

진동응답에 나타난 모드의 기여도 평가에 관한 연구

A Study on the Contribution of Each Mode in Vibration Response

정 순 철* · 이 재 응†

Soon Chul Jung and Jae Eung Lee

(2005년 10월 25일 접수 ; 2006년 3월 10일 심사완료)

Key Words : Modal Parameters(모드 변수), Vibration Energy(진동신호 에너지), Modal Contribution(모드 기여도), Discrete Vibration Signal(이산진동신호), Autocorrelation Function(자기상관함수), Modal Analysis(모드해석)

ABSTRACT

In this paper, a physically meaningful methodology which can assess the contribution of each vibration mode to various vibration response signals (displacement, velocity, acceleration) is developed. Based on these results, the problem of quantitative assessment of the relative importance of a structural system's vibrational modes is discussed. In addition, a direct method which can assess the relative importance of each mode from uniformly sampled experimental data is also proposed.

1. 서 론

진동시스템에서 가진력 신호가 백색잡음(white noise) 이거나 임펄스일 경우 그 응답 함수는 각 모드와 관련된 함수의 합으로 표현된다⁽¹⁾. 따라서 응답 함수에 나타나는 각 모드의 영향의 크기를 비교하면 각 모드의 기여도를 평가할 수 있다.

응답함수에 나타나는 각 모드의 기여도는 모델링 과정에서 모델의 차수를 결정하는데 사용 될 수 있으며⁽²⁾, 실험 모드 해석에서 추정된 모드 중 구조물 모드(structural mode, true mode)와 계산상 모드(computational mode)를 구별하는데 중요한 판단기준이 될 수 있으며^(3,4), 또한 결함 진단 등 진동 신호의 정보를 분석할 필요가 있는 다양한 분야에 적용하여 사용될 수 있다.

Lee와 Fassois⁽⁴⁾는 가진력이 백색잡음일 때 응답

변위 신호에 나타난 각 모드의 기여도 평가를 위하여 변위신호의 평균 제곱값(mean square value)으로 정의되는 진동에너지에 대한 각 모드의 기여도와 이 값을 근거로 정의한 각 모드의 상대적 중요도를 소개 하였으며, 그에 대한 물리적 의미를 임펄스 응답 함수와 스펙트럼으로 설명하였다.

그러나 일반적으로 진동실험에서 측정하는 응답 함수는 대부분 변위가 아닌 가속도 신호를 측정하게 되는 경우가 더 많이 있다. 이 때 각 모드의 기여도는 변위신호를 기준으로 평가한 경우와 다르게 나타나게 된다.

이 논문에서는 응답함수가 속도, 가속도인 경우에 대하여 각 모드의 기여도 평가 방법을 제시하고, 변위, 속도, 그리고 가속도 응답 신호에서 정의된 특정 모드의 기여도 함수 간의 관계를 유도 하였다. 또한 실제 실험에도 적용할 수 있도록 일정한 시간간격으로 샘플링 된 이산시간(discrete-time) 진동 응답 신호로부터 각 모드의 기여도를 평가할 수 있는 방법을 개발하였다. 샘플링 된 신호를 이용할 경우에는 자유도가 큰 경우에도 하나의 단입력-단출력 전달함수

† 책임저자; 정회원, 중앙대학교 기계공학부
E-mail : jelee@cau.ac.kr
Tel : (02) 820-5284, Fax : (02) 824-8130

* 정회원, 중앙대학교 대학원 기계공학부

로부터 각 모드의 기여도를 평가할 수 있음을 보였다.

2. 변위응답신호에서 모드의 기여도 평가

선형, n 자유도, 점성 감쇠 진동시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서, M , C , K 는 크기가 $n \times n$ 인 실수이고 대칭인 질량, 감쇠, 강성 행렬을 각각 나타낸다. 이 시스템이 별개의 진동 모드를 n 개 갖는다고 가정하면 n 쌍의 공액 복소 고유치와 고유벡터(모드벡터)는 각각 다음과 같이 표현 된다.

$$s_i, s_i^* = -\zeta_i \omega_{n_i} \pm j \omega_{n_i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{n_i} \pm j \omega_{d_i} \quad (2)$$

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix}, \quad \phi_i^* = \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \phi_{2i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

여기서 ω_{d_i} , ω_{n_i} , ζ_i 는 모드 i 의 감쇠 고유진동수, 고유진동수, 감쇠계수를 각각 나타내며, j 는 단위 허수를 나타낸다.

그러면 주어진 가진력 벡터 $f(t)$ 에 대한 응답 변위 벡터는 다음과 같이 표현된다⁽¹⁾.

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \left[\phi_i \sum_{k=1}^n \left(\frac{\phi_{ki}}{a_i} \int_{-\infty}^t h_i(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \right) + \phi_i^* \sum_{k=1}^n \left(\frac{\phi_{ki}^*}{a_i^*} \int_{-\infty}^t h_i^*(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \right) \right] \quad (4)$$

여기서,

$$h_i(t) \triangleq e^{s_i t} = e^{-\zeta_i \omega_{n_i} t} (\cos \omega_{d_i} t + j \sin \omega_{d_i} t) \quad (5)$$

$$h_i^*(t) \triangleq e^{s_i^* t} = e^{-\zeta_i \omega_{n_i} t} (\cos \omega_{d_i} t - j \sin \omega_{d_i} t) \quad (6)$$

이고, 상수 a_i 와 a_i^* 는 각각 다음과 같이 표현 된다.

$$a_i \triangleq 2s_i \cdot \phi_i^T M \phi_i + \phi_i^T C \phi_i \quad (7)$$

$$a_i^* \triangleq 2s_i^* \cdot \phi_i^{*T} M \phi_i^* + \phi_i^{*T} C \phi_i^* \quad (8)$$

변위 응답에 나타나는 각 모드의 기여도는 각 전달함수마다 (가진점과 응답 측정점의 위치에 따라) 달라질 수 있으므로 임의의 가진력 $f_i(t)$ 에 대한 응답 $x_m(t)$ 과의 관계인 특정 전달함수를 생각해 보자.

가진력 신호 $f_i(t)$ 의 평균값이 0이고, 분산이 R_{f_i} 인 백색잡음이라고 하면 변위 응답신호의 자기 상관함수는 다음과 같이 표현될 수 있다⁽⁴⁾.

$$\begin{aligned} R_{x_m}(\tau) &= E[x_m(t)x_m(t+\tau)] \\ &= \sum_{k=1}^n [e^{(-\zeta_i \omega_{n_i} \tau)} (\eta_1^{(k)} \cos \omega_{d_i} \tau \\ &\quad + \eta_2^{(k)} \sin \omega_{d_i} \tau)] \\ &\triangleq \sum_{k=1}^n D_k(\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $E[\cdot]$ 는 통계학적 기대함수(statistical expectation)이고, η_1, η_2 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_1^{(k)} &= R_{f_i} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\phi_{mi} \phi_{li} \phi_{mk} \phi_{lk}}{a_i a_k} \int_0^\infty h_i(t) h_k(t) dt \right. \\ &\quad + \frac{\phi_{mi} \phi_{li} \phi_{mk}^* \phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \int_0^\infty h_i(t) h_k^*(t) dt \\ &\quad + \frac{\phi_{mi}^* \phi_{li}^* \phi_{mk} \phi_{lk}}{a_i^* a_k} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k(t) dt \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{mi}^* \phi_{li}^* \phi_{mk}^* \phi_{lk}^*}{a_i^* a_k^*} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k^*(t) dt \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^{(k)} &= j R_{f_i} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\phi_{mi} \phi_{li} \phi_{mk} \phi_{lk}}{a_i a_k} \int_0^\infty h_i(t) h_k(t) dt \right. \\ &\quad - \frac{\phi_{mi} \phi_{li} \phi_{mk}^* \phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \int_0^\infty h_i(t) h_k^*(t) dt \\ &\quad + \frac{\phi_{mi}^* \phi_{li}^* \phi_{mk} \phi_{lk}}{a_i^* a_k} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k(t) dt \\ &\quad \left. - \frac{\phi_{mi}^* \phi_{li}^* \phi_{mk}^* \phi_{lk}^*}{a_i^* a_k^*} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k^*(t) dt \right) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (9)로부터 볼 수 있듯이 응답 변위의 자기 상관 함수는 n 개의 항으로 분리해서 표현되었으며 각 항 $D_k(\tau)$ 는 각 진동 모드와 관련된 함수로 분리되어 표현한 것임을 알 수 있다. 따라서 이를 $R_{x_m}(\tau)$ 에 대한 각 모드의 기여라고 정의할 수 있다.

진동 변위 신호 $x_m(t)$ 의 에너지는 평균 제곱값으로 정의될 수 있으며, 이는 자기 상관 함수에 $\tau=0$ 을 대입함으로서 구할 수 있다⁽⁵⁾. 따라서 식 (9)로부터 진동 신호의 에너지를 구하면 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$R_{x_m}(0) \triangleq \sum_{k=1}^n D_k(0) \\ \triangleq \sum_{k=1}^n [2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(-\frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} \right. \\ \left. + \frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right)] \quad (12)$$

여기서 $\operatorname{Re}(\cdot)$ 는 실수 값을 나타내며 $\eta_3^{(i,k)}$, $\eta_4^{(i,k)}$ 는 각각 다음과 같이 표현 된다.

$$\eta_3^{(i,k)} \triangleq \int_0^\infty h_i(t)h_k(t) dt \\ = \frac{(\xi_i\omega_{n_i} + \xi_k\omega_{n_k}) + j(\omega_{d_i} + \omega_{d_k})}{\omega_{n_i} + \omega_{n_k} + 2\xi_i\xi_k\omega_{n_i}\omega_{n_k} + 2\omega_{n_i}\omega_{n_k}\sqrt{(1-\xi_i^2)(1-\xi_k^2)}} \quad (13)$$

$$\eta_4^{(i,k)} \triangleq \int_0^\infty h_i(t)h_k^*(t) dt \\ = \frac{(\xi_i\omega_{n_i} + \xi_k\omega_{n_k}) + j(\omega_{d_i} - \omega_{d_k})}{\omega_{n_i} + \omega_{n_k} + 2\xi_i\xi_k\omega_{n_i}\omega_{n_k} - 2\omega_{n_i}\omega_{n_k}\sqrt{(1-\xi_i^2)(1-\xi_k^2)}} \quad (14)$$

따라서 진동 에너지는 n 개 항으로 분리되어 표시 될 수 있으며, 위에서 설명한 것과 같이 각 항 $D_k(0)$ 은 모드 k 로부터 전체 진동 에너지에 기여 하는 부분이 된다. 따라서 모드 k 의 기여도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta_k \triangleq \frac{D_k(0)}{\sum_{j=1}^n D_j(0)} \times 100\% \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (15)$$

3. 속도와 가속도 응답에서 각 모드의 기여도

구조물 진동 실험에서 많은 경우 속도 또는 가속도 센서를 이용하여 응답함수를 측정하므로 이 장에서는 속도 및 가속도 신호의 에너지와 이에 대한 각 모드의 기여도를 유도하고자 한다.

진동 변위 신호의 자기 상관 함수는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (16)$$

이 식으로부터 속도신호의 자기상관함수를 구하면 다음과 같이 표현되고, (5)

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \{R_x(\tau)\} = E[\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)] \triangleq -R_{\dot{x}}(\tau) \quad (17)$$

속도신호의 에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_{\dot{x}}(0) = \sum_{k=1}^n D_k'(0) \\ = 2R_{f_0} \sum_{k=1}^n [(\omega_{d_k}^2 - \xi_k^2\omega_{n_k}^2) \cdot \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} + \frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right) \\ + (2\xi_k\omega_{n_k}\omega_{d_k}) \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} \left(\frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} \right. \\ \left. + \frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right)] \quad (18)$$

유사한 방법으로 가속도 신호의 자기상관함수도 다음과 같이 구할 수 있으며 (5)

$$\frac{d^4}{d\tau^4} \{R(\tau)\} \triangleq R_{\ddot{x}}(\tau) \quad (19)$$

가속도 신호의 에너지는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$R_{\ddot{x}}(0) = \sum_{k=1}^n D_k''(0) \\ = 2R_{f_0} \sum_{k=1}^n [(\xi_k^4\omega_{n_k}^4 - 6\xi_k^2\omega_{n_k}^2\omega_{d_k}^2 + \omega_{d_k}^4) \times \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} \right. \\ \left. + \frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right) \\ + (4\xi_k\omega_{d_k}^3\omega_{n_k} - 4\xi_k^3\omega_{n_k}^3\omega_{d_k}) \times \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} \left(\frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} + \frac{\phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right)] \quad (20)$$

여기서 $\eta_3^{(i,k)}$, $\eta_4^{(i,k)}$ 는 식 (13), (14)과 같고 $D_k'(0)$, $D_k''(0)$ 는 각각 속도 가속도 신호의 에너지에 대한 모드 k 의 기여를 나타낸다.

$$D_k(0) = 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \phi_{mi}\phi_{ii}\phi_{mk}\phi_{lk} \times \\ \frac{(\xi_i\omega_{n_i} + \xi_k\omega_{n_k})}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\xi_i\xi_k\omega_{n_i}\omega_{n_k}(\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\xi_i^2 + \xi_k^2)\omega_{n_i}\omega_{n_k}]} \quad (21)$$

비례 감쇠 시스템의 경우에는 모드 형상벡터가 실수이고 $a_i = j2\omega_{d_i}$ 이므로 변위, 속도, 가속도 에너지에 대한 모드 k 의 기여는 각각 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$D_k'(0) = 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \phi_{m_i} \phi_{k_i} \phi_{m_i} \phi_{k_i} \times \frac{[\omega_{n_i} \omega_{n_k} (\zeta_i \omega_{n_k} + \zeta_k \omega_{n_i})]}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} (\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\zeta_i^2 + \zeta_k^2) \omega_{n_i} \omega_{n_k}]} \quad (22)$$

$$D_k''(0) = 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \phi_{m_i} \phi_{k_i} \phi_{m_i} \phi_{k_i} \times \frac{[\omega_{n_i}^4 (\zeta_i \omega_{n_i} - \zeta_k \omega_{n_k}) - 4\zeta_k^2 \omega_{n_i} \omega_{n_k}^3 (\zeta_i \omega_{n_k} + \zeta_k \omega_{n_i}) + 2\zeta_i \omega_{n_i}^2 \omega_{n_k}^3]}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} (\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\zeta_i^2 + \zeta_k^2) \omega_{n_i} \omega_{n_k}]} \quad (23)$$

4. 이산시간 응답으로부터 모드 기여도 추정

실제 진동 실험에서는 신호를 샘플링하여 측정하므로 본 절에서는 일정하게 샘플링된 가진신호 $f[t]$ 와 응답신호 $x[t]$ 의 이산시간 전달함수로부터 모드의 기여도를 평가할 수 있는 방법을 유도하고자 한다.

4.1 이산시간 변위 신호의 경우

식 (1)로 표현되는 진동시스템에서 가진 점 l 과 응답측정 점 m 사이의 전달함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{A_k^*}{s-s_k^*} \right) = \frac{\alpha_0 s^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2}}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} \quad (24)$$

여기서

$$A_k = \frac{\phi_{mk} \phi_{lk}}{a_k}, \quad A_k^* = \frac{\phi_{mk}^* \phi_{lk}^*}{a_k^*} \quad (25)$$

이고, 식 (24)로 부터 $\sum_{k=1}^n (A_k + A_k^*) = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 이 전달함수와 등가인 이산시간 전달함수 $G[B]$ 의 표현식은 일정하지 않으나 임펄스 불변원리⁽⁶⁾를 이용하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\alpha[B] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) = \frac{\theta_0 + \dots + \theta_{2n-1} B^{2n-1}}{1+d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \quad (26)$$

여기서 $\lambda_k = e^{s_k \Delta}$, $\lambda_k^* = e^{s_k^* \Delta}$ 는 이산시간 특성방정식의 고유값(eigenvalues)이고, Δ 는 샘플링 시간 간격이며 $B = \mathcal{Z}\{y[t] = y[t-\Delta] = y[t-1]\}$ 을 의미한다. 즉 이산시간 표현에서는 $y[t]$ 와 $y[t-1]$ 은 샘플링 시간 Δ 차이를 두고 측정된 신호를 의미한다.

이산시간 전달함수는 Green 함수를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다⁽⁶⁾.

$$G[B] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} (A_k \lambda_k^j + A_k^* \lambda_k^{*j}) \right] B^j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \quad (27)$$

따라서 샘플링된 변위응답신호는 다음과 같이 표현될 수 있으며,

$$x_m[t] = G[B] \cdot f_l[t] = \sum_{j=0}^{\infty} G_j f_l[t-j] \quad (28)$$

또한 $x_m[t]$ 의 자기상관함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &\triangleq E[x_m[t] x_m[t-\tau]] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_j E[f_l[t-i] f_l[t-\tau-j]] \\ &= R_{f_0} \sum_{j=0}^{\infty} G_{\tau+j} G_j \end{aligned} \quad (29)$$

위 식에 식 (27)의 G_j 를 대입하면 이산시간 변위응답신호의 자기상관함수는 다음과 같이 각 진동 모드와 관련된 n 개의 항으로 분리되어 표현될 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \sum_{k=1}^n (\gamma_\tau)_k = R_{f_0} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A_k A_k}{1-\lambda_k \lambda_k} + \frac{A_k A_k^*}{1-\lambda_k \lambda_k^*} \right) \lambda_k^i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A_k^* A_k}{1-\lambda_k^* \lambda_k} + \frac{A_k^* A_k^*}{1-\lambda_k^* \lambda_k^*} \right) \lambda_k^{*i} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

응답신호의 에너지는 식 (30)에 $\tau=0$ 을 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_0 \triangleq \sum_{k=1}^n (\gamma_0)_k = \sum_{k=1}^n \left[2R_{f_0} \sum_{i=0}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{A_k A_k}{1-\lambda_k \lambda_k} + \frac{A_k A_k^*}{1-\lambda_k \lambda_k^*} \right) \right] \quad (31)$$

따라서 $(\gamma_0)_k$ 는 변위응답신호의 에너지에 모드 k 가 기여하는 부분을 나타내는 것으로서 식 (12)

의 $D_k(0)$ 와 같은 의미를 갖는다.

4.2 이산시간 속도 신호의 경우

속도응답에 대한 전달함수(mobility)는 다음과 같이 표현될 수 있고⁽⁷⁾,

$$G_v(s) = sG(s) = \frac{\alpha_0 s^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n-2} s}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k'}{s-s_k} + \frac{A_k''^*}{s-s_k^*} \right) \quad (32)$$

또한 선형시스템에서 변위응답은 다음과 같이 콘볼루션 적분으로 표현될 수 있다.

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (33)$$

위 식을 t 에 대하여 미분하면 Leibnitz's Law⁽⁸⁾에 의하여 속도응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \left[\frac{d}{dt} g(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau + g(0) f(t) \quad (34)$$

그런데 causal 시스템에서는 $g(0)=0$ 이고 충격 속도응답함수(impulse response velocity function)는 다음과 같이 표현될 수 있으므로,

$$\frac{d}{dt} g(t) = \dot{g}(t) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k e^{s_k t} + s_k^* A_k^* e^{s_k^* t}) \quad (35)$$

모빌리티는 식 (39)를 라플라스 변환하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G_v(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k A_k}{s-s_k} + \frac{s_k^* A_k^*}{s-s_k^*} \right) \quad (36)$$

따라서 리셉턴스와 모빌리티의 모드 상수(modal constant) 사이에는 다음과 같은 관계가 성립 된다.

$$A_k' = s_k A_k, \quad A_k''^* = s_k^* A_k^* \quad (37)$$

또한 등가의 이산시간 모빌리티는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_v[B] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{s_k^* A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) = \frac{\theta_0' + \dots + \theta_{2n-1}' B^{2n-1}}{1 + d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \quad (38)$$

여기서 θ_0' 는 다음과 같다.

$$\theta_0' = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) \quad (39)$$

4.3 이산시간 가속도 신호의 경우

힘과 가속도 사이에서 정의되는 전달함수 중에서 이너턴스(inertia)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_a(s) = s^2 G(s) = \frac{\alpha_0 s^{2n} + \dots + \alpha_{2n-2} s^2}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k''}{s-s_k} + \frac{A_k''^*}{s-s_k^*} \right) \quad (40)$$

이 경우 모드 상수 A_k 와 A_k'' 의 관계를 찾기 위하여 식 (39)를 t 에 대하여 한 번 더 미분하면 가속도응답신호는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{x}(t) = \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \dot{g}(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau + \dot{g}(0) f(t) \quad (41)$$

그런데 식(40)으로부터 다음과 같은 관계를 구할 수 있고,

$$\dot{g}(0) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) \quad (42)$$

충격 가속도 응답함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{g}(t) = \sum_{k=1}^n (s_k^2 A_k e^{s_k t} + s_k^{*2} A_k^* e^{s_k^* t}) \quad (43)$$

따라서 식(41)을 라플라스 변환하면 이너턴스는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_a(s) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k^2 A_k}{s-s_k} + \frac{s_k^{*2} A_k^*}{s-s_k^*} \right) \quad (44)$$

여기서

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) \quad (45)$$

$$A_k'' = s_k^2 A_k, \quad A_k''^* = s_k^{*2} A_k^*$$

이 된다. 따라서 등가의 이산시간 이너턴스는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_a[B] = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k^2 A_k}{1 - \lambda_k B} + \frac{s_k^{*2} A_k^*}{1 - \lambda_k^* B} \right) = \frac{\theta_0'' + \dots + \theta_{2n}'' B^{2n}}{1 + d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \quad (46)$$

이상과 같이 응답 함수가 변위가 아닌 속도 또는 가속도 신호인 경우 각 전달 함수의 모드 상수간의 관계를 유도하였으며, 따라서 이 논문에서 제안하는 진동 변위 신호 에너지에 대한 각 모드의 기여도를 샘플링 된 속도나 가속도 신호로부터 구할 수 있음을 보여 주었다. 또한 모드 기여도를 해석적으로 구하는 경우에는 모든 모드변수 값을 알고 있어야 구할 수 있으나(식(21)~(23)) 이산시간 전달함수로부터 구하는 경우에는 하나의 전달함수로부터 특성근과 모드상수 값을 구하여각 모드 기여도를 구할 수 있음(식(31))을 알 수 있다.

5. 예 제

모의실험으로 생성한 가속도 신호로부터 변위신호의 에너지로 정의된 모드기여도를 구하기 위하여 Fig. 1과 같은 2자유도 진동시스템을 고려하였으며 그 시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬의 값들은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 150.0 & -50.0 \\ -50.0 & 150.0 \end{bmatrix}$$

위 시스템의 모드 변수와 기여도를 해석적 결과는 Table 1에 정리하였다.

모의실험에서 입력 신호는 평균값이 0이고 분산이 1인 백색잡음을 사용하였고, 응답신호는 Wilson- θ 방법을 이용하여 응답 측정점 1과 2에 대한 변위, 속도, 가속도 데이터를 각각 생성하였다.

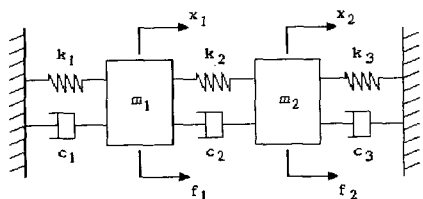


Fig. 1 Two degree of freedom structural system

응답 신호에는 N/S ratio(잡음과 응답신호의 분산비)가 10%가 되는 잡음을 섞어 실제 실험과 같이 외부 잡음의 영향을 고려하였으며, 가진력과 응답 함수를 0.1초 간격으로 샘플링하였다. Fig. 2에 가진점 1(m1)에 적용한 입력 신호와 응답점 2에서 측정된 잡음이 섞인 변위와 가속도 응답신호를 나타내었다.

가진 신호와 잡음이 섞인 응답 신호를 이용하여 시스템의 동특성을 모델링하는 경우에는 ARMAX 모델이 편리하게 사용될 수 있다⁽³⁾. ARMAX(na, nb, nc) 모델은 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$A(B) \cdot y[t] = D(B) \cdot x[t] + C(B) \cdot n[t] \quad (47)$$

Table 1 Modal contribution analysis results for displacement response

	ω_n (Hz)	ζ_k	Modal contribution matrices(%)
Mode 1	1.5916	0.1	$\begin{bmatrix} 70.46 & 82.13 \\ 82.13 & 70.46 \end{bmatrix}$
Mode 2	2.2508	0.1061	$\begin{bmatrix} 29.54 & 17.87 \\ 17.87 & 29.54 \end{bmatrix}$

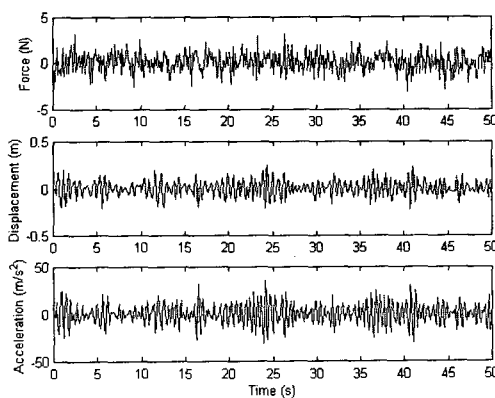


Fig. 2 Input force and noise-corrupted response signal for the transfer function x_2/f_1

Table 2 Modal contribution to displacement response estimated from inertance

	A_i''	A_k	Modal contribution matrices(%)
Mode 1	$-0.5 + j2.4623$	$-j0.025125$	$\begin{bmatrix} 70.5 & 82.1 \\ 82.1 & 70.5 \end{bmatrix}$
Mode 2	$-0.75 + j3.4756$	$-j0.017778$	$\begin{bmatrix} 29.5 & 17.9 \\ 17.9 & 29.5 \end{bmatrix}$

여기서 $x[t]$, $y[t]$, $n[t]$ 는 각각 입력, 출력, 그리고 백색잡음 신호를 나타내며 다항식 $A(B)$, $D(B)$, $C(B)$ 는 각각 다음과 같이 표현되고, B 는 앞서 설명한 바와 같이 back shift operator로서 $B \cdot y[t] = y[t-1]$ 을 의미하고, na , nb , nc 는 각 다항식의 차수이다.

$$\begin{aligned} A(B) &= 1 + d_1 B + \dots + d_{na} B^{na} \\ D(B) &= \theta_0 + \dots + \theta_{nd} B^{nd} \\ C(B) &= 1 + c_1 B + \dots + c_{nc} B^{nc} \end{aligned} \quad (48)$$

이 모델로부터 가진과 응답신호 사이의 전달함수는 이산시간 영역에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G(B) = D(B)/A(B) \quad (49)$$

이 연구에서는 suboptimum maximum likelihood 방법⁽³⁾을 이용하여 ARMAX모델의 계수를 추정하였고 이로부터 이산 시간 전달함수를 구하였다. 추정된 이산시간 전달함수로부터 특성근, 모드 변수, 그리고 각 모드의 기여도를 구하여 해석 결과와 비교하였다. 가진점 1과 응답 측정점 2에서 측정된 가속도 신호의 관계인 transfer 이너턴스는 ARMAX(4,3,4) 모델로 추정될 수 있으며 그 결과는 다음과 같았다.

$$G_d[B] = \frac{0.57296 + 1.1592B - 4.11596B^2 + 2.19688B^3}{1 - 1.2652B + 1.8349B^2 - 0.9573B^3 + 0.604308B^4}$$

이 추정결과로부터 식 (31)과 식 (46)을 이용하여 구한 모드 상수와 각 모드의 기여도를 Table 2에 나타내었다. 비교 결과 가속도 신호로부터 추정된 모드 기여도(변위신호의 에너지를 기준으로 정의된)가 해석적으로 구한 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

6. 결 론

이 논문에서는 진동 변위 응답 함수에 나타나는 각 모드의 영향(기여도)을 정량화하여 비교할 수 있는 하나의 방법을 제안하였다.

또한 응답 신호가 속도나 가속도일 경우에도 각 모드의 기여도를 평가하기 위하여 각 전달함수의 모드 상수의 관계를 유도하였다. 따라서 실제 진동 실험에서 주로 측정하는 속도, 가속도 응답 함수로부터 쉽게 각 모드의 기여도 구할 수 있었다.

마지막으로 이산시간 전달함수에서 각 모드의 기

여도를 구할 수 있는 과정을 유도하였다. 모드 기여도를 해석적으로 구하는 경우에는 모든 모드변수 값들을 알고 있어야 구할 수 있으나 이산시간 전달함수로부터 구하는 경우에는 하나의 단입력-단출력 전달함수로부터 구할 수 있음을 보여주었다. 따라서 실제 구조물과 같은 고차의 진동시스템에도 쉽게 적용할 수 있음을 보였다.

후 기

이 논문은 2001학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

참 고 문 헌

- (1) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations," Macmillan.
- (2) Liaw, C. M., Ouyang, M. and Pan, C. T., 1990, "Reduced Order Parameter Estimation for Continuous System from Sampled Data," Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 112, pp. 305~308.
- (3) Lee, J. E. and Fassois, S. D., 1992, "Suboptimum Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameter from Multiple-excitation Vibration Data," J. of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 260~271.
- (4) Lee, J. E. and Fassois, S. D., 1993, "On the Problem of Stochastic Experimental Modal Analysis Based on Multiple-excitation Multiple-response Data, part I: Dispersion Analysis of Continuous-time Structural System," J. of Sound and Vibration, Vol. 161, pp. 33~56.
- (5) Newland, D. E., 1983, "Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis," John Wiley.
- (6) Pandit, S. M. and Wu, S. M., 1983, "Time Series and System Analysis with Applications", John Wiley.
- (7) Ewins, D. J., 1986, "Modal Testing : Theory and Practice," Research Studies Press.
- (8) Hildebrand, F. B., 1976, "Advanced Calculus for Applications," Prectice-Hall.