한국공작기계학회논문집 Vol.15 No.2 2006. 4.
Transactions of the Korean Society of Machine Tool Engineers

# 다단 회전체 계의 동적 모델 개선에 관한 연구

홍성욱*, 최성환+

(논문접수일 2006. 1. 4, 심사완료일 2006. 3. 15)

# An Improved Dynamic Model for Multi-Stepped Rotor System

Seong-Wook Hong*, Seong-Hwan Choi+

Abstract

This paper presents an efficient dynamic modeling method for multi-stepped rotor system using effective spring elements to take into account the structural weakening effect due to the steps. This paper demonstrates that the Timoshenko shaft model give rise to a significant error in the case of multi-stepped rotors. An effective bending spring model is introduced to represent the structural weakening effect in the presence of steps. The proposed modeling method is validated through a series of simulations and experiments. Finally, a spindle is dealt with as an analysis example.

**Key Words** : Multi-stepped shaft(다단 축), Timoshenko shaft(티모센코 축), Stress concentration(응력집중), Natural frequency(고유진동수), Effective bending spring(등가 굽힘 스프링), Finite element method(유한요소법)

## 1. 서 론

회전축계는 공작기계의 주축이나 터보기계, 선박 및 자동차 등 기계 전반에 광범위하게 사용되고 있다. 특히 회전축계는 기계의 핵심 부분이 되는 동력발생부나 전달계통을 구성하므로 동적 안정성을 확보하는 것이 매우 중요하다. 따라서 회전축계에 대한 보다 정확한 동특성 분석이 요구되고 있으며, 이를 위해 정확한 동적 모델링과 해석 기술 개발에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다. 그 중에서도 유한요소법은 회전축계 해석 및 설계를 위해 가장 널리 사용되는 도구가 되어왔다. 일반적으로 회전축계의 횡진동은 회전관성, 자이로모멘트, 전단변형을 포함하는 티모센코 축 요소 모델을 이용하여 모델링하고 있으며, 많은 연구를 통해 그 유용성이 입증되어 왔다[1~5]. 그러나 티모센코 축 요소 이론은 축의 경계조건이 전 단면에 균일하게 적용될 때 그 응용이 가능하며, 그와 같은 경계조건을 만족하지 않은 환경에서 사용되는 경우에는 오차가 발생하게 된다[6]. 따라서 다단 축, 즉, 단면의 형상이나 크기가 다른 축이 결합된 형태의 구조에서는 티모센코 축요소로 모델링 할 경우 오차가 발생하게 된다.

회전축은 그 기능적 측면에서 여러 개의 단이 있도록 설계

* 금오공과대학교 기계공학부 (swhong@kumoh.ac.kr)
주소: 730-701 경북 구미시 양호동 1번지
+ 삼성탈레스

/제작되는 경우가 많다. 실제로 주축계를 비롯한 많은 회전체에 다단 축이 사용되고 있으며 기존의 모델링방식에 의존하여 동적해석이 이루어져 왔다[7-9]. 그러나 아직까지 앞서 언급한 바와 같은 다단 회전체 계에 내재되는 모델링 오차에 대해서는 거의 논의되지 않고 있다. 따라서 이와 같은 문제가 발생시킬 수 있는 오차의 정도를 분석하고 이를 효율적이면서도 정확하게 모델링할 수 있는 있도록 모델을 개선하는 것은 다단 회전축 계에 대한 보다 엄밀하고도 정확한 동적 설계/해석이 가능하게 함으로서 그 의미가 있는 것으로 사료된다.

본 논문은 회전축에 단이 있어 축 단면에 불연속이 존재하는 경우 축 계의 모델링에 있어 발생하게 되는 축 요소 이론의 오차를 개선하는 방법을 제안하였다. 즉, 단면의 불연속성이 있는 위치에서 발생되는 응력집중에 의한 강성감소 효과를 효과적으로 나타낼 수 있는 등가스프링을 도입하여 모델링하는 방법을 제안하였다. 제안된 등가스프링의 탄성계수는 무차원화된 축 단차비에 대한 무차원 보정함수를 도입하여 계산이 가능하도록 함으로서 일반적인 조건에서 활용이 가능하도록 하였다. 단순 1단 축에 대한 정밀한 3차원요소 유한요소모델에 의한 계산 결과와 제안된 모델을 이용한 계산 결과를 비교하면서 가장 적합한 스프링 강성계수를 결정하였으며 이 결과를 통해, 도입된 보정함수를 결정하였다. 제안된 모델링 방법을 이용하여 재질과 형상이 다른 두개의 다단 축에 대한 수치실험 및 실제 실험을 실시하였으며 그 타당성을 검증하였다. 마지막으로 스핀들계의 동적해석에 제안된 방법을 적용하는 예를 제시하였다.

## 2. 등가스프링을 이용한 다단 축요소 모델링

### 2.1 티모센코 축의 운동방정식

Fig. 1과 같이 전단변형과 회전관성을 고려한 티모센코 축 운동방정식을 축의 종축 좌표(x)에 대한 상태 공간 형식으로 쓰면 다음과 같다[1,5,8].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{m}{EI_d} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\
\frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - j\Omega \rho I_p \frac{\partial \phi}{\partial t}
\end{aligned} \tag{1}$$

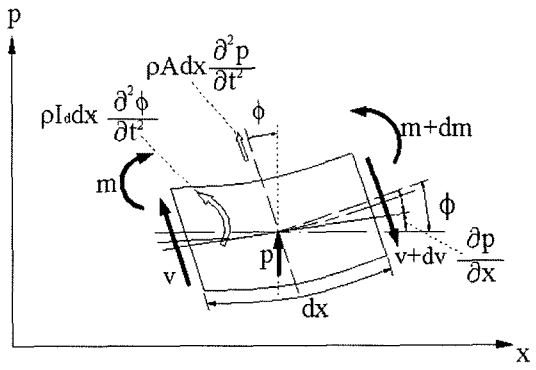


**Fig. 1 Timoshenko shaft model**

여기서, $p$, $\phi$는 각각 축의 복소 횡변위 및 회전 변위이고 $f$, $m$은 복소 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, $\rho$, $G$, $E$는 축의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영률(Young's modulus)을 의미하며, $A$는 단면적, $k$는 단면 형상 보정계수(Shape factor)이다. 또 $I_d$는 직경 방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia), $I_p$는 극 면적 관성 모멘트(Polar area moment of inertia), $\Omega$는 축의 회전 속도를 의미한다. 식 (1)을 요소에 관한 위치에너지와 운동에너지 식에 각각 대입하여 요소의 길이에 대한 적분을 수행하고, 라그랑쥐(Lagrange) 방정식을 적용하면 아래와 같은 티모센코 축 요소에 대한 복소 유한 요소 방정식을 얻을 수 있다[2,3].

$$\mathbf{M}^e\ddot{\mathbf{p}} - j\Omega\mathbf{G}^e\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^e\mathbf{p} = \mathbf{f} \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$는 복소 변위벡터 및 이에 대응되는 복소 힘벡터이다. $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{G}^e$, $\mathbf{K}^e$는 각각 관성요소, 자이로, 강성 행렬을 나타낸다. 요소 행렬에 관한 자세한 사항은 참고문헌[2,3]에 기술되어 있다.

### 2.2 단 효과 모델링

먼저 간단한 1단 축에 대한 모델링에 따른 오차를 분석하여 단이 있는 축에 대한 티모센코 축 유한요소 모델의 오차를 알아본다. 이때 고려한 1단 축은 Fig. 2와 같고, 그 사양은 Table 1와 같다. 고려한 1단 축에 티모센코 축 이론에 의한 유한요소 모델링방법과 상용코드인 I-DEAS[10]를 이용하여 고유진동수를 계산하였다. 상용코드에서는 절점이 13개인 사면체요소를 사용하였으며 약 18,000개의 요소로 모델링하였고, 단이 있는 부분을 보다 세밀하게 메쉬하여 정밀도를

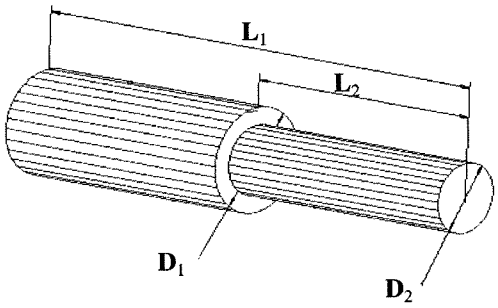


**Fig. 2 Single-stepped shaft model**

**Table 1 Specification of numerical shaft model #1**

| Property | Data | |
|---|---|---|
| Dimension(m) | $L_1$ | 0.15 |
| | $L_2$ | 0.15 |
| | $D_1$ | 0.05 |
| | $D_2$ | 0.045~0.02 |
| Young's modulus(N/m$^2$) | | 2.08e11 |
| Density(Kg/m$^3$) | | 7833 |
| Poisson ratio | | 0.3 |

**Table 2 Comparison of the fundamental natural frequencies of numerical model #1**

| r | Natural frequencies(Hz) | | Error(%) |
|---|---|---|---|
| | I(I-DEAS) | T(Timoshenko) | \|I-T\|/Ix100 |
| 0.1 | 2239.8 | 2254.5 | 0.66 |
| 0.2 | 2042.1 | 2074.9 | 1.61 |
| 0.3 | 1794.7 | 1843.7 | 2.73 |
| 0.4 | 1511.5 | 1567.2 | 3.68 |

최대한 확보하였다. 제안된 방법에서는 30개의 요소를 사용하였다.

Table 2는 1단 축의 단차비($r$)가 변할 때 1차 고유진동수 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 1차 고유진동수에서 상당한 정도의 오차가 발생하고 있으며 단차가 커질수록 오차가 커지는 것을 확인할 수 있다. 여기서 무차원 단차비 $r = (D_1-D_2)/D_1$이며 $D_1$, $D_2$는 각각 단부위의 큰 직경과 작은 직경을 나타낸다.

이상과 같은 단에 의한 오차를 보상하기 위해 단차가 있는 회전축 부분을 Fig. 3과 같이 모형화한다. 즉 단으로 나누어

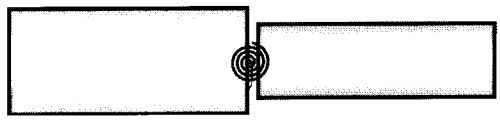

**Fig. 3 A conceptual model of the one-stepped shaft with the effective bending spring**

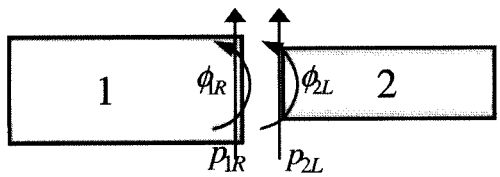


**Fig. 4 Sign conventions for the shaft elements partitioned at a step**

지는 두 부분이 가상의 굽힘 스프링에 의해 결합된 상태로 가정한다. 편의상 축의 좌측 직경이 우측 직경 보다 큰 것으로 가정하면 단 부위를 기준으로 Fig. 4와 같이 좌우 로 구분된 두 개의 요소에 대해 다음과 같은 조건이 성립한다고 가정할 수 있다.

$$p_{1R} = p_{2L},\ f_{1R} = f_{2L},\ m_{1R} = m_{2L} \tag{3}$$

여기서 $1R$, $2L$은 각각 축요소 1의 우측 절점과 축요소 2의 좌측 절점을 의미한다. 즉, 단 부위의 접합부는 변위, 전단력과 모멘트에 대하여서도 연속적임을 의미한다. 하지만 단 부위를 중심으로 각변위는 불연속이 된다. 이 때 결합부에서 각변위($\phi$)의 차이는 Fig. 4의 부호 규약을 기초로 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\Delta\phi = \phi_{2L} - \phi_{1R} = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_2 - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_1 = \frac{1}{k_\theta} m \tag{4}$$

이때 등가 굽힘 스프링 상수는 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다고 가정한다.

$$k_\theta = \frac{(EI)_1}{D_1/2}\,\frac{1}{F(r)} \tag{5}$$

여기서 $F(r)$은 단차비에 따라 변화되는 강성보정함수이다. 일반적으로 단차비가 커질수록 각 변위의 불연속성은 그 크기에 비례하여 커지게 된다.

### 2.3 단이 있는 축 요소의 모델링

단이 있는 축에 대한 앞절의 설명을 기초로 축요소를 모델링하기 위해 단을 경계로 두 요소의 접합부에서 각의 불연속성에 대한 1개의 자유도를 추가한다. 즉, Fig. 4에서, 축요소 1의 우측 절점 각변위($\phi_{1R}$)와 축요소 2의 좌측 절점 각변위($\phi_{2L}$)가 각 독립적인 자유도가 되어 두 요소의 조합은 식 (6)과 같이 표시될 수 있게 된다.

$$\begin{Bmatrix} f_{1L} \\ m_{1L} \\ f_{1R} \\ m_{1R} \\ m_{2L} \\ f_{2R} \\ m_{2R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 & d_{13}^1 & d_{14}^1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 & d_{23}^1 & d_{24}^1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31}^1 & d_{32}^1 & d_{33}^1 + d_{11}^2 & d_{34}^1 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{41}^1 & d_{42}^1 & d_{43}^1 & d_{44}^1 + k_\theta - k_\theta & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & d_{21}^2 & -k_\theta & d_{22}^2 + k_\theta & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 0 & 0 & d_{31}^2 & 0 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 \\ 0 & 0 & d_{41}^2 & 0 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1L} \\ \phi_{1L} \\ p_{1R} \\ \phi_{1R} \\ \phi_{2L} \\ p_{2R} \\ \phi_{2R} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 요소의 상첨자는 요소의 번호를 의미한다.

제안된 모델링 방법을 적용하기 위해서는 등가 굽힘 스프링 상수 계산에 사용되는 보정함수 $F(r)$을 미리 결정할 필요가 있다. 이를 위해 다른 조건은 일정하게 두고 단의 깊이가 다른 여러 개의 2단축에 대해 각각 상용 코드를 이용하여 고유진동수를 구한 값과 제안된 모델링 방법에 의한 고유진동수간의 오차를 최소화하도록 강성 값을 결정하였다. 그리고 이 값을 기초로 식(5)를 이용하여 강성 보정함수를 결정하였다. Fig. 5는 Fig. 2의 1단축에서 단차비를 바꾸면서 상용 유한요소 프로그램(I-DEAS[9])으로부터 얻어진 고유진동수값을 이용하여 결정한 등가 굽힘 스프링 상수값이다.

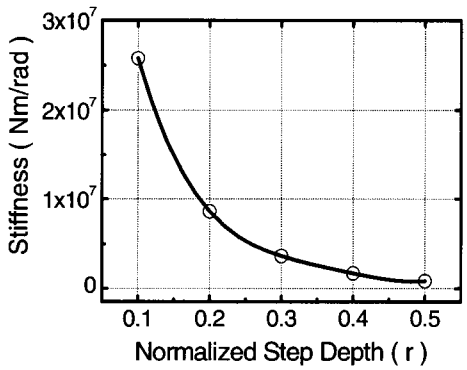


**Fig. 5 Effective bending stiffness as a function of normalized step depth**

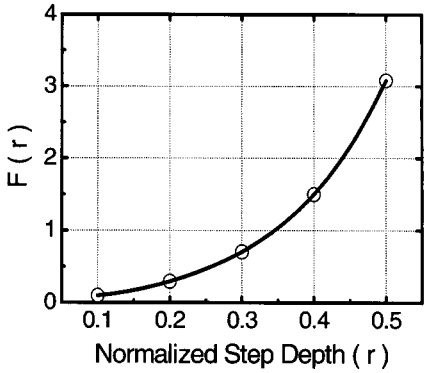


**Fig. 6 Non-dimensional flexibility index as a function of normalized step depth**

또, Fig. 6은 식 (5)의 보정함수 $F(r)$의 정의로부터 결정된 값을 $r$에 대한 4차 다항식으로 피팅하여 재구성한 곡선이며 식 (7)은 그 결과식이다.

$$F(r) = 0.160 - 2.621r + 25.486r^2 - 63.474r^3 + 92.711r^4 \quad (7)$$

식 (7)과 같이 얻어진 강성 보정함수는 단차비 ($r$)만의 함수로 보의 크기나 물성치 등에 영향을 받지 않는다. 따라서, 형상과 물성치 등이 다른 보에도 그대로 적용할 수 있다.

## 3. 제안된 모델링 방법의 검증

### 3.1 수치적 검증

제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위한 첫 번째 방법으로 Fig. 7과 같은 2단축에 대해 제안된 방법과 일반 상용 유한 요소 프로그램인 I-DEAS를 이용하여 고유진동수를 계산, 비교하였으며, 사양은 Table 3과 같다. 제안된 방법

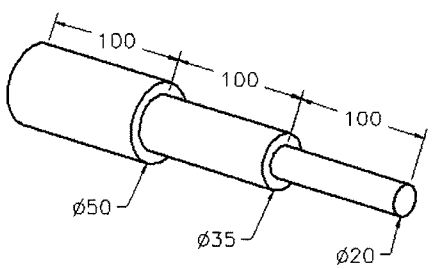


**Fig. 7 Two-stepped aluminum shaft model(model #2)**

**Table 3 Specification of numerical shaft model #2**

| Property | Data |
|---|---|
| Dimension(m) | $L_1 = L_2 = L_3 = 0.1$<br>$D_1 = 0.05$, $D_2 = 0.035$,<br>$D_3 = 0.020$ |
| Young's modulus($N/m^2$) | 7e10 |
| Density($Kg/m^3$) | 2710 |
| Poisson ratio | 0.3 |

**Table 4 Comparison of the natural frequencies of two stepped numerical model(model #2)**

| Mode | Natural frequencies(Hz) | | Error(%) |
|---|---|---|---|
| | I(I-DEAS) | P(Proposed) | \|I-P\|/Ix100 |
| 1st | 1379.4 | 1371.5 | 0.57 |
| 2nd | 3627.3 | 3616.8 | 0.29 |
| 3rd | 7428.2 | 7409.7 | 0.25 |

이 축 재료의 물성치에 무관함을 확인하기 위해 알루미늄 소재를 고려하였다. Table 4는 상용 유한요소 프로그램을 이용하여 계산한 결과와 제안된 방법의 결과를 보여주고 있다. 제안된 모델의 고유진동수가 상용코드에 의한 결과와 매우 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다. 특히 강성 보정 함수를 결정했던 모델과 그 크기가 전혀 다른 2단축에 대해서도 기 결정된 강성보정함수를 이용한 계산이 적용 가능함을 확인 할 수 있다. 따라서 제안된 방법이 단차가 있는 일반적인 축 모델에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

### 3.2 실험적 검증

제안된 방법이 실제적인 회전축에 적용 가능한지를 확인하기 위해 Fig. 8과 같이 2단 형태의 축을 실험대상으로 고려하였다. 시편으로 사용된 2단 축의 밀도와 영률, 포아송비 값은 각각 $7800kg/m^3$, $2.09e11N/m^2$, 0.3으로 두었다. Table 5에는 실험과 제안된 방법 및 기존의 방법으로 계산된 고유진동수를 비교해서 보여주고 있다. 제안된 방법으로 계산한 경우 측정치와 계산치가 0.2% 미만의 오차범위에서 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 비교를 위해 기존의 모델링 방법으로 계산된 결과를 보면 특히 저차모드에서 3% 이상의 오차가 발생한 것을 확인할 수 있다. 따라서 제안된 방법이 다단 축의 모델링 오차를 크게 감소시킬 수 있음을 알 수 있다.

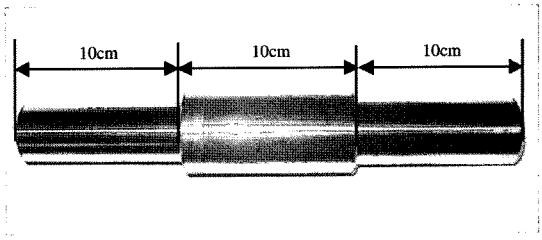


**Fig. 8 Two-stepped experimental shaft model($\phi$35mm, $\phi$50mm, $\phi$40mm)**

**Table 5 Comparison of natural frequencies measured and computed by the proposed method and the conventional method for the experimental shaft**

**Comparison of experiment and proposed method**

| Mode | Natural frequencies(Hz) | | Error(%) |
|---|---|---|---|
| | E(Experiment) | P(Proposed) | \|E-P\|/Ex100 |
| 1st | 2235.0 | 2230.7 | 0.19 |
| 2nd | 4802.5 | 4796.7 | 0.12 |
| 3rd | 9337.5 | 9354.8 | 0.19 |

**Comparison of experiment and conventional method**

| Mode | Natural frequencies(Hz) | | Error(%) |
|---|---|---|---|
| | E(Experiment) | C(Conventional) | \|E-C\|/Ex100 |
| 1st | 2235.0 | 2310.8 | 3.39 |
| 2nd | 4802.5 | 4933.8 | 2.73 |
| 3rd | 9337.5 | 9362.2 | 0.26 |

이상의 수치예제 및 실험 결과로부터 제안된 모델링 방법은 단이 있는 축에서의 강성감소 효과를 적절히 나타냄으로써 보다 정확한 모델링을 가능하게 함을 확인할 수 있었다.

## 4. 제안된 모델링 방법의 적용

제안된 방법의 실제회전체에 대한 응용사례로서 참고문헌[6]에서 고려한 공작기계 주축 예에 대해 수치해를 검토하였다. Fig. 9는 시스템을 보여주고 있으며 Table 6은 시스템의 사양을 정리한 것이다. 회전체 전체의 모델링을 위해 앞서 제안한 단이 있는 축요소모델과 일반적인 축요소모델 그리고 베어링요소에 대한 요소행렬을 구성하여 전체 회전체에 적용, 조합하여 얻어지는 전역행렬에 대해 고유치 해석을 실시하였다. 회전속도는 6000rpm으로 두었다.

Table 7에 제안된 방법과 기존의 방법에 의한 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 계산된 모드에 따라 오차 정도에 다소의 차이가 있으나 최대 2% 정도로서 대체로 큰 오차가 나타나고 있음을 알 수 있다. 각 모드별 오차의 정도는 모드형상에 크게 의존하게 되는데 특히 단이 있는 위치에서의 모드형상 변화율이 중요한 영향을 미치게 된다.

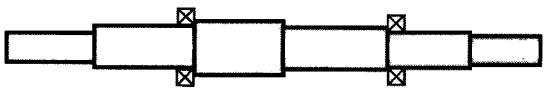

**Fig. 9 A spindle model [8]**

**Table 6 Specification of the spindle model [8]**

| Property | | Data |
|---|---|---|
| Section length(cm) | | 10,15,10,15,10,8 |
| Section diameter(cm) | | 4,6,7,6,5,4 |
| Young's modulus(N/m$^2$) | | 2.08e11 |
| Density(Kg/m$^3$) | | 7833 |
| Poisson ratio | | 0.3 |
| Bearing #1 | Damping (Ns/m) | $c_{yy}=c_{zz}=600$, $c_{yz}=c_{zy}=0$ |
| | Stiffness (N/m) | $k_{yy}=6e8$, $k_{zz}=8e8$ $k_{yz}=k_{zy}=0$ |
| Bearing #2 | Damping (Ns/m) | $c_{yy}=c_{zz}=600$, $c_{yz}=c_{zy}=0$ |
| | Stiffness (N/m) | $k_{yy}=4e8$, $k_{zz}=6e8$ $k_{yz}=k_{zy}=0$ |

**Table 7 Comparison of natural frequencies computed by the proposed method and the conventional method for the spindle model**

| Mode | Natural frequencies(Hz) | | Error(%) |
|---|---|---|---|
| | P(Proposed) | C(Conventional) | \|P-C\|/Px100 |
| 1B* | 574.9 | 584.4 | 1.66 |
| 1F* | 589.0 | 599.3 | 1.76 |
| 2B | 799.2 | 811.5 | 1.54 |
| 2F | 837.5 | 851.5 | 1.68 |
| 3B | 1399.9 | 1405.0 | 0.36 |
| 3F | 1580.2 | 1588.4 | 0.52 |
| 4B | 2150.0 | 2193.9 | 2.04 |
| 4F | 2268.8 | 2323.0 | 2.39 |

*B,F denote backward and forward modes.

## 5. 결과 요약 및 토의

제안된 모델링 방법은 다단축의 단 주위에서 발생되는 강성감소 효과를 고려하기 위해 단 부위를 경계로 구분된 두 결합 요소 사이에 가상의 등가 굽힘 스프링을 도입하였다. 상용 유한요소 프로그램을 이용한 단순 1단 축에 대한 계산 결과와의 비교를 통해 등가 굽힘 스프링 상수를 계산을 위한 무차원 보정함수를 결정하였다. 또한 제안된 방법을 모델링 과정에 사용된 재질과 다른 재질을 갖는 다단 축에 대한 시뮬레이션 및 실제 다단 회전축에 대한 실험적 고유진동수와 비교하여 매우 우수한 상관성을 얻어 실제 다단회전체 해석에 유용하게 활용될 수 있으리라 기대된다. 제안된 방법을 확장한다면 주축계 등에서 많이 활용되는 중공축(Hollow shaft)에 대한 응용이나 비틀림 진동관련 개선된 모델링 방법의 개발도 가능할 것으로 예상된다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 단차에 의한 강성감소 효과를 고려한 개선된 다단 회전체 모델링 방법을 제안하였다. 제안된 모델링 방법을 이용한 계산 및 실험결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 제안된 가상의 등가 굽힘 스프링을 이용하면 단차가 있는 부분의 강성저하에 의한 모델링 오차를 간편하게 최소화할 수 있다.
(2) 제안된 무차원 보정함수를 이용하여 재질에 무관하게 등가 굽힘 스프링 상수를 계산할 수 있다.
(3) 제안된 무차원 보정함수는 무차원 단차비의 함수로서 축직경 절대값에 무관하게 활용이 가능하다.
(4) 실험과 수치계산을 통해 제안된 방법이 실제 회전체에 적용 가능함을 확인하였다.

## 후 기

본 논문은 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

## 참 고 문 헌


(1) Timoshenko, S., Young, D. H. and Weaver, W. Jr, 1974, *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons.

(2) Rao, S. S. and Gupta, R. S., 2001, "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 103~124.

(3) Nelson, H. D., 1980, "A Finite Rotating Shaft Element using Timoshenko Beam Theory," ASME, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 793~803.

(4) Wang, R. T. and Lin, T. Y., 1998, "Vibration of Multispan Timoshenko Frames due to a Moving Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 21, pp. 417~434.

(5) Pilkey, W. D., 1994, *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*, John Wiley & Sons, Inc.

(6) Hong, S. W., Lee, Y. D. and Kim, M. D. 2003, "Error Analysis and Improvement of the Timoshenko Beam based Finite Element Model for Multi-stepped Beam Structures," *J. of KSPE*, Vol. 20, No. 10, pp. 199-207.

(7) Park, J. H. and Hong, S. W., 1999, "A Generalized Modal Analysis for Multi-stepped, Distributed-Parameter Rotor-Bearing Systems," *Trans. KSNVE*, Vol. 9, No. 3, pp. 525-534.

(8) Hong, S. W. and Park, J H., 1999, "Dynamic Analysis of Multi-stepped, Distributed Parameter Rotor-bearing Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 4, pp. 769~785.

(9) Cho, J. W., Kim, S. I., Lee, G. S. and Kim, C. B., 2000, "Development of a Static and Dynamic Characteristics Analysis System for Machine-Tool Spindle Systems with 3 Lobe Sliding Bearings," *J. of KSMTE*, Vol.9 , No. 4, pp. 99-107.

(10) SDS Co., 1996, *I-DEAS Design User's Guide*, SDS Co.