같이 한 개 결정된다.



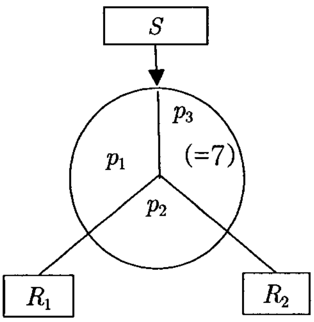
[그림 7]



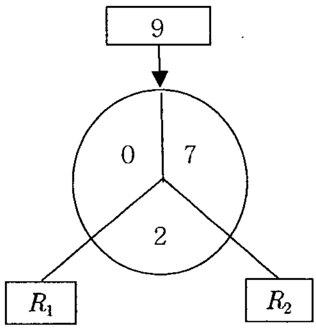
[그림 8]

(문제 4)에 해당하는 3-분할 모델은 다음 [그림 9]와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 위쪽의 사각형 내부에는 S를 적는다. 이 값은 문제의 상황에 따라 정해진다. 3개의 분할된 음이 아

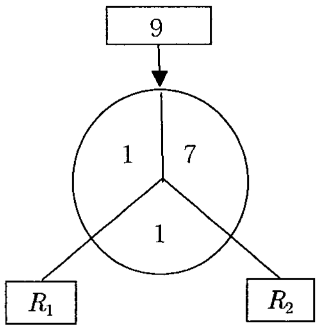
닌 정수를 적기 위한 세 개의 영역 중 처음 두 영역은 비워두고, 그리고 나머지 한 영역에는 수 7을 적는다. 반시계 방향으로 다른 두 사각형의 내부에 각각 $p_1 \leq p_2$, $p_2 \leq p_3$를 적는다. (문제 4)에서 알 수 있는 정보는 p_3=7과 원소의 순서쌍에서 인접한 두 수사이의 대소 관계이다. (문제 4)를 해결하는 것은 바로 원에서 빈 두 영역에 적을 음이 아닌 정수를 찾는 것이다. (문제 4)를 풀면 수 7, 8, ⋯, 20, 21의 3-분할 모델이 결정된다. 예를 들어 수 9의 3-분할 모델에서 분할이 다음 [그림 10], [그림 11]과 같이 두 개로 결정된다. 아래 그림에서 R_1, R_2는 분할의 두 원소 사이에 각각 $p_1 \leq p_2$ 및 $p_2 \leq p_3$을 나타내는 음이 아닌 정수 집합에서의 대소 관계(≤)이다.



[그림 9]



[그림 10]



[그림 11]

2. 분할 모델의 정의

실마리 문제의 시각적 표현을 바탕으로 k-분할 모델을 정의할 수 있다. 이때 예비교사들은 자신들의 수준에 따라 위의 시각적 모델을 재진술하는 형태의 정의를 내릴 수도 있고, 시각적 모델을 떠나 분할될 수, 분할의 크기, 분할, 인접한 분할의 원소들 사이의 관계라는 공통 요소에 맞추어 시각적 모델과 관계없이 정의를 내릴 수도 있다. <분할 모델의 탐구>에서는 예비교사들이 스스로 수학적인 정의를 내린 경험이 많지 않을 것으로 가정하여, 전자의 정의를 내리게 한다. 예비교사들이 k-분할 모델의 정의를 내리는 돕기 위하여 다음 과제를 제시한다. 이러한 정의는 본질적으로 실마리 문제를 수학적 표기를 사용하여 수학적 실재로 변형한 것을 나타내는 것인 바, <분할 모델의 탐구>에서는 이 과정까지를 수평적 수학화로 간주한다.

[과제 6]: 위에서 제시한 시각적 모델을 이용하여 k-분할 모델을 정의하여라.

<분할 모델의 탐구>에서 제시하는 k-분할 모델의 정의는 다음과 같다. 대개의 예비교사들은 k-분할 모델의 거친 정의를 내릴 것으로 가정된다. 그러한 거친 정의를 수정 · 보완하여 <분할 모델의 탐구>에서 제시하는 정의로 수렴하게 할 필요가 있다.

k-분할 모델(k-partition model): 한 원에 k개의 점이 있고, 각 점과 원의 중심을 선분으

로 연결하여 원의 내부를 k개의 영역으로 나눈다. k개의 점 중 한 개를 기준점, 각각의 영역을 분할 영역, k를 분할의 크기라고 한다. 원 위의 각 점은 원 외부에 있는 한 사각형과 선분으로 연결되어 있다. k개의 분할 영역과 k개의 사각형 영역에는 수가 적혀진다. 이때 기준점과 원의 중심을 있는 선분을 기준으로, 반시계 방향으로 각 분할 영역에 수를 적는다. k개의 분할 영역에 적힌 수를 분할 원소 또는 간단히 원소라고 한다. 기준점과 연결된 사각형에는 모든 원소의 합이 적혀진다. 이 수를 분할될 수라고 한다. 그 이외의 사각형에는 이 사각형에 연결된 점과 중심을 잇는 선분에 인접한 두 원소 사이의 관계가 반시계 방향으로 적혀 진다. 이 관계는 원소가 속해야 하는 집합에서의 관계이다. 이 관계를 인접 관계라고 한다. 이때 k개의 원소의 순서쌍

$$P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k),\ S=\sum_{i=1}^{k} p_i$$

과 $k-1$개의 인접 관계 $R_1,\ R_2\ ,\ \cdots,\ R_{k-1}$로 정의된 순서쌍

$$R=(R_1,\ R_2\ ,\ \cdots,\ R_{k-1})$$

로 결정되는 구조를 S의 k-분할 모델이라고 한다. 이때 이 k-분할 모델을 결정짓는 순서쌍 $P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k)$를 간단히 S의 k-분할 또는 분할이라고 한다.

위의 정의에서 분할될 수 S와 원소 p_i가 자연수로 한정될 필요는 없다. 사실상 S와 p_i가 유리수, 실수일 때도 이 정의는 유효하다. p_i가 자연수이면 S는 자연수이다. 그러나 p_i가 자연수가 아니라고 하더라도 S는 자연수일 수 있다. $P=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k)$의 각 원소는 문제의 상황 속에서 암묵적으로 제시될 수도 있고, 문제에서 특별히 실수의 적당한 부분집합의 원소로 한정시킬 수도 있다. 일반적으로 $R=(R_1,\ R_2\ ,\ \cdots,\ R_{k-1})$인 조건을 만족하는 S의 k-분할 모델이 항상 존재하는 것은 아니다. 예를 들어 위의 (문제 2)의 (2)의 경우 $R=(p_2-p_1=2,\ p_3-p_2=2,\ p_4-p_3=2)$인 조건 아래서 15의 4-분할 모델은 존재하지 않는다.

IV. 인접한 두 원소의 곱이 일정한 값을 갖는 분할 모델의 탐구

이 절에서는 S의 k-분할 모델의 성질을 탐구하기 위한 문제를 제시하고 그것을 해결한다. 또, 그것과 관련된 구체적 문제를 설정한다. 여러 가지 분할 모델 중에서 <분할 모델의 탐구>에서는 인접한 두 원소의 곱이 일정한 값을 갖는 분할 모델에 초점을 맞춘다. 이 과정은 수학적 실재인 분할 모델을 수학적 체계 내에서 처리한다는 점에서 수직적 수학화에 해당한다.

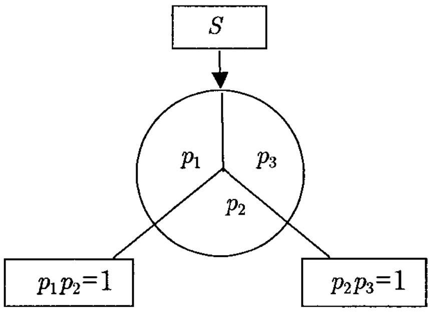
1. 두 원소의 곱이 일정한 값을 갖는 분할 모델의 탐구

일반적으로 수 S의 k-분할 모델에서 k개의 원소를 결정하는 것은 $k-1$개의 인접 관계 $R_1,\ R_2\ ,\ \cdots,\ R_{k-1}$과 S이다. 이때 인접 관계로 주어질 수 있는 관계는 무수히 많다. 이 절에서 취급하는 S의 k-분할 모델에서는 분할될 수나 원소의 범위를 실수까지 확장시켜 생각

하고, 인접 관계는 인접한 두 원소의 곱 p_ip_{i+1} (i=1, 2. …, $k-1$)이 일정한 값을 가지는 경우로 한정한다. 이러한 분할 모델이 갖는 성질을 탐구하기 위해 예비교사들에게 다음 과제를 제시한다.

[과제 7: 탐구 문제]

(1) 인접한 두 원소의 곱이 1이다. 2-분할 모델이 존재하기 위한 분할될 수의 범위를 찾고, 분할될 수가 2일 때의 2-분할을 찾아라. 또, [그림 12]와 같은 3-분할 모델이 존재하기 위한 분할될 수 S의 범위를 찾고, 분할될 수가 3일 때 3-분할을 찾아라.



[그림 12]

(2) 인접한 두 원소의 곱이 고정된 값 $c(>0)$를 가진다. k-분할 모델의 존재를 위한 분할될 수 S의 범위를 찾고, c=1일 때 k-분할을 구하라.

(1)의 각 분할 모델에서 분할될 수를 S라 하자. S의 2-분할 모델에 대해 첫째 원소를 x라 하면, 둘째 원소는 $\frac{1}{x}$이다. 그러면 $S=x+\frac{1}{x}$이고, 이것으로부터 이차방정식 $x^2-Sx+1=0$을 얻는다. 따라서 구하고자 하는 S의 범위는 바로 이 방정식이 해를 가지도록 하는 S의 범위이다. 이것을 풀면 S의 범위는 $S^2\geq 4$ 즉, $S\leq -2$ 또는 $S\geq 2$이다.

S=2일 때 2-분할 모델이 존재하며 이것의 첫째 원소는 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 해이다. 이 이차방정식의 해는 x=1이다. 따라서 S=2일 때 2-분할은 (1, 1) 하나뿐이다.

S의 3-분할 모델의 첫째 원소를 x라 하면, 둘째 원소는 $\frac{1}{x}$, 셋째 원소는 x이다. 이것으로부터 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$x+\frac{1}{x}+x=S$$

이것을 정리하면 다음 이차방정식을 얻는다.

$$2x^2-Sx+1=0,\ \ x\neq 0$$

이것을 풀면 $S^2\geq 8$ 즉, $S\leq -2\sqrt{2}$ 또는 $S\geq 2\sqrt{2}$ 이다. 따라서 S=3 일 때는 3-분할 모델이 존재하고, 이 모델의 첫째 원소는 $2x^2-3x+1=0$의 해로 $x=1$, $x=\frac{1}{2}$이다. 그러므로 분

할될 수가 3일 때 3-분할은 다음 2개이다.

$$(1,\ 1,\ 1),\ (\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2})$$

(2)에서 일반적으로 인접한 두 원소의 곱이 고정된 값 c 갖는 k-분할 모델에 대해, 구하고자 하는 첫째 원소를 x라고 하면 각 원소는 다음과 같다.

$$x,\ \frac{c}{x},\ x,\ \frac{c}{x},\ x,\ \frac{c}{x},\ \cdots$$

첫째, k가 짝수인 경우,

$$S=x+\frac{c}{x}+x+\frac{c}{x}+\cdots+\frac{c}{x}=\frac{k}{2}x+\frac{ck}{2x}$$

이므로, 이것을 정리하면 다음 이차방정식을 얻는다.

$$kx^2-2Sx+ck=0$$

구하고자 하는 S의 범위는 이 방정식이 해를 가지도록 하는 S의 범위이다. $S^2\geq ck^2$이므로 S의 범위는 다음과 같다.

$$S\leq-\sqrt{c}k \text{ 또는 } S\geq\sqrt{c}k$$

여기서 $c=1$이고 원소가 양의 수인 경우, 인접한 두 원소의 곱이 1인 k-분할 모델이 존재하는 최소 분할될 수 S의 값은 k이다. 이 분할 모델의 첫째 원소는 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 해이고, 이때 그 해는 $x=1$로 유일하다. 따라서 분할될 수 S가 k(짝수)이고 인접한 두 원소의 곱이 1인 k-분할은 다음과 같다.

$$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)\ \cdots\ (*)$$

둘째, k가 홀수인 경우,

$$S=x+\frac{c}{x}+x+\frac{c}{x}+\cdots+\frac{c}{x}+x=\frac{(k+1)}{2}x+\frac{c(k-1)}{2x}$$

이므로, 이것을 정리하면 다음 이차방정식을 얻는다.

$$(k+1)x^2-2Sx+c(k-1)=0$$

구하고자 하는 S의 범위는 이 방정식이 해를 가지도록 하는 S의 범위이다. $S^2\geq(k^2-1)c$이므로 S의 범위는 다음과 같다.

$$S\leqq-\sqrt{(k^2-1)c} \text{ 또는 } \sqrt{(k^2-1)c}\leq S$$

여기서 $c=1$이고 원소가 양의 수인 경우의 k-분할 모델에 대해 알아보자. 인접한 두 원소의 곱이 1이고 $S=k$이면, k-분할 모델이 존재한다. 이때 k-분할 모델의 첫째 원소는 $(k+1)x^2-2kx+(k-1)=0$의 해로 다음과 같다.

$$x=1,\ x=\frac{k-1}{k+1}$$

따라서 $S=k$(홀수)이면 k-분할은 다음 2개이다.

$$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1),\ (\frac{k-1}{k+1},\ \frac{k+1}{k-1},\ \cdots,\ \frac{k-1}{k+1})$$

그러나 k가 짝수인 것과는 달리, 인접한 두 원소의 곱이 1인 k-분할 모델이 존재하게

하는 최소 분할될 수 S를 구하면 그 값은 k가 아니다. 실제로 k가 홀수이고 원소가 양의 수인 경우, 인접한 두 원소의 곱이 1인 k-분할 모델이 존재하게 되는 최소 분할될 수는 $S=\sqrt{k^2-1}$이다. 이때 k-분할은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\sqrt{k^2-1}}{k+1},\ \frac{k+1}{\sqrt{k^2-1}},\ \frac{\sqrt{k^2-1}}{k+1},\ \cdots,\frac{k+1}{\sqrt{k^2-1}},\ \frac{\sqrt{k^2-1}}{k+1}\right)\ \cdots\ (**)$$

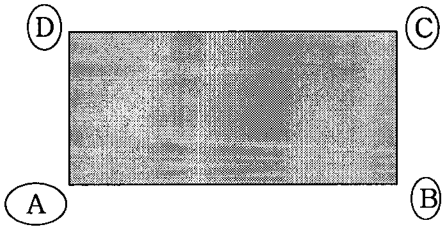
2. 두 원소의 곱이 일정한 값을 갖는 분할 모델의 적용

인접한 두 원소의 값이 일정한 값을 갖는 분할 모델의 성질을 탐구한 뒤에는, 예비교사들이 그러한 분할 모델로 모델링 될 수 있는 구체적 상황을 생각해 보게 한다. 이러한 과정은 수직적 수학화의 정착을 위한 것이다. 이를 위해 예비교사들에게 다음의 개방된 과제를 제시한다.

[과제 8] 인접한 두 원소의 값이 일정한 값을 갖는 분할 모델로 모델링되는 구체적 상황을 생각해 보아라.

예비교사들은 나름대로 적절한 상황을 찾을 수 있을 것이다. 그러나 모두가 그렇게 할 수 있는 것은 아니므로, 다음과 같은 (적용 문제)를 제시하고, 해결해 보게 함으로서, 분할 모델로의 모델링 되는 상황이 있음을 알게 한다. 넓이가 일정한 직사각형의 둘레의 길이가 최소가 되는 경우는 이 직사각형이 정사각형이 될 때라는 것은 잘 알려진 사실이다. (적용 문제)는 이 문제를 확장한 것이다.

(적용 문제) 다음과 같이 넓이가 1 인 직사각형(넓이는 1로 고정되나 가로와 세로의 길이는 유동적이다)에 대해, 꼭지점 A에서 출발하여 반시계 방향으로 이 사각형의 둘레를 돈다고 하자.



(1) 꼭지점 C에서 멈춘 경우, 또 꼭지점 D에서 멈춘 경우 가로 및 세로의 길이가 각각 얼마일 때 움직인 거리가 최소가 되는가? 이때 움직인 최소 거리는 얼마인가?

(2) 한 바퀴를 돌고 난 뒤 꼭지점 A에 멈춘 경우, 꼭지점 B에서 멈춘 경우, 꼭지점 C에서 멈춘 경우, D에서 멈춘 경우 가로와 세로의 길이가 각각 얼마일 때 움직인 거리가 최소가 되는가? 이때 움직인 최소 거리는 얼마인가?

(3) n바퀴를 돌고 난 뒤 꼭지점 A에 멈춘 경우, 꼭지점 B에 멈춘 경우, 꼭지점 C에 멈춘 경우, 꼭지점 D에 멈춘 경우, 가로와 세로의 길이가 각각 얼마일 때 움직인 거리가 최소가

되는가? 이때 움직인 최소 거리는 얼마인가?

이 (적용 문제)에서 직사각형의 넓이가 1이므로 가로의 길이를 x라 하면, 세로의 길이는 $\frac{1}{x}$ 이다. 따라서 꼭지점 A를 출발하여, 이 직사각형의 둘레를 반시계 방향으로 돌 때, 가로, 세로, 가로, 세로 등이 반복되고, 그 길이는 각각

$$x,\ \frac{1}{x},\ x,\ \frac{1}{x},\ x,\ \frac{1}{x},\ \cdots$$

이 된다. 따라서 두 원소의 곱이 일정한 경우의 분할 모델을 이 문제의 해결에 적용할 수 있다. 즉, 이 문제는 두 원소의 곱이 일정한 경우의 분할 모델이 적용되는 구체적인 예이다.

(1)에서 꼭지점 C에서 멈춘 경우, 위의 (*)에서 가로 및 세로의 길이가 1일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 2이다. 꼭지점 D에서 멈춘 경우, 위의 (**)에서 가로의 길이가 $\sqrt{2}$, 세로의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 $2\sqrt{2}$ 이다.

(2)에서 한 바퀴 돌아 꼭지점 A에서 멈춘 경우, 위의 (*)에서 가로 및 세로의 길이가 각각 1일 때 움직인 거리가 최소이며, 이때 움직인 거리는 4이다. 꼭지점 B에서 멈춘 경우, 위의 (**)에서 가로의 길이가 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 세로의 길이가 $\frac{3}{\sqrt{6}}$일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 $2\sqrt{6}$이다. 꼭지점 C에서 멈춘 경우, 위의 (*)에서 가로 및 세로의 길이가 각각 1일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 6이다. 꼭지점 D에서 멈춘 경우, 위의 (**)에서 가로의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 세로의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 $4\sqrt{3}$이다. 이것은 7보다 작은 수이다.

(3)에서 n 바퀴 돌아 꼭지점 A에서 멈춘 경우, 위의 (*)에서 가로 및 세로의 길이가 각각 1일 때 움직인 거리가 최소이며, 이때 움직인 거리는 $4n$이다. 꼭지점 B에서 멈춘 경우, 위의 (**)에서 $k=4n+1$이므로, 가로 및 세로의 길이가 각각

$$\sqrt{\frac{2n}{2n+1}},\ \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$$

일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 $2\sqrt{2n(2n+1)}$이다. 꼭지점 C에서 멈춘 경우, 위의 (*)에서 가로 및 세로의 길이가 각각 1일 때 움직인 거리가 최소이며, 이때 움직인 거리는 $4n+2$이다. 꼭지점 D에서 멈출 경우, 위의 (**)에서 $k=4n+3$이므로, 가로 및 세로의 길이가 각각

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}},\ \sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}$$

일 때 움직인 거리가 최소이다. 이때 움직인 거리는 $2\sqrt{2(n+1)(2n+1)}$이다. 이 값은 $4n+3$보다 작은 수이다.

V. 요약 및 결론

이 연구에서는 예비교사들이 장차 중등학교에서 수학화에 바탕을 둔 수학 교수-학습을 인도하기 위해서는, 그들 자신들이 먼저 수학화에 익숙해야 한다고 보고, 그러한 수학화를 경험할 수 있게 하는 교수단원 <분할 모델의 탐구>를 설계하고 있다. 즉, <분할 모델의 탐구>는 예비교사들이 분할 모델의 탐구를 통해 수학화를 경험하는 것을 목적으로 한다. 이 연구에서 분할 모델을 소재로 한 것은 그것이 학교수학에서 취급하는 '자연수의 분할'과 연결되기 때문이다. <분할 모델의 탐구>에서는 네 개의 실마리 문제를 분할이라는 관점에서 통합하고, 그것을 일반화한 S의 k-분할 모델을 정의하였다. 그리고 이렇게 정의된 S의 k-분할 모델의 한 가지를 수학적으로 탐구하였다. 즉, 이 연구에서 설계하는 <분할 모델의 탐구>라는 교수단원은 '실마리 문제의 분석 → 분할 관점에서의 통합 → S의 k-분할 모델의 정의 → 분할 모델의 탐구' 라는 네 단계로 구성된다. <분할 모델의 탐구>에서는 예비교사들에게 요구되는 것을 [과제]로 제시하고, 그리고 각 과제에 대한 모범 답안을 제시하고 있다. 이 모범 답안은 예비교사들이 근접해야 할 기준으로 제시한 것이다. 예비교사들이 모두 이러한 모범 답안에 근접하는 것은 아니다. 그러나 수학화의 완성을 위해서는 예비교사들이 모범 답안에 근접하도록 고무하고, 아울러 근접했는지 확인해야 한다. 이 교수단원이 예비교사교육에 기여할 수 있는 바를 요약하면 다음과 같다.

첫째, <분할 모델의 탐구>는 예비교사들로 하여금 수학화를 경험할 수 있게 해준다. 예비교사들이 장차 중등학교에서 수학화에 바탕을 둔 수학 교수-학습을 인도해야 한다는 관점에서 보면, 그들의 수학화 경험은 중등학교 수학교육을 위해서도 매우 중요하다. 이런 점에서 예비교사들을 위한 수학화 훈련 프로그램이 필요한 바, <분할 모델의 탐구>이 그러한 역할을 수행할 수 있다. 특히 <분할 모델의 탐구>에서는 수평적 수학화와 수직적 수학화를 모두 강조함으로써, 현실주의 수학교육을 지향한다(Treffers, 1987).

둘째, <분할 모델의 탐구>는 예비교사들로 하여금 학교수학과 학문수학의 연결을 볼 수 있게 한다. 사실상 학교수학은 학문수학과 상당히 유리되어 있다. 그래서 오늘날도 여전히 예비교사들은 그들이 중등학교에서 배운 학교수학과 학문수학 사이의 단절을 경험한다. 또, 그들이 장차 중등학교에서 학교수학을 가르칠 때, 다시 한번 학문수학과 학교수학 사이의 단절을 겪게 된다. <분할 모델의 탐구>는, 일찍이 Klein(1968)이 지적한 '이중단절'을 극복하는데 도움을 준다.

셋째, <분할 모델의 탐구>는 예비교사들의 수학적 창의력을 기르는데 도움이 될 수 있다. 예비교사들의 수학적 창의력은, 그들이 장차 중등학교에서 학생들의 수학적 창의력을 길러 주어야 하는 임무를 가지고 있다는 점에서, 상당히 중요하다. 수학적 창의력이란 대체적으로 수학적으로 새로운 결과를 창출해 내는 능력(Ervynck, 2003; Sriraman, 2004)을 의미하는 바, 분할 모델은 계속적으로 탐구가 가능한 수학적 실재라는 점에서, 예비교사들은 <분할 모델의 탐구>에서, 개방적으로 주어진 탐구 문제를 해결하는 과정을 통해 수학적으로 새로운 결과를 창출해 내는 경험을 할 수 있다.

참고문헌

박교식 (2002a). 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원 설계 연구. 학교수학 4(2).

297-315.

박교식 (2002b). 수열의 교수·학습을 위한 교수단원 소재 연구-다각수와 각뿔수. 학교수학 4(3). 361-373

박교식 (2003). 수학화 교수·학습을 위한 소재 개발 연구: 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수와 그 일반화. 수학교육학연구 13(1). 57-75.

신현성, 이준열 (2002). 이산수학. 교육부

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

한대희 (2004). 공간도형 탐구 교수단원 개발 사례. 수학교육학논총. 235-249.

山本信也 (2004). 「操作的原理」による算數・數學の學習指導: 『數の本』における「計算三角形」の扱いを例として. 九州數學教育學硏究 第11號. 1-7.

片桐重男 (1992). 수학적 사고의 구체화. (이용률, 성현경, 정동권, 박영배 공역). 서울: 경문사. (일어 원작은 1988년 출판)

平林一榮 (1999). 수학교육의 進步와 展望. 수학교육학연구 9(1), 1-13.

Ervynck, G. (2003). 수학적 창의성. 55-71. In D. Tall. Advanced mathematical thinking. 류희찬·조완영·김인수(공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판)

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathemtical structures. Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. (China Lectures) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. (1968). Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic · algebra · analysis. E. R. Hedrick, C. A. Noble (trans.). New York: Dover Publications. (원작은 1924년에 출판).

Sadovsky, P. & Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedure of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new question. Educational Studies in Mathematics 59. 85-112.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. The mathematics Educator 14(1). 19-34

Treffers, A. (1987). Tree dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics 54(1). 9-35

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, Educational Studies in Mathematics 15(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. Educational Studies in Mathematics, 29(4), 355-374.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 1-20.

A design of teaching units for experiencing mathematising of secondary pre-service teachers: Inquiry into number partition models

Kim, Jin Hwan[4) · Park, Kyosik[5)

Abstract

In this paper, we generalized number partion problems in elementary situations to number partition models that provide some mathematical problem situations for experiencing mathematising of secondary pre-service teachers. We designed substantial teaching units entitled "the inquiry intof number partition models" through 4 steps: (1) key problems, (2) integration from the view of partition, (3) defining partition (4) a real practice of inquiry into models. This teaching unit can contribute to secondary pre-service teacher education as follows: first, This teaching unit have pre-service teachers experience mathemtising. second, This teaching unit have pre-service teachers see the connection between school mathematics and academic mathematics. third, This teaching unit have pre-service teachers foster their mathematical creativity.

Key Words : Mathematising, Horizontal mathematising, Vertical mathematising, Teaching units, Partition model, Anti-didactical inversion, Double discontinuity

4) Yeungnam University (kimjh@yu.ac.kr)
5) Kyeongin National University of Education (kimjh@yu.ac.kr)