

하중고 효과를 고려한 일단 변단면보의 탄성좌굴강도식 개발

박종섭^{1*}

Elastic Lateral Buckling Strength of Singly Stepped Beams with Load Height Effect

Jong Sup Park^{1*}

요약 본 연구에서는 비지지 길이 한쪽 단에 계단식 단면 변화를 가지는 보에 대해 횡-비틀림 좌굴 강도를 합리적으로 산정하기 위한 새로운 모멘트구배 수정계수를 개발, 제안하였다. 새로운 모멘트구배 수정계수식을 개발하기 위하여 유한요소해석 프로그램이 활용되었으며, 제안식은 기존에 발표된 식들과 비교·분석되었다. 구조물에 발생가능한 대부분의 하중조건이 본 연구에 고려되었으며, 본 논문을 통해 제안된 새로운 모멘트구배 수정계수식은 건물과 교량의 설계 및 유지관리 기술자들이 간편하고 경제적인 설계를 유도하는 데 크게 기여할 것이다.

핵심용어 : 횡-비틀림 좌굴, 보 설계, 모멘트구배 수정계수

Abstract New design equations for calculating the lateral-torsional buckling moment resistances of singly stepped I-section beams subjected to general loading on the top flange are suggested based on the investigations of elastic finite-element analyses. The new equations presented in this study are compared with current moment gradient modifiers presented by other researchers and specifications. The study considered almost loading cases on buildings and bridges. The proposed equations should be easily used to calculate the lateral-torsional buckling moment resistance of stepped I-beams.

Key Words : lateral-torsional buckling, beam design, moment gradient correction factor

1. 서론

연속 경간을 가지는 I형강을 교량에 적용시, 경제적인 단면 활용을 위하여 부 모멘트가 크게 발생하는 내부 지점부에 휨강성을 증가시키고자 일시적인 단면증대의 변화를 주고 있다. 이러한 일시적인 단면변화를 가지는 보를 계단식 단면변화 보(Stepped Beam)라 불리고 있다. 일반적으로 적용되는 계단식 단면 변화보의 형식으로는 일정한 크기의 복부판에 플랜지의 폭과 두께를 증가시켜 단면 휨강성의 증가를 유도하는 것이다. AISC-LRFD 시방서[1]를 살펴보면, 현재 간편하게 널리 사용되고 있는 계단식 단면변화 보에 대한 구체적인 설계규정은 제시하고 있지 않다. 또한, AASHTO -LRFD 시방서[2]와 도로 교표준시방서-하중저항계수설계법[3]에서도 계단식 단면 변화보에 대해 자세히 거론하고 있지 않다.

Timoshenko와 Gere[4]의 제안을 근간으로 하여 AISC-LRFD 시방서[1]는 I형 부재의 횡-비틀림 좌굴 저항모멘트를 다음의 식을 이용하여 계산하도록 제안하고 있다.

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 I_y C_w} = C_b M_{ocr} \quad (1)$$

여기에서 C_b 는 모멘트구배 수정계수; L_b 는 수평 브레이싱간 거리; E 는 탄성계수; G 는 전단탄성계수; J 는 비틀림상수; I_y 는 y 축에 대한 단면 2차모멘트; C_w 는 뒤틀림상수이다. 식(1)에서 C_b 를 제외한 나머지 식은 양단이 단순 지지되어 비지지 경간내 균일한 모멘트가 작용하는 I형 보의 탄성 횡-비틀림 좌굴 저항모멘트(M_{ocr})이다.

C_b 계수는 비지지 길이내 모멘트 변화에 따른 영향을 고려하기 위한 계수로서, AISC-LRFD 시방서[1]는 Kirby와 Nethercot[5]이 제안한 다음의 식을 적용하여 비

¹상명대학교 공과대학 토목환경공학부

*교신저자 : 박종섭(jonpark@smu.ac.kr)

지지 길이내 하중이 작용하는 경우를 고려하고 있다

$$C_b = \frac{12.5M_{max}}{2.5M_{max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (2)$$

여기에서 M_{max} 는 비지지 구간내 발생 최대모멘트; M_A 는 1/4 지점의 모멘트; M_B 는 부재 경간 중앙의 모멘트; M_C 는 3/4 지점의 모멘트이다. 식(2)는 정, 부 모멘트에 관계 없이 절대치 값을 사용하여 C_b 값을 계산한다. 식(2)는 양단이 단순 지지된 이축 대칭 단면을 가지는 부재의 중앙 높이에 하중이 작용할 때에 비교적 정확하게 사용될 수 있다. 만약 하중 작용위치가 바뀌거나(하중고 효과), 단면의 형상이 비지지 길이 내에서 변화된다면(변단면 보), 식(2)는 정확한 값을 나타내지 못할 것이다.

Nethercot과 Rockey[6]는 A와 B 상수를 제안하여 하중고 효과를 고려하는 모멘트구배 수정계수식을 아래식과 표1과 같이 제안하였다.

상부플랜지 하중 작용: $C = A/B = C_b/B$
 전단중심에 하중 작용: $C = A = C_b$ (3)
 하부플랜지 하중 작용: $C = AB = C_bB$

여기서 A는 식(2)를 통해 구할 수 있으며, 상수 B의 $W = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}}$ 이다. 식(3)에서 나타낸 바와 같이 상부플랜지에 하중이 작용 할 때, 모멘트구배 수정계수는 작은 값을 나타내고, 식(1)의 횡-비틀림좌굴 저항강도가 작게 나오게 된다. 반대로, 하부플랜지에 하중이 작용하는 경우에는 횡-비틀림 좌굴 저항강도가 커지게 된다. Nethercot과 Rockey[6]의 제안은 몇 가지 중요 하중 경우에 대해 모멘트구배 수정계수를 제안하고 있다. 또한,

Helwig 등[7]은 하중고 효과를 고려하여 단순 지지된 I형 보의 간편한 모멘트구배 수정계수식을 아래와 같이 제안하였다.

$$C_b^* = 1.4^{2y/h} C_b \quad (4)$$

여기에서 h =보의 높이, y =보의 중앙에서 하중 작용 위치까지의 거리이다. 상부플랜지 방향으로 y 는 (-), 하부플랜지 방향으로 (+)이다. 이 제안식은 식(3)를 단순화시켜 설계자들이 쉽게 적용할 수 있도록 하였다. Helwig 등[7]은 같은 논문에서 일축대칭 단면에 대해서도 새로운 식을 제안하고 있으나 경간에 따라 변단면을 가지는 경우에 대해서는 거론하고 있지 않다.

Trahair[8]은 비지지 길이 내 경간 중앙에서 계단식 단면변화를 가지는 I형 보의 경우에 대해 다음의 간략식을 제안한 바 있다.

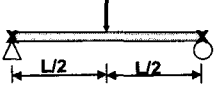

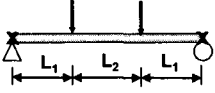

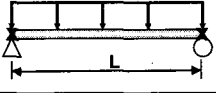

$$M_{st} = \alpha_{st} M_{yz} = [1 - 2.4 \alpha (1 - \beta \gamma)] M_{yz} \quad (5)$$

여기에서 M_{yz} 는 식(1)에서 C_b 을 제외하고 얻어지는 값(M_{ocr})이며, α, β, γ 는 계단식 단면보의 단면상수이다. 식(5)는 간략식으로 연속경간 교량에 많이 적용되는 비지지 구간 끝단에 스텝보 형식을 가지는 경우에는 많은 차이를 보인다.

박종섭 등[9]은 비지지 구간 한쪽 단에 계단식 단면변화를 가지며 순수 휨이 작용하는 부재의 횡-비틀림 좌굴 강도를 산정하기 위해 다음과 같은 식을 제안하였다.

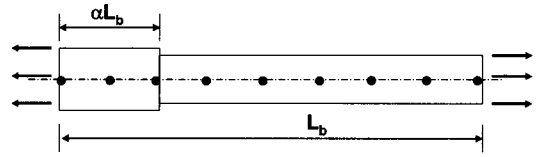
$$M_{ost} = C_{st} M_{ocr} = [1 + 1.5 \alpha^{1.6} (\beta \gamma^{1.2} - 1)] M_{ocr} \quad (6)$$

표 1. 하중고 효과 고려를 위한 상수 A와 B

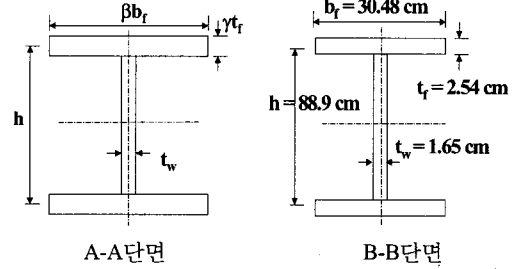
하중종류	모멘트선도	A 상수	B 상수
		1.35	$1 + 0.649W - 0.18W^2$
		$1 + (\frac{L_1}{L})^2$	$1 + 1.636W - 0.465W^2$
		1.12	$1 + 0.535W - 0.154W^2$

여기에서 α, β, γ 는 계단식 단면보의 단면상수이다. 또한, 박종섭 등[10]은 선형적인 모멘트 구배가 작용하는 경우의 수정계수식을 식(2)와 식(6)를 응용하여 제안한바 있다.

본 논문에서는 기존 연구를 토대로 하여 비지지 길이 내 한쪽 단이 계단식 단면 변화를 가지는 보에 다양한 형식의 하중들이 상부플랜지에 작용하는 경우를 고려하여 새로운 모멘트구배 수정계수식을 제안하고자 한다. 제안된 식은 유한요소해석 프로그램을 통해 얻어진 값을 토대로, 수치·통계 프로그램인 MINITAB을 이용하여 초기 추정식을 찾아내고, 간편하게 설계자들이 사용할 수 있도록 제안식을 수정하여 본 논문에 제시하였다. 새로운 제안식과 기존식의 비교 또한 본 논문에 고찰되었으며, 예제를 통해 적용성에 대해 기술하고 있다.



(b) 평면도



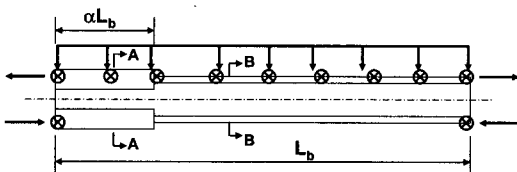
(c) 단면도

그림 1. 유한요소모델 및 단면상수 정의

2. 유한요소해석 모델링

유한요소해석 프로그램 MSC/NASTRAN[11]과 그래픽 프로그램인 MSC/PATRAN[12]이 본 연구의 탄성 좌굴비틀림 좌굴 해석에 사용되었다. 사용된 유한요소모델은 CQUAD4 3D요소이다. 힌지와 롤러 조건으로 구성되는 단순보 경계조건을 구현하고자, 순수 휨이 비지지 길이 내에 작용할 때, 식(1)을 이용하여 계산된 값과 일치하는 유한요소 모델의 양단 경계조건을 시행착오법으로 구현하였다.

작용하중은 3D 유한요소모델의 경계조건과 부합하며, 국부좌굴을 유발하지 않도록 양단의 플랜지에 그림1과 같이, 여러 개의 집중하중을 통해 Couple Moment로 작용시켰으며, 집중하중, 등분포하중, 및 여러 집중하중이 양단의 모멘트와 조합을 이루며 상부플랜지에 작용되었다. 그림1(c)는 본 해석에 사용된 표준단면과 스텝보 변수 (α, β, γ)를 정의하고 있다. 해석에 사용된 표준 단면은 일반 교량에 많이 적용되는 보를 토대로 결정되었다.



(a) 정면도

단면 변수의 해석 범위는 가설된 교량 사례를 토대로 $\alpha=0\sim 1/2$, $\beta=1\sim 1.4$, $\gamma=1\sim 1.8$ 로 결정하였으며, 그 범위 내 α, β, γ 를 조합하여 36개의 모델을 만들어 다양한 하중 조건을 적용시켰다. 표 2은 사용된 36개의 모델 조합을 나타내고 있다. 그림 2는 표 2의 해석모델을 이용하여 좌굴해석을 수행하였을 때 얻어지는 대표적인 좌굴모드를 보여주고 있다. 그림 2의 모델에 작용시킨 하중은 상부 플랜지에 등분포하중이 작용하였을 때이다.

표 2. 해석에 사용된 모델

α 변수	β 변수	γ 변수
0.167	1.0	1.2; 1.4; 1.8
0.167	1.2	1.0; 1.4; 1.8
0.167	1.4	1.0; 1.4; 1.8
0.25	1.0	1.2; 1.4; 1.8
0.25	1.2	1.0; 1.4; 1.8
0.25	1.4	1.0; 1.4; 1.8
0.333	1.0	1.2; 1.4; 1.8
0.333	1.2	1.0; 1.4; 1.8
0.333	1.4	1.0; 1.4; 1.8
0.5	1.0	1.2; 1.4; 1.8
0.5	1.2	1.0; 1.4; 1.8
0.5	1.4	1.0; 1.4; 1.8

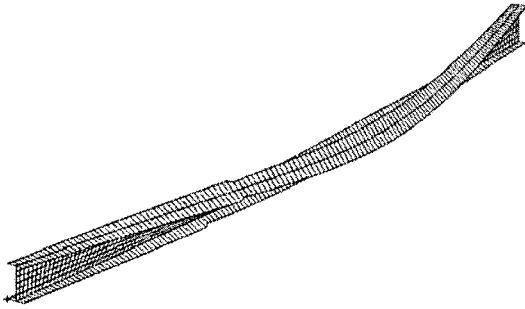


그림 2. 일단 계단식 단면 변화부의 좌굴 모드

3. 유한요소해석 결과와 새로운 좌굴 강도 식

유한요소해석 결과분석을 통하여 설계자들이 간편하게 적용할 수 있는 새로운 횡-비틀림 좌굴 강도 산정식을 아래와 같이 개발하였다.

$$M_{st} = C_{bst} C_{st} M_{ocr} \quad (7)$$

여기에서 C_{st} 는 계단식 단면부에 순수 휨이 작용할 때 제안된 식(6)이 사용되었으며, C_{bst} 는 하중고 효과가 고려

된 모멘트구배 수정계수이다. 비지지 길이내 모멘트 0(Zero)인 지점 개수에 따라 해당 적용식을 표 3에 나타내었다. 예를 들면, 비지지 길이내 모멘트 0인 지점이 한 곳에 존재하는 경우, 표3의 두 번째 행의

$$C_{st} = 1 + 1.5\alpha^{1.6}(\beta\gamma^{1.2} - 1) \text{와}$$

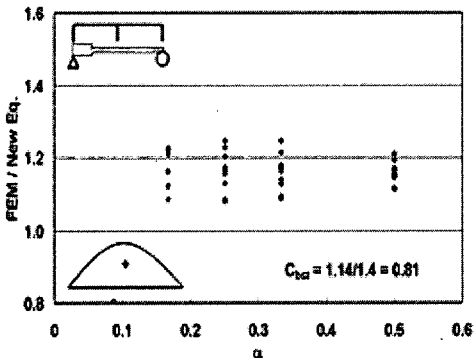
$$C_{bst} = \frac{10M_{\max}}{4M_{\max} + M_A + 7M_B + M_c} \text{를 적용한다.}$$

순수 휨이 작용하는 경우를 토대로 제안된 C_{st} 식을 살펴보면, 플랜지의 폭을 변화(β)시키는 것 보다 플랜지의 두께(γ)를 변화시키는 것이 횡-비틀림 좌굴 강도를 상대적으로 크게 증가시킴을 알 수 있다.

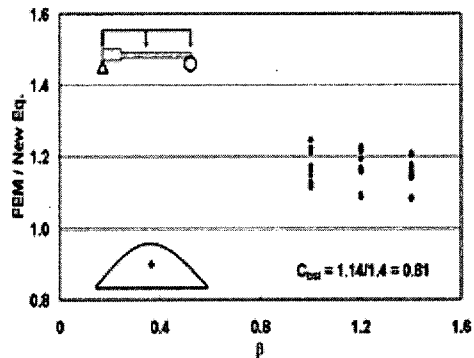
연속경간을 가지는 교량에서 작용 가능한 대부분의 하중의 경우를 고려하여 안전측으로 식(7)를 제안하였으나, 본 논문의 분량을 고려하여, 그림 3, 4, 5에 일반적으로 발생빈도 수가 높은 등분포하중이 전 구간 내에 작용하는 경우의 결과를 대표적으로 나타내고 있다. 그림 3은 비지지 길이 내 모멘트 0인 값을 가지지 않는 경우를 보여주고 있으며, 그림 4는 비지지 길이 내 모멘트 0인 곳이 1 개소인 경우, 그림 5는 비지지 길이 내 모멘트 0인 곳이 2 개소인 경우이다. 그림의 수직축(FEM/New Eq.)이 1인 값은 유한요소해석 결과 값과 제안된 식을 이용하여 얻어진 값이 정확히 일치하는 경우이다.

표 3. 계단식 단면부의 모멘트구배 수정계수

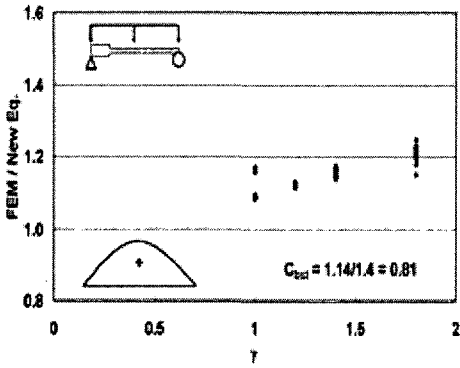
비지지 길이내 모멘트 0인 개수	C_{bst} 수정계수	C_{st} 수정계수
0	$1.4^{2y/h} C_b^{3/2(2)}$	$1 + 1.5\alpha^{1.6}(\beta\gamma^{1.2} - 1)$
1	$\frac{10M_{\max}}{4M_{\max} + M_A + 7M_B + M_c}$	$1 + 1.5\alpha^{1.6}(\beta\gamma^{1.2} - 1)$
2	$\frac{10M_{\max}}{4M_{\max} + M_A + 7M_B + M_c}$	$0.85 + 1.5\alpha^{1.6}(\beta\gamma^{1.2} - 1)$



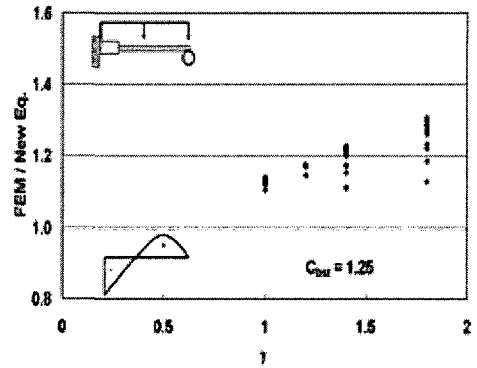
(a) 길이 계수 기준 (α)



(b) 플랜지 폭 계수 기준 (β)



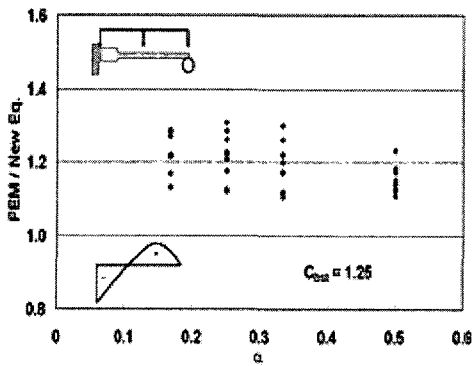
(c) 플랜지 두께 계수 기준 (γ)



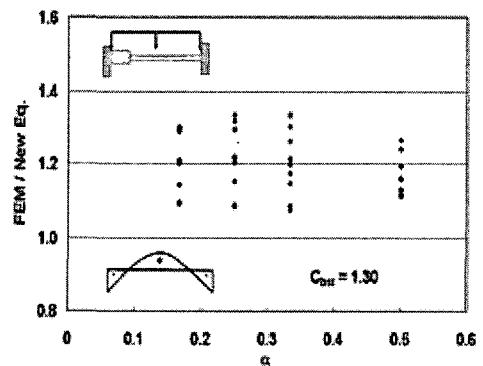
(c) 플랜지 두께 계수 기준 (γ)

그림 3. 해석결과와 제안식 비교(구간 내 모멘트 0인 지점이 없는 경우)

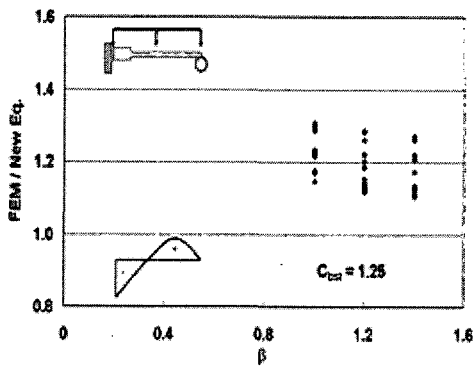
그림 4. 해석결과와 제안식 비교(구간 내 모멘트 0인 지점이 1개인 경우)



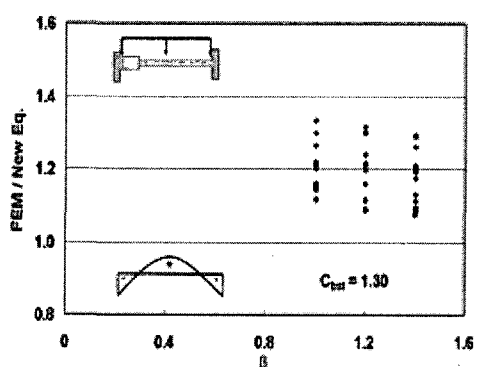
(a) 길이 계수 기준 (α)



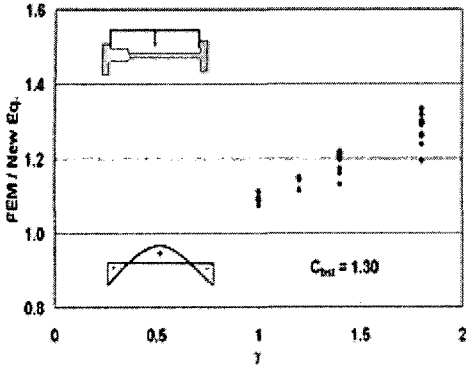
(a) 길이 계수 기준 (α)



(b) 플랜지 폭 계수 기준 (β)



(b) 플랜지 폭 계수 기준 (β)



(c) 플랜지 두께 계수 기준 (γ)

그림 5. 해석결과와 제안식 비교(구간 내 모멘트 0인 지점이 2개인 경우)

그림 3 ~ 그림 5에 나타낸 바와 같이, 제안식과 유한요소해석을 통해 얻어진 값들의 비교 분포가 α 와 β 의 변화에 대해서 비슷한 경향을 가지며, γ 값이 증가할수록 비교값들이 커짐을 알 수 있다. 교량 설계에 사용되는 연속적인 집중 하중군이 작용하는 경우는 하나의 집중하중이 작용하는 경우와 등분포하중이 작용하는 경우의 중간 범위로, 발생하는 모멘트 선도는 등분포하중이 작용할 때와 비슷하다. 해석결과분석으로부터, 연속적인 집중하중 군이 작용하는 경우, 그림 3, 4, 5의 등분포하중의 경우와 유사한 경향을 보임을 알 수 있었다.

4. 기존 식과의 비교 및 예제

본 논문의 서론에 언급된 기존 제한식들과 본 연구를 통하여 제안된 식(7) 및 유한요소해석결과를 그림 6에 비교하고 있다. 그림 6은 $\alpha = 0.167, 0.25, 0.333, 0.5$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 1.4$ 인 모델만을 나타내고 있다. 유한요소해석결과를 기준으로 AISC 제안식 (2)는 하중고 효과를 고려하지 못하여 횡-비틀림 좌굴강도를 과도하게 평가하고 있으며, Helwig 등[7]의 제안식 (4)는 양쪽 끝단에 음의 모멘트가 작용하며 단면형상이 구간내 변화는 경우 즉 $\alpha = 0.167, 0.25, 0.333$ 의 모델에서 안전하지 못한 값을 산정함을 알 수 있다. 그러므로, 단면의 형상이 비지지 길이 내 한 곳에서 계단식으로 변하며, 하중이 상부플랜지에 작용하는 경우, 기존에 검토된 식들 보다 새롭게 제안된 식 (7)이 보다 합리적임을 그림 6은 보여주고 있다.

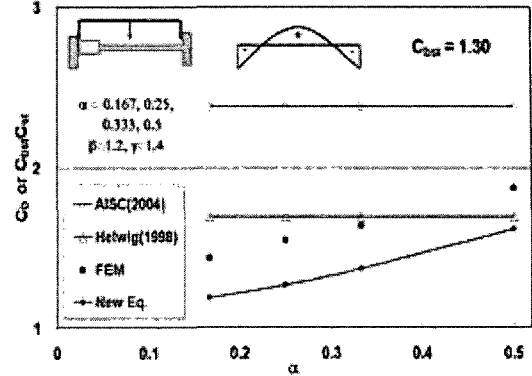


그림 6. 유한요소해석결과와 제안식 비교

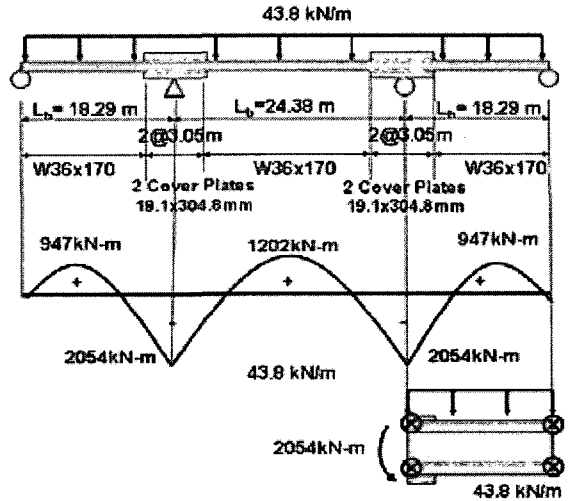


그림 7. 3경간 연속보 예제
(양단 개별 지지, 일단 계단식 보)

교량 예제에 본 논문의 제안식을 적용하여 간편성 및 유용성을 살펴보고자 한다. 그림 7은 3경간 연속경간을 가지며, 큰 부모멘트 구간인 내부 지점부에 덮개판을 상부와 하부플랜지에 설치하여 경제적인 설계를 적용한 교량이다. 사용된 주요 부재의 단면 치수는 플랜지 폭(b_f) = 30.48cm, 플랜지 두께(t_f)=2.80cm, 전체높이(d)=91.87cm, 복부두께(t_w)=1.73cm이다. 계산에 필요한 값들을 살펴보면, $M_{max} = 2054\text{kN-m}$, $M_A = 166\text{kN-m}$, $M_B = 804\text{kN-m}$, $M_C = 860\text{kN-m}$, $\alpha = 3.05/18.29 = 0.167$, $\beta = 1.00$, $\gamma = (2.8+1.91)/2.8 = 1.68$, $L_b = 18.29\text{m}$ 이다.

$$M_{ocr} = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi E_c}{L_b}\right)^2 I_y C_w}$$

$$= 710 \text{ kN-m (W36x170, } L_b = 18.29\text{m)}$$

$$C_{st} = 1 + 1.5\alpha^{1.6}(\beta\gamma^{1.2} - 1) = 1.07$$

$$C_{bst} = \frac{10M_{\max}}{4M_{\max} + M_A + 7M_B + M_C} = 1.38$$

$$M_{st} = C_{bst} C_{st} M_{ocr} = (1.38)(1.07)(710) = 1048$$

$$\text{kN}\cdot\text{m} < M_{\max} = 2054 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

계산결과로부터, 추가적인 횡지지가 비지지 길이 ($L_b=18.29\text{m}$)내에 1또는 2곳에 지지가 필요하다.

5. 결론

비지지 길이 한쪽 단에 계단식 단면 변화를 가지는 보의 횡-비틀림 좌굴 강도를 간편하고 합리적으로 산정하기 위한 새로운 모멘트구배 수정계수식이 제안되었다. 제안된 식은 단순지지 보와 같은 경계조건에 다양한 하중이 작용하는 경우를 고려하여 유한요소해석 프로그램을 통해 개발되었다. 제안식 (7)은 기존의 모멘트구배 수정계수식을 응용하여 설계 및 유지관리 기술자들에게 간편하게 사용될 수 있도록 개발되어 반복적인 구조해석 수행 없이, 합리적인 설계를 수행하는 데 크게 기여할 것이다.

참고문헌

- [1] American Institute of Steel Construction (AISC). *Load and Resistance Factor Design*, Second Edition, Chicago, Illinois, 2004.
- [2] American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). *LRFD Bridge Design Specifications*, 3rd Edition, Washington, D.C., 2004.
- [3] 대한토목학회, 도로교표준시방서-하중저항계수설계법, 1996.
- [4] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, NY, 1961.
- [5] Kirby, P. A., and D. A. Nethercot, *Design for Structural Stability*, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1979.

- [6] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C. "A unified approach to the elastic lateral buckling of beams." *The Structural Engineer*, Vol. 49, No. 7, pp321-330, 1971.
- [7] Helwig, T. A., Frank, K. H., and Yura, J. A. "Lateral-torsional buckling of singly symmetric I-beams." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 123(9), 1172-1179, 1997.
- [8] Trahair, N. S. *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [9] Park J. S. and Kang Y. J. "Flexural-Torsional Buckling of Stepped Beams subjected to Pure Bending." *Journal of Civil Engineering*, KSCE Vol. 8, No. 1, pp75-82, 2004.
- [10] Park J. S. and Kang Y. J. "Lateral Buckling of Stepped Beams under Linear Moment Gradient." *International Journal of Steel Structures*, KSSC, No. 4, pp71-81, 2004.
- [11] MSC/NASTRAN, *Quick Reference Guide*, Version 70.5, The MacNeal-Schwindler Corporation, Los Angeles, CA, 1998.
- [12] MSC/PATRAN, *Introduction to MSC.Patran, PAT301 Exercise Workbook*, MSC. Patran Version 9.0, The MacNeal-Schwindler Corporation, Los Angeles, CA, 2000.

박종섭(Jong Sup Park)

[정회원]



- 1994년 2월 : 고려대학교 토목환경공학과 (공학사)
- 1996년 8월 : 고려대학교 토목환경공학과 (공학석사)
- 2002년 12월 : Auburn University (공학박사)
- 2005년 9월 ~ 현재 : 상명대학교 토목환경공학부 전임강사

<관심분야>

구조공학, 교량공학, 강구조좌굴, 유지보수