비정렬 셀 중심 방법에서 대류플럭스의 수치근사방법 평가

명 현 국*1

EVALUATION OF NUMERICAL APPROXIMATIONS OF CONVECTION FLUX IN UNSTRUCTURED CELL-CENTERED METHOD

H.K. Myong*1

The existing numerical approximations of convection flux, especially the spatial higher-order difference schemes, in unstructured cell-centered finite volume methods are examined in detail with each other and evaluated with respect to the accuracy through their application to a 2-D benchmark problem. Six higher-order schemes are examined, which include two second-order upwind schemes, two central difference schemes and two hybrid schemes. It is found that the 2nd-order upwind scheme by Mathur and Murthy(1997) and the central difference scheme by Demirdzic and Muzaferija(1995) have more accurate prediction performance than the other higher-order schemes used in unstructured cell-centered finite volume methods.

Key Words: 대류플럭스(Convection Flux), 차분도식(Difference Scheme), 수치근사방법(Numerical Approximation), 비정렬 셀 중심 방법(Unstructured Cell-Centered Method), 정확도(Accuracy), 종속변수의 구배(Gradient of Dependent Variable)

1. 서 론

일반적으로 열유체 유동해석 코드의 정확도 및 다용성은 그것이 채택하고 있는 계산 격자구조의 유연성과 밀접하게 관계되므로, 격자계의 선택은 매우 중요하다. 따라서 이러한 면에서 비정렬격자(unstructured grid)를 사용하는 유한체적법(FVM)이 지난 십 수 년에 걸쳐 CFD 연구 분야에서 주목을 받아왔다[1-7]. 이것은 정렬격자(structured grid)계가 가지고 있는 두 가지 단점인 복잡하고 실제적인 형상에 대한 격자생성이 어렵고, 또한 관심 있는 영역에 격자를 능동적으로 적합시키기 어려운 점을 비정렬격자계에서는 용이하게 해결할 수 있기 때문이다.

또한, 비정렬격자계를 사용하는 유한체적법 중에서 수치해를 정렬격자계에서와 같이 격자생성으로 만들어진 기본 셀(또는 제어체적)의 중심에 저장하는 셀 중심 방법(cell-centered method)이 현재 가장 널리 사용되고 있다. 이것은 이 방법이 기하학적으로 매우 단순하고, 해석 영역의 경계가 면으로 구성되므로 특이점이 존재하지 않으며, 임의의 셀에 대해 특별한 보간법을 사용하지 않고 보존법칙을 만족할 수 있는 점 등 많은 장점을 가지고 있기 때문이다.

한편, 비정렬격자계에서는 일반적으로 격자점 간의 연결에 특별한 규칙이 없이 생성되기 때문에, 2차원에서는 삼각형 및 사각형 셀, 3차원에서는 사면체, 프리즘, 육면체 셀 등 격자생성법에 따라 여러 가지 모양의 셀이 있을 수 있으므로, 수치해석 방법에서 사각형 및 육면체 셀만을 사용하는 정렬격자의 경우와 매우 상이하다. 특히, 비정렬격자계에서는 확산항 및 대류항 이산화를 정렬격자계에서와 같이 처리하기 어렵다. 일예로, 제어체적 중심에서의 해(종속변수)의 구배(gradient)는 고차의 대류항 및 확산항 등의 계산에 필요하나, 비정렬격자계에서는 정렬격자계에서 사용하는 국소좌표변환과 유한차분법을 통해 얻는 방법이 적절하지 못하다.

따라서 현재까지 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에서 핵심이 되는 대류항 및 확산항 수치근사방법에 대한 여러 가지 방법이 제안되어 있으며[1-7], 최근에는 이 방법들이 상용 CFD 코드에 적용되어 널리 사용되고 있다. 그러나 이들 방법들에 대해 상호 비교분석한 연구는 상대적으로 많지 않은 실정이다.

접수일: 2005년 12월 22일, 심사완료일: 2006년 3월 10일.
1 정회원, 국민대학교 기계자동차공학부
* Corresponding author E-mail: myong@kookmin.ac.kr

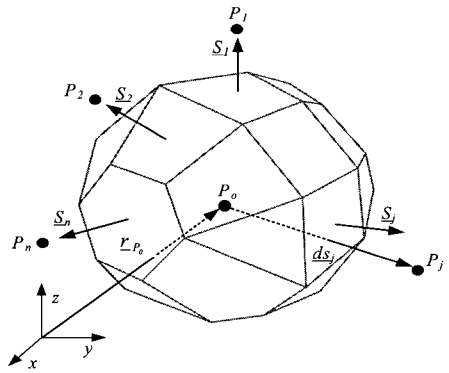

Fig. 1 Control volume of an arbitrary polyhedral shape

최근 명[8]은 현재 셀 중심 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에서 제안되어 있으며 상용 CFD 코드에 적용되어 널리 사용되고 있는 대표적인 확산항 수치근사에 대해 제기되는 불명확한 점을 상호 비교분석을 통해 명확히 하고, 불규칙적이고 여러 가지 형상을 가지는 격자에서도 2차 정확도를 가지면서도 용이하게 코드에 접목시켜 사용할 수 있는 새로운 확산플럭스 근사방법을 제안하였다. 특히, 명[8]은 확산플럭스의 수치근사 식에서 셀 면을 공유하는 인접한 두 셀의 중심을 잇는 선과 셀 면 사잇각이 0이 아닌 비직교성을 가진 일반적인 경우에도 수치 안정성 및 정확도면에서 우수한 성능을 발휘하는 기하학적 요소에 대한 표현을 이론적 및 수치해석적으로 명확히 하였다.

한편, 대류항 수치근사방법, 특히 셀 면에서의 종속변수의 값을 구하는 차분해법은 해의 정확도 및 수치안정성 면에서 확산항과 함께 매우 중요하다. 따라서 현재까지 많은 종류의 해법이 제안되어 있으며[1-6,9,10], 크게 저차(lower- order) 및 고차(higher-order)의 정확도를 가지는 해법으로 구분된다. 그런데 저차정확도를 가지는 해법은 용이하게 비정렬격자계에 적용할 수 있으며, 수치적으로 매우 안정적이나 수치오차를 많이 발생시킨다. 반면, 2차 상류차분해법(2nd- order upwind scheme), 2차 중심차분해법(2nd-order central difference scheme) 등 고차해법은 비정렬격자계에 적합하게 수정하여 적용하여야 하기 때문에 수정방법에 따라 여러 가지 다른 형태가 사용되며[1-6], 일반적으로 매우 정확한 해를 얻게 해 주지만 수치적으로 불안정하다. 이러한 이유로 저차해법 및 고차해법을 내부적으로 혼합하여 사용하는 해법들이 특히 압축성유동을 해석하기 위해 많이 제안되고 있다[9,10].

본 연구에서는 현재 셀 중심 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에서 제안되어 있으며 상용 CFD 코드에 적용되어 사용되고 있는 대류항 계산에 필요한 대표적인 고차 차분해법에 대해, 바닥 벽면에 대해 45°기울어진 측벽을 가지는 이차원 캐비티내의 부력구동 자연대류 층류유동에 적용하여 검증용 해와의 비교를 통해 정확도면에서 상호 비교분석하였다. 고려한 고차해법은 6가지로 순수한 고차해법인 2가지 형태의 2차 상류차분해법 및 2차 중심차분해법을 포함해 압축성유동 해석에 사용되고 있는 두 가지 혼합형 고차해법이다.

2. 대류항 근사방법 및 고차해법

일반적으로 적분형 수송방정식은 종속변수(또는 해)를 ϕ 라고 할 때 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\phi)dV + \int_S [\rho\phi \underline{v} - \Gamma_\phi \nabla\phi]\cdot \underline{dS} = \int_V Q_{\phi V} dV + \int_S Q_{\phi S}\cdot \underline{dS} \tag{1}$$

여기서 종속변수 ϕ는 속도, 온도 등을 의미하며, 계수 Γ_ϕ는 종속변수에 따라 달라진다. 만일 V 및 S가 Fig. 1에서와 같이 다면체 형상을 가지는 계산 셀의 체적 V_{P_0} 및 분리된 면 S_j (j=1, N_f)를 가진다면, 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{P_0}} (\rho\phi)dV + \sum_j \int_{S_j} [\rho\phi \underline{v} - \Gamma_\phi \nabla\phi]\cdot \underline{dS_j} = \int_{V_{P_0}} Q_{\phi V} dV + \sum_j \int_{S_j} Q_{\phi S}\cdot \underline{dS_j} \tag{2}$$

식 (2)에서 좌변 각 항은 비정상항과 대류 및 확산항이고, 우변 항들은 체적 및 면적 적분형 생성항을 각각 의미한다. 본 연구에서 대상으로 하고 있는 식 (2)의 대류항은 셀의 각 경계면을 통한 변수 ϕ의 대류플럭스의 합으로서 다음과 같은 이산화 형태로 표현할 수 있다.

$$\sum_j [\rho\phi \underline{v}]_j \cdot \underline{S_j} = \sum_j J_j \phi_j^* = \sum_j C_j \tag{3}$$

위식에서 ϕ_j^*는 셀 면 j에서의 종속변수의 (평균)값을 나타내고, J_j는 다음과 같이 셀 면 j을 통과하는 질량플럭스를 나타낸다.

$$J_j = \rho_j^* \underline{v_j^*}\cdot \underline{S_j} \tag{4}$$

이 질량플럭스 J_j는 운동량 및 연속방정식의 해로부터 구해지며, 셀 면에서의 속도 $\underline{v_j^*}$와 밀도 ρ_j^*는 수치해석방법의 안정성 및 정확도에 큰 영향을 미치기 때문에, 일반적으로 집

중격자배열과 함께 안정된 해를 보증하기 위해 특별한 보간법에 의해 구해진다[1-7].

따라서 대류항 근사방법의 평가는 셀 면 j에서의 종속변수의 값을 의미하는 ϕ_j^*을 결정하는 것으로 귀착되며, 이 값을 셀 면 j에서의 질량유량 J_j 인접한 두 셀의 중심 P_0 및 P_j에서의 값 ϕ_{P_0} 및 ϕ_{P_j} 등을 사용하여 구하는 방법에 따라 많은 수치해법이 존재하며, 크게 저차 및 고차의 정확도를 가지는 해법으로 구분된다. 저차정확도를 가지는 해법 ϕ_j^{LO}에는 널리 알려진 1차 상류차분해법(upwind scheme)이 있다. 이 해법은 셀 면 좌우의 셀에서 내삽이 이루어지기 때문에 아무런 수정 없이 비정렬격자계에 적용할 수 있으며, 수치적으로 매우 안정적이나 수치오차를 많이 발생시킨다. 반면, 2차의 상류차분해법, 2차 중심차분해법 등 고차해법 ϕ_j^{HO}은 비정렬격자계에 적합하게 수정하여 적용하여야 하나, 수정방법에 따라 다소 다른 형태가 사용되며[1-6], 일반적으로 매우 정확한 해를 얻게 해 주지만 수치적으로 불안정하다. 또한, 아래에 살펴 볼 고차의 대류항 수치해법들은 셀 면에 이웃한 두 셀 뿐만 아니라 그 주위의 더 많은 셀에서의 해를 이용하여 셀 면의 값으로 내삽하게 된다. 이 경우 각 셀의 이산화방정식은 주위의 많은 셀과 연결됨으로 대수방정식의 매트릭스 해를 구하기가 매우 어렵다. 따라서 이산화방정식의 계수는 저차의 해법으로 처리하고 고차대류 플럭스와 저차로 계산된 대류플럭스의 차이를 원천항으로 처리하는 방법이 수치안정성 면에서 우수하기 때문에 현재 상용 CFD 코드에 일반적으로 사용되고 있다. 이 방법은 반복계산법에서 고차와 저차의 대류플럭스 차이, 즉 수정값(correction)을 이전단계 값을 사용하기 때문에 지연수정(deferred-correction)이라 부른다.

$$\begin{aligned} C_j &= C_j^{LO} + [C_j^{HO} - C_j^{LO}] \\ &= J_j\phi_j^{LO} + J_j[\phi_j^{HO} - \phi_j^{LO}] \end{aligned} \tag{5}$$

참고로 식 (5)에서 저차의 첫 번째 항을 계수로, 두 번째 항을 원천항으로 처리함으로써 행렬식의 계수 매트릭스는 수치해석적으로 안정적인 대각 지배적(diagonal dominant) 형태가 된다.

또한, 고차해법의 수치적 불안정성을 방지하기 위해 대부분의 상용 CFD 코드에서는 아래 형태의 혼합(blended)차분 방법을 사용하고 있다.

$$\phi_j^* = \phi_j^{LO} + \gamma_\phi[\phi_j^{HO} - \phi_j^{LO}] \tag{6}$$

식 (6)에서 γ_ϕ는 혼합값(blending factor)으로, 이 값이 0이면 1차 해법, 1이면 2차(고차) 해법이 되고, 0과 1사이의 값을 가지면 혼합차분 해법이 되어 고차해법의 정확도와 저차해법의 수치안정성을 동시에 가지게 된다. 또한, 삭 (5)와 마찬가지로 식 (6)의 우변에서 첫 번째 항만을 내재적으로 처리하고, 두 번째 항은 지연수정(deferred-correction) 방법에 따라 외재적으로 처리된다. 이와 함께, 최근에는 저차해법 및 고차해법을 내부적으로 혼합시킨 혼합형 해법들이 특히 압축성유동 해석을 위해 많이 제안되어 있다[9,10].

본 연구에서는 다음과 같은 2차 정확도를 가진다고 알려진 고차해법들과 수치안정성을 위해 고차해법과 저차해법을 내부적으로 혼합시킨 두 가지 혼합형 해법을 대상으로 각 해법의 성능을 상호비교를 통해 파악하고자 한다.

2.1 2차 상류차분해법

유동의 상류쪽 값만을 사용하는 2차 상류차분해법을 비정렬격자계에 적용하면 다음과 같다[1,2].

$$\begin{aligned} \phi_j^* = \frac{1}{2}[&\{1+sign(J_j)\}(\phi_{P_0} + \nabla\phi_{P_0}\cdot d\underline{r}_{P_0}) \\ &+\{1-sign(J_j)\}(\phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j}\cdot d\underline{r}_{P_j})] \end{aligned} \tag{7}$$

위식에서 $d\underline{r}_{P_0}$ 및 $d\underline{r}_{P_j}$는 각각 $\underline{r}_j - \underline{r}_{P_0}$ 및 $\underline{r}_j - \underline{r}_{P_j}$ 를 나타내며, $\underline{r}_{P_0}$, $\underline{r}_{P_j}$ 및 $\underline{r}_j$는 각각 점 P_0, 점 P_j 및 셀 면 j의 중심점 위치벡터이다. 그리고 $(\nabla\phi)_{P_0}$ 및 $(\nabla\phi)_{P_j}$는 각각 점 P_0 및 P_j에서 ϕ 구배의 근사값으로, 가우스정리(Gauss theorem 또는 발산정리) 또는 최소자승법(least square method)을 사용하여 구하고 있다[1-7]. 여기서는 본 연구와의 관련성을 고려하여 가우스정리를 사용하는 것으로 한다. 즉, 다음과 같이 $(\nabla\phi)_{P_0}$를 구하며,

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_{P_0} &= [\int_{V_{P_0}} (\nabla\phi)_{P_0} dV\ ]/V_{P_0} \\ &= \sum_j (\overline{\phi}\cdot\underline{S})_j / V_{P_0} \end{aligned} \tag{8}$$

위식에서 셀 면에서의 $\overline{\phi}$ 값은 이웃하는 셀들에서의 값을 단순히 산술평균[1,2] 또는 가중평균[3-5]하여 구해진다.

한편, Muzaferija[3]은 다음과 같이 상류쪽의 값만을 사용하는 식 (7)과는 다소 다른 형태의 식 (9)을 제시하였다.

$$\begin{aligned} \phi_j^* = \frac{1}{2}[&\{1+sign(J_j)\}(\phi_{P_0} + (\overline{\nabla\phi})_j\cdot d\underline{r}_{P_0}) \\ &+\{1-sign(J_j)\}(\phi_{P_j} + (\overline{\nabla\phi})_j\cdot d\underline{r}_{P_j})] \end{aligned} \tag{9}$$

위 식에서 $(\overline{\nabla\phi})_j$는 셀 면 j의 중심점에서의 구배값으로

인접한 두 셀에서의 구배값을 가중평균하여 구한다. 따라서 이 항을 통해 유동의 하류쪽 영향도 포함되게 되며, 식 (9)는 1차원 직각격자계에서는 2차 중심차분해법으로 된다. 결과적으로 식 (9)의 2차 상류차분해법은 순수한 의미에서 상류차분해법이라고 볼 수 없다.

2.2 2차 중심차분해법

2차 중심차분해법을 비정렬격자계에 직접 적용하면 다음과 같다.

$$\phi_j^* = w_j \phi_{P_0} + (1 - w_j)\phi_{P_j} \tag{10}$$

여기서,

$$w_j = \left| (r_{jfs} - r_{P_j}) \right| / \left| (r_{P_j} - r_{P_0}) \right| \tag{11}$$

로 이웃하는 두 셀의 크기가 다른 경우 거리 가중내삽을 위한 가중값(보간값)으로, 위식에서 r_{jfs} 는 셀 면 j에 인접한 두 셀의 중심 P_0 및 P_j를 잇는 선이 셀 면과 만나는 점의 위치벡터로, 일반적으로는 셀 면의 중심과 일치하지 않는다는 점에 주의할 필요가 있다.

식 (10)은 대부분의 상용 CFD 코드에서 사용되는 가장 일반적인 방법이나, 셀 면의 중심과 그 면에 이웃한 두 셀의 중심을 잇는 선이 일치하지 않는 찌그러짐(skewness)이 존재하는 일반적인 수치해석을 위한 격자에서는 2차 정확도를 보장할 수 없다. 이것을 보완하기 위해 Demirdzic and Muzaferija[4]은 다음과 같이 셀 면 j을 공유하는 두 인접 셀로부터 셀 면의 중심점으로 보간한 값의 평균을 사용할 것을 제안하였다.

$$\Phi_j^* = \frac{1}{2}\left[(\Phi_{P_0} + \nabla\Phi_{P_0} \cdot d\underline{r}_{P_0}) + (\Phi_{P_j} + \nabla\Phi_{P_j} \cdot d\underline{r}_{P_j}) \right] \tag{12}$$

반면, Ferziger and Peric[5]은 두 셀의 중심을 잇는 선과 셀 면이 만나는 점에서 정의되는 식 (10)의 값을 다음과 같이 셀 면의 중심값으로 보정하면 찌그러짐이 있는 격자에서도 2차 정확도를 보장할 수 있다고 제안하였다.

$$\Phi_j^* = \omega_j \Phi_{P_0} + (1-\omega_j)\Phi_{P_j} + (\overline{\nabla\Phi})_j \cdot (\underline{r}_j - \underline{r}_{jfs}) \tag{13}$$

위 식에서 $(\overline{\nabla\Phi})_j$는 $\underline{r}_{jfs}$ 점에서의 구배값으로 셀 면 j에 인접한 두 셀에서의 구배값을 가중평균하여 구한다.

2.3 van Albada의 제한자(limiter)를 사용한 TVD 해법

van Abbada의 제한자(limiter)를 사용한 혼합형 해법인 TVD 해법[9]은 기본적으로 앞에서 기술한 2차 상류차분해법의 변형된 형태로 수치안정성을 위해 고차해법과 저차해법을 내부적으로 혼합시킨 형태로 해석할 수 있으며, 비정렬격자계에 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_j^* = \frac{1}{2}\left[\{1 + sign(J_j)\}\phi_\ell + \{1 - sign(J_j)\}\phi_r \right] \tag{14}$$

여기서,

$$\phi_\ell = \phi_{P_0} + \frac{s_0}{4}\left[(1 - ks_0)\triangle^- + (1 + ks_0)\triangle \right]$$

$$\phi_r = \phi_{P_j} - \frac{s_1}{4}\left[(1 - ks_1)\triangle^+ + (1 + ks_1)\triangle \right]$$

$$\triangle = \phi_{P_j} - \phi_{P_0} \tag{15}$$

$$\triangle^- = 2\nabla\phi_{P_0} \cdot ds - \triangle$$

$$\triangle^+ = 2\nabla\phi_{P_j} \cdot ds - \triangle$$

$$s_0 = max\{0, \frac{2\triangle^-\triangle + \epsilon}{(\triangle^-)^2 + (\triangle)^2 + \epsilon}\}$$

$$s_1 = max\{0, \frac{2\triangle^+\triangle + \epsilon}{(\triangle^+)^2 + (\triangle)^2 + \epsilon}\}$$

위 식에서 k=1/3, $\underline{ds} = \underline{r}_{P_j} - \underline{r}_{P_0}$ 이며, ϵ는 0으로 나누어지는 것을 막기 위해 작은 값(1 x 10^{-12})을 사용한다. 또한, s_0, s_1을 제한자(limiter)라 부르며 해의 최대, 최소점에서 0이 된다. 이 TVD 해법은 해의 불연속점에서 $\phi_j^{HO} = \phi_j^{LO}$로 되어 자동적으로 진동을 막아준다.

2.4 NVF(Normalized Variable Formulation) 해법

NVF 해법은 NVD(Normalized Variable Diagram)을 이용하여 셀 면에서의 구속조건(boundness criterion)을 만족시키게끔 제한시키는 방법으로, NVF 해법[10]도 기본적으로 앞에서 기술한 2차 상류차분해법의 변형된 형태로 수치 안정성을 위해 고차해법과 저차해법을 내부적으로 혼합시킨 형태로 해석할 수 있으며, 이 해법을 비정렬격자계에 적용하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

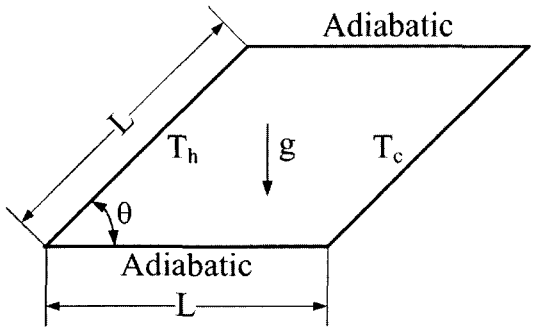

Fig. 2 Schematic diagram of skewed cavity

$$\phi_j^* = \frac{1}{2}[\{1+sign(J_j)\}\phi_\ell + \{1-sign(J_j)\}\phi_r] \tag{16}$$

여기서,

$$\phi_\ell = \phi_{P_0} + \gamma_0[w_j\phi_{P_0} + (1-w_j)\phi_{P_j} - \phi_{P_0}]$$
$$\phi_r = \phi_{P_j} + \gamma_1[w_j\phi_{P_0} + (1-w_j)\phi_{P_j} - \phi_{P_j}]$$

$$\gamma_0 = max(0, min(\widetilde{\phi_{P_0}}/\beta_m, 1)) \times max(0, sign(1/\beta_m - \widetilde{\phi_{P_0}}/\beta_m)) \tag{17}$$
$$\gamma_1 = max(0, min(\widetilde{\phi_{P_j}}/\beta_m, 1)) \times max(0, sign(1/\beta_m - \widetilde{\phi_{P_j}}/\beta_m))$$

$$\widetilde{\phi_{P_0}} = 1 - \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{2\nabla\phi_{P_0}\cdot ds}, \quad \widetilde{\phi_{P_j}} = 1 + \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{2\nabla\phi_{P_j}\cdot ds}$$

위 식에서 γ_0, γ_1 값에 따라 상류차분, 중심차분 및 혼합차분 해법으로 되며, 상수 β_m 은 1/10 ~ 1/2의 값을 가진다. 본 연구에서는 0.2 값을 사용하였다.

3. 대류항 계산용 고차해법의 평가

대류항 계산에 필요한 2차 정확도를 가지는 것으로 알려진 고차해법들의 정확도 평가를 위해서 본 연구에서는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 바닥 벽면에 대해 45° 기울어진 측벽을 가지는 이차원 캐비티내의 부력구동 자연대류 층류유동을 대상으로 하였다. 이 유동은 형상은 비교적 간단하나 열 및 유동 형태는 매우 복잡한 양상을 가지기 때문에, Demirdzic et al.[11]은 비직교격자를 사용하는 경우의 계산 정확도를 평가하기 위한 검증용으로 선택하고, 이차원 정렬격자를 사용하고 대류항 및 확산항에 대해 중심차분해법으로 근사시키는 수치해석방법을 사용해서 해석하고 검증용 해를 제시하였다. 또한 Mathur and Murthy[1]은 Fig. 2의 형상과 유사한 기울어진 측벽을 가지는 이차원 캐비티내 관구동(lid-driven) 층류유동에 대해 자신들이 개발한 비정렬격자계를 사용하는 수치해석 방법으로 해석하고 결과를 비교하였다. 따라서 이 유동은 대류항 고차해법을 포함해 비정렬격자계를 사용하는 수치해석 방법을 평가하는데 적절하다고 사료된다.

본 연구에서는 대류항 고차해법에 따른 수치해석결과의 차이만을 명확히 비교하기 위해 확산항에 대해서는 불규칙한 격자계에서도 2차 정확도를 가지고 수치 안정성 면에서도 우수한 것으로 나타난 다음 식으로 표현되는 확산플럭스 D_j 을 사용하였다[7,8].

$$D_j = (\phi_{P_j} - \phi_{P_0})\frac{\Gamma_\phi S_j}{ds_j\cdot\hat{n}} + \Gamma_{\phi_j}[(1-\omega_j)(\nabla\phi)_{P_0} + \omega_j(\nabla\phi)_{P_j}]\cdot S_j - \Gamma_{\phi_j}[(\nabla\phi)_{P_0}\cdot(r_j - r_{P_0}) + (\nabla\phi)_{P_j}\cdot(r_{P_j} - r_j)]\frac{S_j}{ds_j\cdot\hat{n}} \tag{18}$$

위식에서 $\hat{n}$ 은 셀 면에 수직한 단위벡터이고, ds_j 는 두 셀 P_0 및 P_j 중심을 잇는 직선 $r_{P_j} - r_{P_0}$를 나타낸다. 따라서 본 논문에서는 대류항 계산에 필요한 고차해법으로 여기서부터 식 (7), 식 (9), 식 (12), 식 (13), 식 (14) 및 식 (16)을 사용하는 방법을 각각 MM 해법, MU 해법, DM 해법, FP 해법, TVD 해법 및 NVF 해법이라고 간략히 표기한다.

수치해석은 최근 명과 김[7]에 의해 개발된 셀 중심 비정렬격자계를 사용하는 해석코드(PowerCFD)를 사용하였으며, 격자 비의존성을 위해 검증용 해[11]와 똑같은 찌그러진 비등간격 사각형 격자계(24 x 192 cells)를 사용하였다. 지면관계상 여기서는 Ra=10^6에서 Pr=0.1인 경우의 유체유동과 열전달 특성을 비교해 본다. 따라서 계산에 사용된 차원 및 유체 물성치는 Demirdzic et al.[11]와 마찬가지로 L = 1, ρ = 1, 중력가속도 g = 1, 열팽창계수 β = 0.1, 비열 C_p = 1, T_H = 1, T_C = 0, Pr = 0.1, μ = 10^{-4}이다. 참고로, 수치 안정성을 고려하여 본 연구에서 고려한 6가지 대류항 고차해법들을 식 (5)와 같이 이산화방정식의 계수는 저차의 해법으로 처리하고 고차 대류 플럭스와 저차로 계산된 대류 플럭스의 차이를 원천항으로 처리하는 지연수정 방법을 사용하였다. 수치해석 결과 모든 해법들이 크게 발산하는 곳 없이 안정적으로 계산되어 졌다.

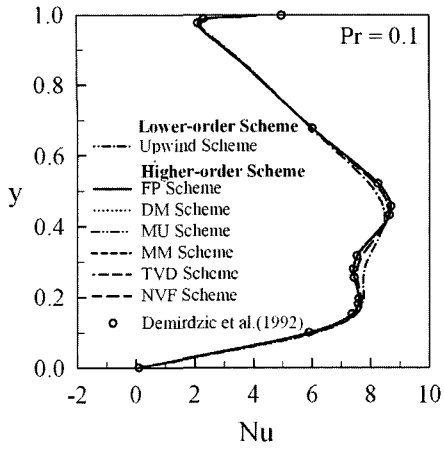

Fig. 3 Local Nusselt number on the cold wall at Pr = 0.1 and Ra = 10^6 for flow in a buoyancy-driven cavity, (224 x 192 cells)

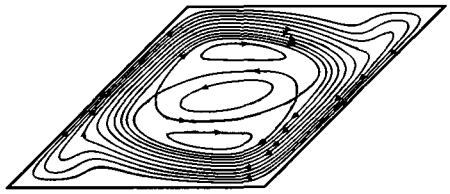

Fig. 4 Predicted streamlines for flow in a buoyancy-driven cavity at Pr = 0.1 and Ra = 10^6 (224 x 192 cells)

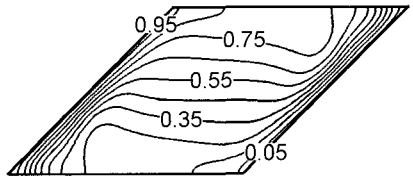

Fig. 5 Predicted isotherms for flow in a buoyancy-driven cavity at Pr = 0.1 and Ra = 10^6 (224 x 192 cells)

Fig. 3은 경사진 찬 벽면(cold wall)에서의 국소 Nusselt 수 분포를 비교한 것으로, 그림에서 y는 찬 벽면을 따라 정규화 시킨 좌표를 나타낸다. 여기서 국소 Nusselt 수는 단위면적당 국소 열플럭스를 캐비티의 전도 열플럭스로 무차원화시킨 값이다. 수치해석 결과를 보면 NVF 해법을 제외하고는 혼합형 해법을 포함하여 모든 고차해법이 정렬격자계를 사용하여 계산한 검증용 해[11]와 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그러나 1차 상류차분해법은 검증용 해와 상당한 차이를 나타내고 있으며, 혼합형 해법인 NVF 해법도 다소 차이를 나타내고 있다.

Table. 1에는 각 해법에 따른 정확도를 평가하기 위해 경사진 찬 벽면(cold wall)에서의 국소 Nusselt를 적분하여 평균한 평균 Nusselt 수를 검증용 해[11]와 비교하여 나타냈다. 결과를 보면 DM 해법이 가장 정확한 예측성능을 보여주고 있으며, MM 해법도 허용 범위 내에서의 정확도를 보여주고 있음

Table. 1 Predicted Averaged Nusselt Number at Sloped Cold Wall for Flow in a Buoyancy-Driven Cavity at Pr = 0.1 and Ra = 10^6.

Scheme for Convection	$\overline{Nu}$	% error
benchmark solution[11]	5.98493	0.0
DM Scheme[4]	5.98501	0.001
MM Scheme[1]	5.98519	0.004
FP Scheme[5]	5.98809	0.052
MU Scheme[3]	5.98828	0.056
TVD Scheme[9]	5.98640	0.025
NVF Scheme[10]	6.01296	0.468
Upwind Scheme	6.03317	0.806

을 알 수 있다. TVD 해법, FP 해법 및 MU 해법도 비교적 정확한 예측성능을 나타내고 있으나, DM 및 MM 해법에 비해서는 예측성능이 상대적으로 나쁘게 나타났다. 본 연구에서 다룬 격자계에서는 셀 면 f의 중심점과 두 인접 셀 중심을 잇는 선이 셀 면과 만나는 점이 일치하므로 식 (13)의 FP 해법은 상용 CFD에서 중심차분해법으로 사용하는 식 (10)과 동일하다. 따라서 비정렬격자계에서의 중심차분해법은 식 (12)로 표현되는 DM 해법이 정확도 면에서 더 적절함을 알 수 있다. 또한 2차 상류차분해법인 MU 해법이 MM 해법에 비해서 더 나쁜 예측결과를 제시하고 있는 원인은 MU 해법에서는 기본적으로 상류차분해법이면서도 상류쪽 값만을 사용한 식 (7)과 달리 식 (9)와 같이 셀 면 f에 인접한 두 셀에서의 구배값을 가중평균한 $(\overline{\nabla\Phi})_f$를 사용함으로써 하류쪽의 영향도 혼합하여 고려한데 기인한다고 사료된다.

이러한 관점에서 볼 때 2차 상류차분해법의 변형형으로 볼 수 있는 혼합형 해법인 식 (14)의 TVD 해법은 MU 해법에 비해서는 개선된 정확도를 나타내나 단순한 형태인 MM 해법에 비해서는 예측성능이 상대적으로 나쁘다. 또한, NVF 해법은 1차 상류차분해법보다는 개선된 결과를 나타내나, 정확도 및 수렴성면에서는 고차해법 중 가장 정확도가 떨어지는 예측성능을 나타내고 있다. 이상의 결과들로부터 대류항 계산에 필요한 고차해법으로 2차 상류차분해법으로는 식 (7)로 표현되는 MM 해법을, 2차 중심차분해법으로는 식 (12)로 표현되는 DM 해법을 각각 사용하는 것이 정확도 면에서 더 우수함을 알 수 있다.

Fig. 4는 DM 해법을 사용하여 예측된 유동분포를, Fig. 5는 예측된 온도분포를 각각 나타내고 있다. 참고로 MM 해법.

MU 해법, FP 해법 및 TVD 해법을 사용하여 예측한 결과도 DM 해법 결과와 구분할 수 있을 정도의 차이를 나타내지 않아 생략하였다. 결과로부터 재순환영역에서의 주흐름(main current)이 수평 단열벽면으로부터 박리되려는 경향과 함께 천천히 움직이는 유체의 넓은 영역이 중앙에 시계반대방향으로 흐르는 와동과 함께 두 개의 자유 정체점(free stagnation point)을 포함하면서 캐비티의 중심부에 형성되고 있음을 알 수 있다. 또한 온도장 분포를 보면 대류의 영향으로 인해 온도구배가 등온 벽면 근처에서만 급격하고, 중앙에 수평 등온형태로 안정된 성층(stably stratified) 영역이 커다랗게 형성되고 있음을 알 수 있다. 이 속도 및 온도 분포에 대한 예측결과는 그림 결과로 제시된 Demirdzic et al.[11]의 검증용 해와 정성적으로도 정량적으로도 매우 잘 일치하고 있다.

끝으로, 명 등[12]은 본 연구에서 다룬 바닥벽면에 대해 기울어진 측벽을 가지는 이차원 캐비티내의 부력 구동 층류유동을 포함해 판구동(lid-driven) 층류유동 및 이차원 사각형 닥트유동 닥트내에 놓여 있는 실린더 주위의 층류자연대류 유동 등 Demirdzic et al.[11]이 검증용 해로 제시한 여러 가지 복잡한 형상을 가지는 열 및 유체유동 문제에 대해 대류항 해법으로 DM 해법을, 확산항에 대해서는 식 (18)의 새로운 확산플럭스 근사방법을 채택한 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법[7]이 정렬격자계를 사용한 검증용 해와 정량적 및 정성적으로 동등한 정도의 예측성능을 나타내고 있음을 확인하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 현재 셀 중심 비정렬격자계를 사용하는 수치해석방법에서 제안되어 있으며 상용 CFD 코드에 적용되어 사용되고 있는 대류항 계산에 필요한 대표적인 고차 차분해법에 대해, 바닥 벽면에 대해 45°기울어진 측벽을 가지는 이차원 캐비티내의 부력구동 자연대류 층류유동에 적용하여 검증용 해와의 비교를 통해 정확도면에서 상호 비교분석하였다. 고려한 고차해법은 6가지로 순수한 고차해법인 2가지 형태의 2차 상류차분해법 및 2차 중심차분해법을 포함해 압축성유동 해석에 사용되고 있는 두 가지 혼합형 고차해법이다.

연구결과, 대류항 계산에 필요한 고차해법으로 2차 상류차분해법으로는 식 (7)로 표현되는 MM 해법[1]을, 2차 중심차분해법으로는 식 (12)로 표현되는 DM 해법[4]을 각각 사용하는 것이 정확도 면에서 더 우수한 것으로 나타났다.

참고문헌

[1] Mathur, S.R. and Murthy, J.Y., 1997, "ssure-Based Method for Unstructured Meshes," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol.31, p.195-215.

[2] Zwart, P.J., Raithby, G.D. and Raw, M.J., 1999, "ntegrated Space-Time Finite Volume Method and its Application to Moving Boundary Problems," *J. Comp. Physics*, Vol.154, p.497-519.

[3] Muzaferija, S., 1994, "ve Finite Volume Method for Flow Predictions using Unstructured Meshes and Multigrid Approach," *PhD Thesis, University of London.*

[4] Demirdzic, I. and Muzaferija, S., 1995, "ical Method for Coupled Fluid Flow, Heat Transfer and Stress Analysis using Unstructured Moving Meshes with Cells of Arbitrary Topology," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.125, p.235-255.

[5] Ferziger, J.H. and Peric, M., 2002, "tational Methods for Fluid Dynamics, 3rd ed.," *Springer.*

[6] Davidson, L., 1996, "sure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.22, p.265-281.

[7] 명현국, 김종태, 2005, "격자계를 사용하는 3차원 유동해석코드 개발(I) -수치해석방법-," *대한기계학회논문집* B권, 제29권, 제9호, p.1049-1056.

[8] 명현국, 2006, "비정렬 셀 중심 방법에서 확산플럭스의 새로운 수치근사방법," *한국전산유체공학회지*, 제11권, p.8-15.

[9] Luo, H., Baum, J.D., and Lohner, R., 1993, "Numerical Solution of the Euler Equations for Complex Aerodynamic Configuration Using Edge-Based Finite Element Scheme," *AIAA Paper* 93-2933.

[10] Jasak, H., Weller, H.G., and Gosman, A.D., 1999, "High Resolution NVD Differencing Scheme for Arbitrarily Unstructured Meshes,", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.31, p.431-449.

[11] Demirdzic, I., Lilek, Z. and Peric, M., 1992, "Fluid Flow and Heat Transfer Test Problems for Non-Orthogonal Grids: Bench-Mark Solutions," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.15, p.329-354.

[12] 명현국, 김종태, 김종은, 2005, "비정렬격자계를 사용하는 3차원 유동해석코드 개발(II) -코드성능평가-," *대한기계학회논문집 B권*, 제29권, 제9호, p.1057-1064.