한국학교수학회논문집 제 9 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 9, Number 2, 195-208, June 2006

학생이 지닌 기하적 심상과 문제해결과정에서의 오류

도종훈[1)]

학생들은 개념과 관련된 여러 가지 기하적 표현 중에서 특정한 표현을 해당 개념의 형식적인 정의에 우선하는 기하적 심상으로 받아들이곤 한다. 학생이 지닌 기하적 심상과 개념의 형식적인 정의가 항상 조화를 이루지는 않으며, 이로 인해 문제해결과정에서 오류가 유발될 수 있다. 기하적 표현을 통한 학습이 중요한 비중을 차지하는 기하 영역에서는 이러한 학생들의 오류 및 오류의 원인을 체계적으로 분석할 필요가 있다. 본 연구에서는 학생이 지닌 특정한 기하적 심상으로 인해 발생하는 오류 사례의 분석을 통해 보다 일반적으로 학생들이 수학적 개념에 대하여 지니는 심상 및 심상과 관련한 오류의 유형을 개념적으로 분류하여 이론적 분석의 틀을 제안하고자 한다.

주요용어 : 개념, 기하적 표현, 기하적 심상, 오류

I. 서론

기하 영역의 교수-학습에서 교사들은 개념의 형식적인 정의나 성질에 대한 학생들의 이해를 돕기 위하여 여러 가지 기하적 표현을 동원한다. 기하적 표현은 기호-언어적 표현에 비해 개념의 정의나 성질을 쉽게 생각나게 해주는 장점을 지니고 있다(Freudenthal, 1978; Skemp, 1987). 학생들은 개념과 관련된 여러 가지 기하적 표현 중에서 특정한 표현을 해당 개념의 형식적인 정의에 우선하는 기하적 심상으로 받아들이곤 한다. Fischbein과 Nachlieli(1998)은 학생들이 예각삼각형의 경우에는 높이가 삼각형의 내부에 그려지므로 높이를 기하적으로 표현하는데 큰 어려움을 겪지 않지만 둔각삼각형일 경우에는 높이를 기하적으로 표현하는데 어려움을 겪는 현상을 관찰하고, 예각삼각형에서의 높이가 학생들의 높이에 대한 전형적인 기하적 심상인 반면, 둔각삼각형의 높이는 비전형적이라고 하였다. 학생들은 그밖에도 평행사변형, 직각삼각형 등의 개념에 대해서도 특정한 기하적 표현을 전형적인 심상으로 지니고 있는 것으로 나타났다.

학생이 지닌 심상과 개념의 형식적인 정의가 항상 조화를 이루지는 않으며, 이로 인해 이후 학습에서의 오개념 형성이나 문제해결과정에서의 오류 등과 같이 학생의 행동이 교사의 기대와는 다르게 나타날 수 있다([그림1]).

1) 한국교육과정평가원 (jhoondo@kice.re.kr 또는 djhn@dreamwiz.com)

[그림1] 교사의 기대와 학생의 행동

이는 학생들이 교사와는 서로 다른 수준에서 사고하며 용어나 대상을 교사나 교과서가 의도하는 것과는 다른 방식으로 이해한다는 것을 의미한다(Van Hiele, 1986). 실제로 학생들은 교과서에서 읽은 것 보다는 본 것을 믿는 경향이 있다. 예를 들어 학생들은 교과서에 제시된 사다리꼴의 정의를 말할 수는 있지만 한 각이 직각인 사다리꼴을 사다리꼴로 인식하지 못하기도 하고, 교과서에 흔히 제시되는 평행사변형과는 다른 직각을 지닌 평행사변형을 평행사변형으로 인식하지 못하기도 한다. 이는 교과서에 제시된 정의가 학생들이 심상으로 지니고 있는 사다리꼴이나 평행사변형에 대한 기하적 표현과 조화를 이루지 못하기 때문이라 볼 수 있다. 기하적 표현을 통한 학습이 중요한 비중을 차지하는 기하 영역에서는 이러한 학생들의 오류 및 오류의 원인을 체계적으로 분석할 필요가 있다.

본 연구에서는 학생이 지닌 특정한 기하적 심상으로 인해 발생되는 오류 사례의 분석을 통해 학생들이 지닌 심상과 관련한 오류 분석의 이론적 틀을 제안하고자 한다. 이를 위해 먼저 삼각형(높이), 평행사변형, (등변)사다리꼴 등의 기본 도형에 대하여 학생들이 지니고 있는 기하적 심상 중 모양과 위치(방향)에 따라 어떤 것들이 보다 전형적인 심상이고 어떤 것들이 보다 비전형적인 심상인지 분석한다. 이를 토대로 기본도형에 대한 학생들의 기하적 심상으로 인해 발생되는 넓이 측정 및 추론에서의 오류 사례를 분석하고 유형화한다. 기하적 심상과 관련된 오류 유형 분석으로부터 보다 넓게는 학생들이 수학적 개념에 대하여 가질 수 있는 심상 및 심상과 관련한 오류의 유형을 개념적으로 분류하여 이론적 분석의 틀을 제안한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

(1) 기본도형에 대하여 학생들은 어떤 기하적 표현을 전형적인 심상으로 지니고 있는가?

(2) 학생들이 지닌 기하적 심상은 이후 기하 문제해결 과정에서 어떤 오류를 유발하는가?

II. 이론적 배경

개념이란 특정한 사물, 사건이나 상징적인 대상들의 공통된 속성을 추상화하여 종합화한 보편적 관념으로서 개념을 학습한다는 것은 구체적으로 그 개념의 명칭(평행사변형), 정의(두 쌍의 대변이 평행한 사각형), 성질(대변의 길이가 같다), 그리고 본보기(평행사변형인 것과 아닌 것의 예를 듦)를 학습하는 것이라 할 수 있다(한국교육심리학회, 2001). 학령이 높아질수록 개념의 학습은 주로 언어와 의미에 의존하기 때문에 학생들이 이미 알고 있는 언어 및 경험을 사용하여 개념을 정의하거나 설명하는 것이 필요하다. 교사는 개념이 적용되는 범위를 예시하고 학생들로 하여금 개념에 대한 심상을 구성하도록 돕기 위하여 일상생활에서 쉽게 관찰하거나 경험할 수 있는 실물이나 사진 뿐 아니라 도형(그림), 기호, 다이어그램, 그래프 등과 같은 표현들을 이용하곤 하는데, 이들은 모두 그 개념을 설명하기 위한 다양한 방법으로서 교육적인 중요성을 지닌다고 하겠다.

심상은 자신의 경험과 인지 수준을 토대로 형성하는 개인적인 차원의 개념 형태로서 개인이 이전에 그 개념과 관련하여 경험한 특징을 자신의 기억 속에 추상화시킨 것이라 할 수 있다(한국교육심리학회, 2001). 심상과 관련하여 Freudenthal(1991)은 mental object, Dewey(1933)와 Hadamard(1945)는 mental image라는 표현을 사용하였으며, 이와 유사한 개념으로 Tall과 Vinner(1981)는 Concept image, Skemp(1987)는 Schema, Fischbein과 Nachlieli(1998), Alcock과 Simpson(2002)는 Prototype이라는 용어를 사용하였다. 특히 Freudenthal은 현상에 기초한 심상의 구성을 강조하였는데, 어떤 개념을 가르치기 위하여 그 개념에서 시작하여 해당 개념을 구체화하고 그와 관련된 자료를 살펴보는 방법 보다는 학습자로 하여금 가르치고자 하는 개념에 대한 심상을 구성할 수 있도록 해주는 현상을 먼저 살펴보아야 한다는 것이다. 만약 해당 연령의 학생들에게 이러한 현상이 유용하지 못하다면 그것은 심상의 구성이 어렵다는 것을 의미하고, 그렇다면 그 개념을 가르치려는 것은 쓸데없는 시도라는 것이다. 심상의 구성을 고려하지 않은 언어적 정의와 이를 통한 개념의 학습은 오개념 형성의 원인이 될 수 있으므로 새로운 개념의 학습에서는 먼저 전형적인 예를 통해 심상을 구성해나가는 활동이 강조될 필요가 있다(Freudenthal, 1978).

심상의 구성을 통해 형성된 개념은 형식적인 방법으로 재정의, 재개념화된다. 이 때 개념의 형식적인 정의는 그 개념을 정확히 설명하기 위해 사용하는 언어적 정의로서 학생이 지닌 그 개념에 대한 심상과는 차이가 있을 수 있다. 실제로 학생들은 개념의 형식적인 정의와는 다른 그 개념의 범주에 속하는 대상들 중 일부분이나 그 개념의 특정한 측면을 드러내는 특정한 표현을 심상으로 지니고 있는 경우가 많다(Alcock & Simpson, 2002; Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1998). 학생이 지닌 심상과 개념의 형식적인 정의 사이의 이러한 차이는 학생 개인의 정신적 미성숙이나 잘못된 경험에 기인하기도 하지만 교사와 교과서에 의해 제시되는 학습 경험이 특정한 예나 표현에 제한되어 있기 때문이기도 하다(Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1998; 이종희,이남숙, 1998). 그러므로 개념과 관련된 다양한 예와 표현이 학생들에게 제시될 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상

서울특별시 소재 S중학교 2학년 3개반 학생 114명의 지필 검사 결과를 토대로 기본도형에 대한 학생들의 기하적 심상을 분석하였다. 한편, 학교장, 담임교사, 학부모 추천 등의 1차 전형을 거쳐 소속 학교 대표로서 S대학교 과학영재교육원 수학분과 2차 지필 시험에 응시한 중학교 2학년 학생들의 오류 사례를 분석하였는데, 분석의 대상이 되는 학생들은 해당학교에서 수학적 능력이 가장 우수하다고 판단된 학생들이다. 수학적 능력이 뛰어난 학생들(현행 수학 교수-학습에서 성공한 것으로 판단되는 학생들)에 의한 오류 사례는 그들이 지닌 대표성을 감안할 때 교수-학습에 시사하는 바가 크다고 하겠다.

2. 자료의 수집 및 분석 방법

1) 기본도형에 대한 학생들의 기하적 심상 분석(연구문제1)

학생들이 지니는 기하적 심상은 해당 개념에 대한 다양한 표현 중에서 특정한 모양이 특정한 위치(방향)에 놓여 있는 표현에 국한되는 경우가 많은데, 이러한 표현을 그 개념의 전형적인 표현이라고 할 수 있다(Fischbein & Nachlieli, 1998).[2] 본 연구에서는 학생들이 기본도형에 대하여 어떤 기하적 표현을 전형적인 심상으로 지니고 있는지 알아보기 위해 다음과 같은 질문들로 구성된 지필 검사를 실시하였다.

1. 삼각형을 그리고, 높이를 표시해 보아라. 여러 개 생각나면 생각나는 순서대로 그려 보아라.
2. 평행사변형을 그리고, 높이를 표시해 보아라. 여러 개 생각나면 생각나는 순서대로 그려 보아라.
3. 사다리꼴을 그려 보아라. 여러 개 생각나면 생각나는 순서대로 그려 보아라.
4. 등변사다리꼴을 그려보아라. 여러 개 생각나면 생각나는 순서대로 그려 보아라.

앞서 언급한 바와 같이 학생들이 지닌 기하적 심상은 그 도형의 모양 및 도형이 놓여 있는 위치(방향)에 영향을 받는다. 우리는 학생들이 제시한 삼각형(높이), 평행사변형, 사다리꼴, 등변사다리꼴의 그림들을 각각 두 가지 모양과 두 가지 위치에 따라 모두 4가지의 경우로 분류하고([표1]), 어떤 기하적 표현이 학생들에게 보다 전형적인 심상으로 받아들여지는지 분석하였다.

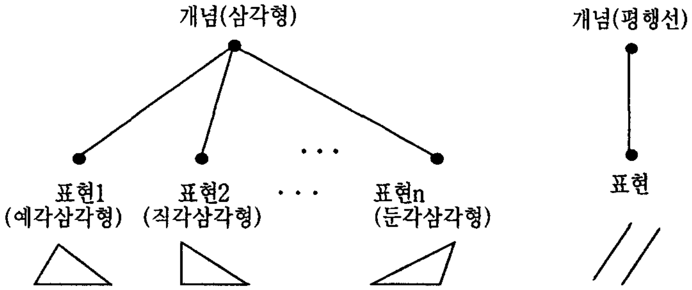
구분	모양	위치(방향)
삼각형	예각삼각형 모양인가 둔각삼각형 모양인가	지평선에 한 변이 놓여 있는가 지평선에 한 꼭지점만 놓여 있는가
평행사변형	교과서에 통상 제시되는 비스듬히 기울어진 모양인가 직사각형 모양인가	가로방향으로 길게 누워 있는가 세로 방향으로 길게 세워져 있는가
사다리꼴	한 쌍의 대변만 평행한가 두 쌍의 대변이 모두 평행한 모양(직사각형)인가	가로방향으로 길게 누워 있는가 세로 방향으로 길게 세워져 있는가
등변사다리꼴	한 쌍의 대변만 평행한가 두 쌍의 대변이 모두 평행한 모양(직사각형)인가	가로방향으로 길게 누워 있는가 세로 방향으로 길게 세워져 있는가

[표1] 모양과 위치에 따른 기본도형 분류

2) 여기서 전형적이라는 것은 교사나 교과서에 제시되는 빈도와 그것을 심상으로 가지는 학생 수의 측면에서 전형적이라는 의미이다. 모든 학생들이 전형적인 표현을 심상으로 가진다고 볼 수는 없다.

2) 기하적 심상과 관련된 오류사례 분석(연구문제2)

학교수학에 등장하는 수학적 개념들 중 어떤 개념의 경우에는 그 개념에 대한 기하적 표현이 다양하게 존재하지만, 또 어떤 개념의 경우에는 그에 대한 기하적 표현이 거의 유일한 경우도 있다. 예를 들어 삼각형에 대한 기하적 표현은 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형 등 다양할 수 있지만 평행한 두 직선에 대한 기하적 표현은 나란하게 그려진 두 직선 이외에 다른 것을 생각하기 어렵다([그림2]). 이러한 기하적 표현들은 개념이 형성되는 단계에서 학습자의 심상을 구성하면서 개념 이해를 돕기도 하지만 이후 학습이나 문제해결과정에서 오류를 유발하기도 한다.



[그림2] 수학적 개념에 대한 기하적 표현의 유형

예를 들어 평행사변형의 높이에 대하여 대각선이나 한 변을 기하적 심상으로 지니고 있는 학생은 평행사변형의 넓이를 한 변의 길이와 대각선 길이의 곱으로 계산하거나 인접한 두 변의 길이의 곱으로 잘못 계산할 수 있다. 이처럼 부적절한(Improper) 기하적(Geometric) 표현을 심상으로 지니고 있을 경우에 오류가 발생할 수 있는데, 본 연구에서는 이러한 오류를 GI형 오류라고 할 것이다.

학생이 지닌 심상이 해당 개념에 대한 여러 가지 기하적 표현들 중 특정한(Certain) 하나의 표현에 국한될 경우에도 오류가 발생할 수 있는데, 우리는 이러한 오류를 GC형 오류라고 부를 것이다. GC형 오류는 다시 두 가지 경우로 구분될 수 있는데, 하나는 자신이 지닌 심상에 해당하지 않는 기하적 표현에 대한 부적응으로 인한 오류(GC1형 오류)이고, 다른 하나는 학습자가 자신이 심상으로 지니고 있는 특정한 기하적 표현에 근거해 제한된 추론을 함으로써 발생하는 오류(GC2형 오류)이다. 예를 들어, 삼각형 내부에 그려진 높이를 삼각형 높이에 대한 기하적 심상으로 지니고 있는 학생이 삼각형 외부에 그려진 높이처럼 자신이 심상으로 지니고 있는 것과는 다른 기하적 표현을 이용하는 문제 상황에 적응하지 못할 수 있으며, 직사각형이 아닌 모양의 특정한 사다리꼴 그림을 사다리꼴에 대한 기하적 심상으로 지니고 있는 학생이 그와 관련한 추론의 근거를 자신이 지닌 기하적 심상에 둠으로써 보다 일반적인 추론을 전개하지 못할 수 있다.

한편, 적절한 기하적 표현을 심상으로 지니고 있고 그 표현 이외의 다른 심상을 생각하기 어렵지만 개념이 새롭게 정의되거나 확장되는 상황에 적응하지 못할 경우에 오류가 발생할 수 있다. 예를 들어, 뺄셈에 대하여 물건의 개수, 온도, 이익과 손해 등 무엇인가를 줄이는 상황을 심상으로 지니고 있던 초등학생이 음수의 뺄셈에 적응하지 못할 수 있다(Vinner & Dreyfus, 1989). 우리는 이러한 오류를 GU형 오류라고 할 것이다.

본 연구에서는 학생들에게서 관찰된 오류 사례들이 특정 개념에 대하여 학생들이 심상으로 지니고 있는 기하적 표현에 의해 유발된 것으로 간주하고, 이들을 GC1형 오류, GC2형

오류, GU형 오류, 그리고 GI형 오류의 4가지 경우로 나누어 분석하였다([표2]).

심상이 개념의 여러 표현들 중 특정한 하나의 표현에 국한(C)		개념의 확장이나 재정의(U)	부적절한 심상(I)
부적응(C1)	제한된 추론(C2)		
GC1	GC2	GU	GI

[표2] 학생이 지닌 기하적 심상과 관련된 오류 유형 분류

Ⅳ. 연구 내용 및 결과

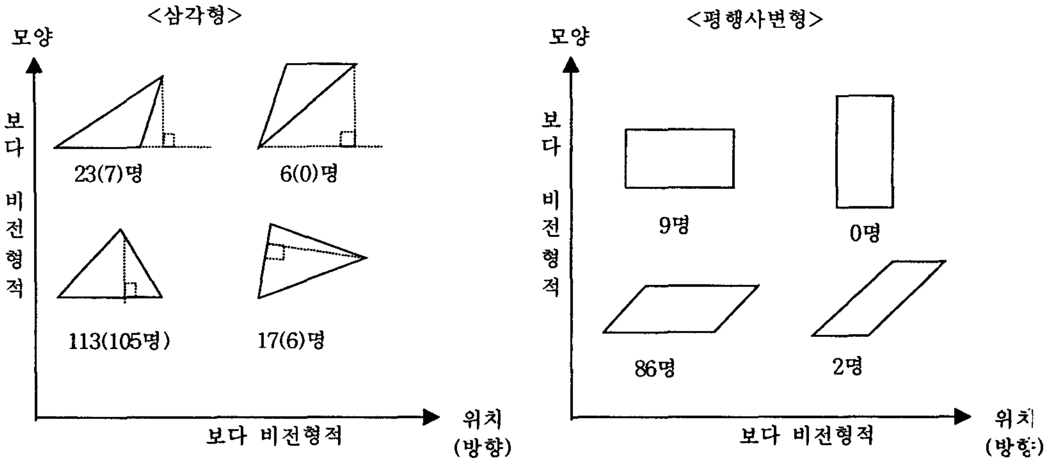
1. 기본 도형에 대한 학생들의 기하적 심상

삼각형과 평행사변형에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과(그림3) 113명의 학생들이 지평선 위에 한 변이 놓여있는 예각삼각형 그림을 제시한 반면 둔각삼각형이면서 지평선 위에 한 꼭지점이 놓여 있는 그림을 제시한 학생은 6명이었다. 삼각형의 높이에 대해서는 105명의 학생들이 지평선 위에 한 변이 놓여있는 예각삼각형의 내부에 높이를 표시한 반면 삼각형 외부에 높이를 표시한 학생은 전체 학생 중 7명밖에 되지 않았다. 특히 둔각삼각형이면서 지평선 위에 한 변이 놓여 있지 않은 삼각형 외부에 높이를 표시한 학생은 한 명도 없었다. 평행사변형의 경우 88명의 학생들이 교과서에 통상 제시되는 직사각형이 아닌 평행사변형 그림을 제시한 반면 직사각형 모양의 그림을 제시한 학생은 9명이었고 세로의 길이가 긴 직사각형 모양의 그림을 제시한 학생은 한 명도 없었다.[3]

이는 학생들이 모양 면에서는 둔각삼각형보다 예각삼각형을, 위치(방향) 면에서는 지평선에 한 변이 놓여 있는 삼각형을 그렇지 않은 삼각형보다 전형적인 심상으로 지니고 있음을 의미한다.[4] 평행사변형의 경우에는 교과서에 통상 제시되는 비스듬히 기울어진 평행사변형이 모양 면에서 직사각형보다 전형적이고, 위치(방향) 면에서는 가로 방향으로 길게 누운 평행사변형이 세로 방향으로 길게 서 있는 평행사변형보다 전형적임을 알 수 있다. 또한 도형의 내부에 그려진 높이가 외부에 그려진 높이보다 전형적임을 알 수 있다.

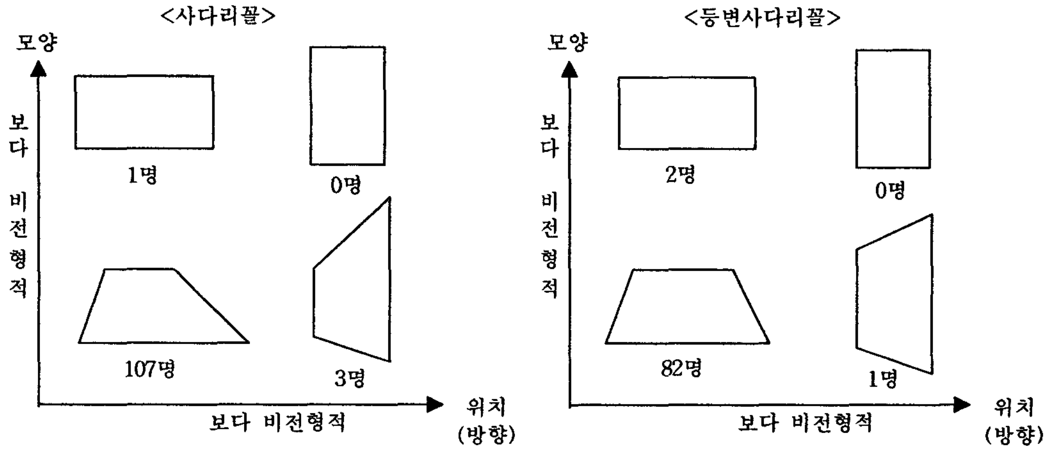
한편, (등변)사다리꼴에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과([그림4]) 사다리꼴에 대하여 110명의 학생들이 한 쌍의 대변만 평행한 사다리꼴 그림을 제시한 반면 두 쌍의 대변이 모두 평행한 사다리꼴(직사각형) 그림을 제시한 학생은 한 명밖에 되지 않았다. 특히 세로 방향으로 길게 선 모양의 사다리꼴을 제시한 학생은 3명에 불과하였다.[5] 등변사다리꼴에 대하여 학생들이 지닌 기하적 심상 역시 이와 유사함을 [그림4]를 통해 알 수 있다.

3) 평행사변형과 관련한 질문에 대하여 17명이 응답하지 않았다. 그리고 대각선과 한 변의 길이를 평행사변형의 높이로 제시한 학생이 각각 7명과 8명이었다.
4) 그 밖에도 114명의 학생들 중에서 59명이 특정한 삼각형인 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형 그림을 제시하였다.
5) 사다리꼴과 등변사다리꼴 질문에 대한 무응답 자 수는 각각 6명, 33명이었다.



[그림3] 삼각형(높이)과 평행사변형에 대한 기하적 심상 분석

이는 모양 면에서 한 쌍의 대변만 평행한 (등변)사다리꼴이 두 쌍의 대변이 모두 평행한 (등변)사다리꼴(직사각형)보다 전형적이고, 위치(방향) 면에서는 아래, 위의 두 변이 평행한 사다리꼴이 좌, 우의 두 변이 평행한 사다리꼴보다 전형적임을 알 수 있다.



[그림4] 사다리꼴 및 등변사다리꼴에 대한 기하적 심상 분석

2. 기하적 심상과 관련한 오류 사례

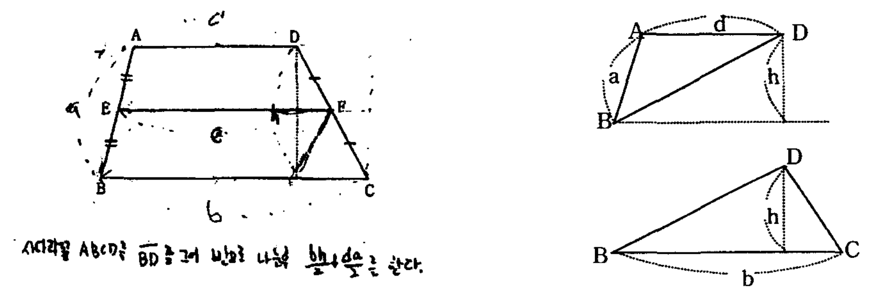
1) GC형 오류

앞서 언급한 바와 같이 학생들이 지니는 기하적 심상은 해당 개념에 대한 다양한 기하적 표현 중에서 특정한 모양이 특정한 위치(방향)에 놓여 있는 표현에 국한되는 경우가 많으며,

이는 Ⅳ장 1절의 분석 결과를 통해서도 확인할 수 있다. 이처럼 여러 가지 기하적 표현들 중 특정한 하나의 표현을 기하적 심상으로 지닌 학생의 사고가 그 개념의 형식적인 정의나 수학적 아이디어에 우선하고 조화되지 못할 경우 발생할 수 있는 오류가 GC형 오류이다.

(1) GC1형 오류

주어진 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하는 문제(부록의 문항1)에 대하여 어떤 학생이 [그림5]와 같은 답을 제시하였다. 이 학생은 주어진 사다리꼴을 두 개의 삼각형 ABD와 BCD로 나누어 각각의 넓이를 계산하였는데, 예각삼각형 BCD의 넓이는 제대로 구하였지만 둔각삼각형 ABD의 넓이 계산과정에서 오류가 발생하였다. 예각삼각형 BCD의 경우 한 변이 지평선 위에 놓여 있을 뿐 아니라 높이가 삼각형의 내부에 그려져 있음에 비해 삼각형 ABD는 둔각삼각형이고 한 변이 지평선 위에 놓여 있지 않을 뿐 아니라 높이가 삼각형의 외부에 그려져 있다. 우리는 Ⅳ장 1절의 분석을 통해 이러한 형태의 기하적 표현이 학생들에게는 매우 비전형적인 심상임을 확인한 바 있다. 이 학생은 삼각형 높이에 대하여 예각삼각형의 높이를 기하적 심상으로 지니고 있으며, 자신의 심상과는 다른 모양과 위치(방향)의 둔각삼각형 높이를 이용하여 넓이를 구해야 하는 문제 상황에 적절하게 적응하지 못하였음을 알 수 있다.



[그림5] GC1형 오류 사례

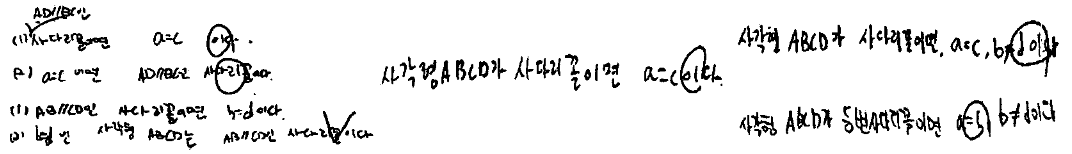
(2) GC2형 오류

기하적 표현은 학생이 도형의 개념을 형성할 때 뿐 아니라 이후 도형의 성질을 분석하여 언어화하고 추론을 전개할 때에도 영향을 미칠 수 있다. 아래에 제시된 [그림6]은 사각형의 종류와 대각선에 의해 분할된 4개 삼각형의 넓이 사이의 관계를 추측하는 문제(부록의 문항 2)에 대한 학생들의 응답 일부를 예시한 것이다.

[그림6]에 제시된 응답들 모두 유사한 형태의 명제를 나타내고 있지만 (a)를 제시한 학생의 경우 모양과 위치(방향) 면에서 가능한 4가지 형태의 사다리꼴을 모두 고려하고 있음에 비해 (b)와 (c)를 제시한 학생들은 모양과 위치(방향) 면에서 특정한 형태의 사다리꼴에 대한 성질을 추론하고 있음을 알 수 있다.

(b)를 제시한 학생의 경우 모양 면에서는 두 가지 모양의 사다리꼴을 모두 고려하고 있지만 위치(방향) 면에서 AD//BC인 사다리꼴을 기반으로 성질을 추론하고 있으며 AB//DC인 사다리꼴은 미처 고려하지 못하였음을 알 수 있다. (c)를 제시한 학생의 경우 모양 면에서 한 쌍의 대변만 평행하고 위치(방향) 면에서는 위, 아래의 두변이 평행한 형태의 특정한 사

다리꼴에 근거해 추론을 전개하고 있으며 다른 모양과 위치의 사다리꼴은 고려하고 있지 못하고 있음을 알 수 있다. 이는 (등변)사다리꼴에 대하여 학생들이 지니고 있는 기하적 심상이 (b)의 경우 위치 면에서 위, 아래의 두 변이 평행한 사다리꼴이고 (c)의 경우 위치 면에서 위, 아래의 두 변이 평행하면서 모양 면에서는 한 쌍의 대변만 평행한 (등변)사다리꼴임을 의미하며, 추론의 근거를 (등변)사다리꼴의 정의가 아닌 자신이 지닌 특정한 기하적 심상에 두고 있음을 알 수 있다.

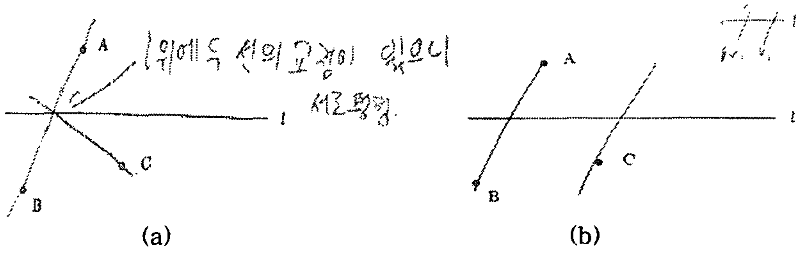


(a) 오류 사례 (b) 오류 사례 (c)

[그림6] GC2형 오류 사례

2) GU형 오류

GC형의 오류가 개념에 대한 여러 가지 기하적 표현 중 특정한 것을 학생들이 심상으로 지닐 경우에 발생하는 오류인데 비하여 GU형의 오류는 개념에 대한 학생의 기하적 심상이 그것 이외에는 다른 것을 생각하기 어려움에도 불구하고 발생할 수 있는 오류의 유형이다. 개념에 대한 심상이 너무나 명확하여 학생의 사고에 고착되면, 그 개념이 새로운 방식으로 정의되거나 확장될 경우 학생의 사고가 그 상황에 적응하지 못할 수 있다. 이 때 학생이 지닌 심상은 새로운 상황에 적응하기 위해 학습자가 극복해야 할 고정된 사고방식이 된다(최영기,도종훈, 2005). 평행한 두 직선에 대한 개념의 재정의와 관련한 문제(부록의 문항3)에 대하여 어떤 학생이 [그림7]과 같은 답을 제시하였다. 통상 평면에서 교점을 갖지 않는 두 직선은 서로 평행하다고 정의되며, 학생들은 이에 대하여 간격이 일정한 두 직선을 심상으로 지니고 있다. 서로 평행한 두 직선에 대한 심상은 새롭게 정의된 평행한 두 직선의 개념 이해를 방해하는 요인이 될 수 있다. (a)를 제시한 학생과는 달리 (b)를 제시한 학생의 경우 기존에 지니고 있던 평행한 두 직선에 대한 기하적 심상 즉, 고정된 사고방식을 극복하지 못하고 문제해결에 실패하였음을 알 수 있다.

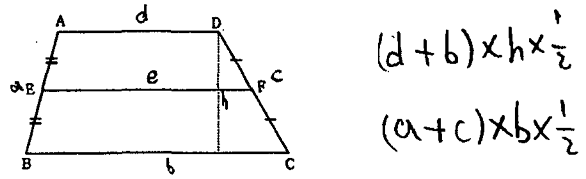


(a) (b)

[그림7] GU형 오류 사례

3) GI형 오류

주어진 사다리꼴의 넓이를 구하는 문제(부록의 문항1)에 대하여 어떤 학생이 [그림8]과 같은 답을 제시하였다. 올바른 답을 제시한 것으로 보아 이 학생은 사다리꼴 넓이에 대한 기호-언어적 심상은 지니고 있지만 그와 관련한 적절한 기하적 심상을 지니지 못하고 있음을 알 수 있다. 즉, 공식을 암기하고는 있지만 공식이 의미하는 바를 기하적으로 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다.



[그림8] GI형 오류 사례

V. 논의

분석 결과 학생들은 특정한 모양과 위치(방향)의 그림을 기본도형에 대한 기하적 심상으로 지니고 있는 것으로 나타났다. 이에 대한 원인으로 교사나 교과서가 제시하는 표현 및 경험의 제한성을 들 수 있겠지만,[6] 학생이 특정한 표현을 심상으로 지니는 것 자체가 문제가 되는 것은 아니다. 문제는 학생이 지닌 심상이 해당 개념의 형식적인 정의와 조화를 이루지 못할 때에 발생한다. 우리는 오류 사례의 분석을 통해 학생들이 지닌 기하적 심상과 관련한 오류 유형을 GI형, GC1형, GC2형, 그리고 GU형의 4가지로 분류하였다. 이러한 분석틀은 보다 일반적으로 수학적 개념에 대하여 학생들이 지니는 심상과 관련한 오류 유형 분석에도 적용가능하리라 판단된다.

학교수학에 제시되는 각종 수학적 개념은 수학적인 아이디어와 더불어 그 속에 일상적인 의미를 내포하고 있는 경우가 많으며 단일한 개념이 다양한 표현을 지니는 경우 또한 종종 발견할 수 있다. 수학적 개념을 올바로 이해하기 위해서는 그 개념이 지닌 수학적 아이디어, 일상적 의미, 다양한 표현 및 이들 사이의 상호관련성을 파악할 필요가 있다. 도종훈과 최영기(2003)는 수학적 개념의 분석과 이해를 위해 수학적 아이디어, 일상적 의미, 표현 그리고 이들 사이의 관계들로 특징 지워지는 수학적 개념 분석 모형을 제안한바 있다. 수학적 개념 분석 모형의 관점에서 볼 때 학습자가 형성하는 심상의 유형은 크게 해당 개념과 관련된 일상적 의미로서의 일상경험적 심상(O)과 해당 개념에 대한 다양한 표현으로서의 심상으로 구분될 수 있고, 표현으로서의 심상은 다시 그림, 다이어그램, 그래프 등과 같은 기하적 표현으로서의 기하적 심상(G)과 수학 기호나 문자, 대수식 등과 같은 기호-언어적 표현으로서의 기호-언어적 심상(A)으로 구분될 수 있을 것이다([표3]).[7]

6) 실제로 학생들 뿐 아니라 교사들도 개념에 대하여 특정한 기하적 표현을 심상으로 지니고 있으며 더구나 교사와 학생이 지닌 심상의 유형이 유사한 경우도 많다(이종희,이남숙, 1998).

7) 일상경험적 심상에 대하여 영단어 'Ordinary'의 첫 글자인 'O'를 약어로 사용하였고, 표현으로서의 심상 중 기하적 심상에 대하여 'Geometric'의 첫 글자인 'G'를 약어로 사용하였으며, 표현으로서의 심상 중 기호-언어적 심상에 대하여 'Algebraic'의 첫 글자인 'A'를 약어로 사용하였다.

유형	구체적인 형태
기하적 심상(G)	개념에 대한 기하적 표현 즉, 도형(그림), 다이어그램, 그래프 등
기호-언어적 심상(A)	개념에 대한 기호-언어적 표현 즉, 문자, 기호, 언어, 대수식 등
일상경험적 심상(O)	개념과 관련한 일상적 의미 즉, 일상경험에서 친숙한 대상이나 상황 등

[표3] 수학적 개념 분석 모형에 따른 심상의 유형

예를 들어 어떤 학생이 자연수 1이나 분수 $\frac{1}{3}$을 생각했을 때 머리 속에 접시 위에 놓인 한 개의 사과나 세 조각으로 등분된 사과가 떠오른다면, 이들은 각각 자연수 1과 분수 $\frac{1}{3}$에 대한 일상적 의미로서 그 학생에게는 각 수에 대한 일상경험적 심상의 역할을 한다고 볼 수 있다. 한편, 2의 양의 제곱근이라는 수학적 개념에 대하여 학생들은 $x^2=2$나 $\sqrt{2}$와 같은 기호-언어적 표현을 심상으로 지니기도 하고, 대각선이 그려진 정사각형이나 직각이등변삼각형과 같은 기하적 표현을 심상으로 지니기도 하며 두 가지의 표현을 혼합한 형태의 심상 - 예를 들면 각 변의 길이가 표시된 직각이등변삼각형 그림 - 을 지니기도 한다.

앞서 언급한 바와 같이 심상은 개념이 형성되는 단계에서 학습자의 개념 이해를 돕기도 하지만 이후 학습이나 문제해결과정에서 오류를 유발하기도 한다. [표3]에 제시된 각각의 심상의 유형 G, A, O에 대하여 학습자가 수학적 개념에 대한 부적절한 심상을 갖고 있는 경우(I), 적절한 심상을 갖고 있지만 그것이 해당 개념에 대한 여러 가지 표현들 중 특정한 하나의 표현에 국한되어(C) 자신이 지닌 심상에 해당하지 않는 표현에 적응하지 못하거나(C1) 자신이 심상으로 지니고 있는 특정한 표현에 근거해 제한된 추론을 하는 경우(C2), 그리고 적절한 표현을 심상으로 갖고 있고 그 이외의 다른 심상을 생각하기 어렵지만 개념이 새롭게 정의되거나 확장되는 상황에 적응하지 못하는 경우(U)에 오류가 발생할 수 있으며, 이를 <표4>와 같이 유형화하여 정리할 수 있다.

분류 기준	심상이 개념의 여러 표현들 중 특정한 하나의 표현에 국한(C)		개념의 확장이나 재정의(U)	부적절한 심상(I)
	부적응(C1)	제한된 추론(C2)		
G	GC1	GC2	GU	GI
A	AC1	AC2	AU	AI
O	OC1	OC2	OU	OI

[표4] 심상과 관련된 오류 유형

수학의 교수-학습에서 기본 개념에 대한 이해는 필수적이며, 교사는 학생들이 개념을 어

떻게 이해하고 있는지 명료하게 파악할 필요가 있다. 교사는 학생들이 개념에 대하여 어떤 심상을 지니고 있는지를 파악하고 학생들에게서 나타나는 오개념이나 오류 사례를 분석하여 교수-학습에 반영할 수 있어야 할 것이다. [표4]에 제시된 심상과 관련한 오류 유형들은 이를 위한 하나의 이론적 분석틀이 될 수 있으리라 판단된다.

참고문헌

도종훈, 최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. 수학교육 42(5). 한국수학교육학회.

이종희, 이남숙 (1998). 기하영역에서 개념 이미지에 관한 연구. 교과교육학연구 2(1). 이화여자대학교 교과교육연구소.

최영기, 도종훈 (2005). 수학적 사고의 유연성과 확산적 사고. 수학교육 44(1). 한국수학교육학회.

한국교육심리학회 (2001). 교육심리학 용어사전. 학지사.

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions : Dealing with categories mathematically. *For the learning of mathematics* 22(2), 28-34.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston : Heath.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International journal of science education* 20(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing : preface to a science of mathematical education*. Dordrecht : D.Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind : the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Skemp, R.R./황우형 역 (1987). 수학학습심리학. 사이언스북스.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. Academic press, Inc.

Vinner, S. & Dreyfus, T.(1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), 356-366.

Error analysis related to a learner's geometrical concept image in mathematical problem solving

Do, Jong Hoon[8)]

Abstract

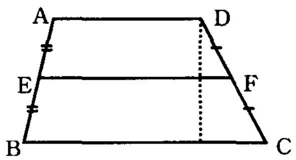
Among different geometrical representations of a mathematical concept, learners are likely to form their geometrical concept image of the given concept based on a specific one. A learner's image is not always in accord with the definition of a concept. This can induce his or her errors in mathematical problem solving. We need to analyse types of such errors and the cause of the errors. In this study, we analyse learners' geometrical concept images for geometrical concepts and errors related to such images. Furthermore we propose a theoretical framework for error analysis related to a learner's concept image for a general mathematical concept in mathematical problem solving.

Key Words : Concept, Geometrical representation, Geometrical concept image, Error

8) Korea Institute of Curriculum and Evaluation (jhoondo@kice.re.kr or djhn@dreamwiz.com)

부록

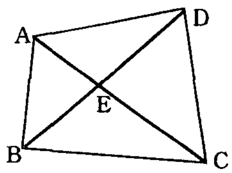
[문항1] $\overline{AD} // \overline{BC}$, $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ 인 사다리꼴 ABCD의 두 변 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점 E,F를 이은 선분의 길이를 $\overline{EF}=e$, 높이를 h라고 하자. 사다리꼴 ABCD의 넓이를 a, b, c, d, e, h를 이용하여 나타내어라. 다른 문자는 사용할 수 없다. 가능한 한 다양하고 다른 학생들이 생각해내지 못할 방법으로 나타내어라.



[문항2] 두 대각선의 교점이 E인 사각형 ABCD에 대하여, 삼각형 EAB, EBC, ECD, EDA의 넓이를 각각 a, b, c, d 라고 하자. 아래와 같은 두 가지 형태의 성질을 모두 써라. 가능한 한 다양하고 다른 학생들이 생각해내지 못할 성질을 쓰도록 노력하라.

(1) 사각형 ABCD가 (사각형의 종류)이면, (a, b, c, d 사이의 관계식)이다.

(2) (a, b, c, d 사이의 관계식)이면, 사각형 ABCD는 (사각형의 종류)이다.



[문항3] 평면상에 l이 아닌 두 직선 m, n이 서로 평행하다는 것을 다음과 같이 약속하자.

[약속] 두 직선 m, n 의 교점이 l 위에 있을 때 m, n은 서로 평행하다.

위 약속에 따라, 다음 그림에서 두 점 A, B를 지나는 직선을 그리고, 점 C를 지나 이 직선에 평행한 직선을 그려라.