불확정성 시간지연 선형시스템의 지연 종속 강인 안정성

論 文
55D-4-1

Delay-Dependent Robust Stability of Uncertain Time-Delayed Linear Systems

李 淵 圭* · 金 鎭 勳†
(Yearn-Gui Yi · Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we propose a new delay-dependent criterion on the robust stability of time-delayed linear systems having norm bounded uncertainties. Based on new form of Lyapunov-Krasovskii functional and the Newton-Leibniz formula, we drive a result in the form of LMI which guarantees the robust stability without any model transformation. The Newton-Leibniz equation was used to relate the cross terms with free matrices. Finally, we show the usefulness of our result by two numerical examples.

Key Words : Uncertainty, Time-Delay, Robust Stability, Lyapunov-Krasovskii Functional, LMI

1. 서 론

시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 시스템의 상태방정식 내에 시간지연 항을 포함하고 있는 시간 지연선형시스템에 대하여 안정성을 해석하거나 안정화를 보장하는 제어기를 설계하는 것으로서, 시스템이 갖고 있는 시간지연 항이 시스템 자체의 불안정성이나 성능하락의 원인으로 작용하기 때문에 매우 오랫동안 많은 연구자들의 관심을 끌어온 흥미로운 문제들 중의 하나이다. 이러한 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 문제에 있어서 가장 중요한 문제 중의 하나는 적절한 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 선택하는 것으로서 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수의 형태에 따라 보다 향상된 시간지연 독립 혹은 시간지연 종속 안정성 조건을 얻는 것이 가능하다. 시간지연 값의 크기에 대한 정보를 포함하고 있는 시간지연 종속 안정성 조건[3]-[8][10]-[18]이 임의의 시간지연 값에 대하여 안정성을 보장하는 시간지연 독립 조건[1]에 비해 시간지연 값이 작을 경우에 비교적 덜 보수적인 결과를 나타낸다는 것이 잘 알려진 사실이다.

시간지연 종속 안정조건을 유도하는 대표적인 접근방법 중의 하나로서 Niculescu[3]는 Newton-Leibniz공식을 활용하여 시간지연 선형시스템 방정식 내의 시간지연 항 $x(t-d(t))$를 $x(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds$로 대체하여 원래의 시스템을 변환한 후 변환된 시스템에 대하여 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수와 불필요한 교차항에 대한 벡터-행렬 부등식 조건을 이용하여 안정 조건을 유도하는 모델 변환 방법을 제시하였다. Park[8]과 Moon[7]은 모델 변환된 시스템에 대하여 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수의 미분 항에 나타나는 교차항을 효과적으로 대치하기 위해 자유 행렬 변수의 개념을 적용한 확장된 벡터-행렬 부등식을 적용하여 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연 종속 안정조건을 유도하였다. Fridman과 Shaked [4][5]는 시간지연 시스템에 대한 descriptor 변환을 행한 후 Park의 벡터-행렬 부등식과 결합하여 이전의 결과들보다 향상된 시간지연 종속 안정성 및 안정화 조건을 유도하였다. 이러한 시간지연 종속 안정성 혹은 안정화 조건의 유도 과정 중 Newton-Leibniz 공식의 활용은 필수적이며 Lyapunov -Krasovskii 함수의 시간 미분 항을 구할 때 $x(t-d(t))$항의 일부는 $x(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds$ 항으로 대체된다.

그러나 기존의 접근 방법들이 Newton-Leibniz 공식을 활용한 $x(t-d(t))$항에 대한 대치나 모델 변환에 기인하는 보수성을 해결할 수 있는 일반적인 기준을 제시하지는 못하였기 때문에 이전의 방법들이 갖고 있던 이러한 문제점을 해결하기 위해 Wu[15]는 LMI를 구성하는 외부변수(outer factor)들 사이의 관계성을 표현해줄 수 있는 자유 행렬 변수를 도입한 제로 벡터-행렬식을 Lyapunov-Krasovskii 함수의 미분 항에 부가함으로써 원래 시스템에 대한 모델 변환이 없으면서도 Fridman과 Shaked의 한계를 극복할 수 있었으며, He[13]와 Xu[16]는 Wu의 개념을 확장 내지 변형함으로서 향상된 결과를 제시하였다.

결국 보다 향상된 안정 조건을 유도하기 위해서는 다양한 LMI 외부변수들의 존재가 필수적이며 이것은 이전보다 복잡한 형태의 Lyapunov-Krasovskii 함수와 다양한 LMI 외부변수들 간의 관계성을 표현해 줄 수 있는 다수의 제로 벡터-행렬식을 필요로 하게 됨을 의미한다고 볼 수 있다.

따라서 이 논문에서는 보다 다양한 LMI 외부변수를 생성할 수 있는 새로운 Lyapunov-Krasovskii 함수를 제시한 후

† 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子工學部 敎授 · 工博
E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr
* 正 會 員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 博士課程
接受日字 : 2006年 1月 23日
最終完了 : 2006年 2月 26日

이것을 LMI 외부변수들 간의 관계성을 표현해 줄 수 있는 여러 개의 자유 행렬 변수를 포함하는 세 개의 부가적인 제로 벡터-행렬식과 결합함으로써 노옴의 크기가 제한된 불확정성 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 조건을 유도하게 된다. 이 논문은 다음과 같은 순서로 구성된다. 우선 2장에서는 안정성 해석의 대상이 되는 불확정 시간지연 선형시스템과 안정성 해석 문제를 명확히 정의한 후 예비결과를 제시한다. 3장에서는 불확정 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 조건을 LMI 형태로 제시하고, 4장에서는 대표적인 수치예제를 통해 3장에서 제시된 결과의 유용성 및 효율성을 예시한 후, 5장에서 결론을 맺는다. 이 논문에서는 $(\cdot)^T$은 벡터 혹은 행렬의 전치를 나타내며 0과 I는 적절한 차원의 영행렬 및 항등행렬을 각각 나타낸다. 그리고 임의의 실수 대칭 행렬 X, Y에 대하여 $X<Y(X\le Y)$는 $X-Y$가 음확정(준 음확정)임을 나타내며 대칭 행렬 속의 $(\star)$는 다음과 같이 전치 행렬 요소를 나타낸다. 즉 $\begin{bmatrix} X & Y^T \\ \star & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & Z \end{bmatrix}$ 이다. 끝으로, $x_t = x(t+\theta)$, $-h \le \theta \le 0$ 이다.

2. 문제 기술 및 예비 결과

안정성 해석의 대상이 되는 다음으로 기술되는 불확정 시간지연 선형시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A+\Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad \forall t \in [-h, 0] \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$은 시스템의 상태, $\phi \in R^n$은 초기 상태 값, 그리고 $A, A_d \in R^{n\times n}$은 값이 알려진 상수 행렬이며, 시간지연 요소 $d(t)$는 다음의 조건을 만족하는 미지의 스칼라 변수이다.

$$0 \le d(t) \le h, \quad \dot{d}(t) \le \mu \le 1 \tag{2}$$

여기서 h, μ는 상수이다. 그리고 $\Delta A(t), \Delta A_d(t)$는 시스템이 갖고 있는 시간에 따라 변화하는 불확정량으로서 다음의 조건을 만족한다.

$$[\Delta A(t) : \Delta A_d(t)] = DF(t)[E : E_d] \tag{3}$$

여기서 D, E, E_d는 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이며, $F(t)$는 아래의 조건을 만족하는 Lebesque 측정 가능한 미지의 실수 행렬이다.

$$F^T(t)F(t) \le I, \quad \forall t.$$

불확정 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 문제는 (1)로 정의된 시간지연 선형시스템에 대하여 (2)의 조건을 만족하는 모든 시간지연 $d(t)$ 및 (3)의 조건을 만족하는 불확정량에 대하여 안정함을 보장하는 LMI 조건을 구하는 것이다. 지금까지 대부분의 경우에 다음의 Lyapunov-Krasovskii 함수와

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-d(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta ds \tag{4}$$

다음의 Newton-Leibniz 방정식은

$$x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s)ds = 0 \tag{5}$$

시간지연 종속 안정성 조건을 유도하는 데 필수적으로 사용되었다. (4)와(5)를 이용하여 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 조건, 즉 $\dot{V}(x_t) < 0$을 보장하는 효율적인 LMI를 유도하기 위해서 일반적으로 사용되었던 LMI의 외부변수들은 $\left\{x(t), x(t-d(t)), \int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right\}$이며, 직접 혹은 새로운 변수의 정의를 통한 descriptor를 적용한 모델 변환을 이용한 접근방법 역시 동일한 외부변수들을 적용하여 안정성을 보장하는 향상된 LMI조건을 유도하는 것이 가능하다. 모델 변환 방법의 제한점과 보수성을 극복할 수 있는 직접적인 접근방법은 모델 변환이 없는 원래 시스템에 대하여 기존의 외부변수에 $\dot{x}(t)$를 외부변수로서 첨가하고 LMI 변수들간의 관계성을 표현할 수 있는 자유행렬 변수와 결합하여 LMI 조건을 유도함으로서 얻어질 수 있다. 따라서 향상된 안정성 결과를 얻기 위해서는 LMI의 외부변수에 대한 확장이 요구된다고 판단되며 이의 결과로 확장된 외부변수들 간의 관계성을 표현해주는 자유행렬 변수들 간의 관계식에 대한 복잡도의 증가 또한 필수적으로 수반된다고 할 수 있다.

이 논문에서는 기존의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수(4)에 대한 확장 내지 일반화로서 (1)로 주어진 시간지연 선형시스템에 대하여 다음과 같이 새롭게 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x_t) = {} & x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Sx(s)ds + \int_{t-h}^{t}\left\{\int_{\theta}^{t}\xi^T(s)Z\xi(s)ds\right\}d\theta \\ & + \int_{0}^{d(t)}\{[x(t)-x(t-\theta)]^T R[x(t)-x(t-\theta)]\}d\theta \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\xi(s) = \left[x^T(s) \ \dot{x}^T(s)\right]^T$이다. 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수에서 수정된 세 번째 항과 새롭게 첨가된 네 번째 항의 존재로 인해 LMI유도를 위한 외부변수는 $\{x(t), \dot{x}(t), x(s), \dot{x}(s), x(t-d(t))\}$로 확장된다. 특히 $\dot{x}(\cdot)$항을 LMI 외부변수로서 포함시킨 효과에 의해 안정 조건 유도 시 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 주어진 시스템의 상태 궤적에 따른 시간 미분항을 구함이 없이 단순한 대수적인 조작만을 통해서 간결한 결과를 얻을 수 있는 장점을 지니게 되며 확장된 LMI 외부변수들 간의 관계성은 Newton-Leibniz 공식을 활용한 다수의 제로 벡터-행렬 관계식을 통해 표현된다. Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 통한 외부변수의 확장과 Newton-Leibniz 공식을 활용한 제로 대입을 결합한 새로운 접근방법의 유용성과 효율성은 잘 알려진 대표적인 수치예제를 적용하여 얻어진 LMI의 결과를 통해서 쉽게 확인할 수 있다.

아래의 보조정리들은 시간에 따라 변화하는 구조적인 불확정량을 효과적으로 처리하기 위해 사용된다.

보조정리 1[6]. 적절한 차원을 갖는 행렬 D, E, F와 임의의 실수 $\varepsilon > 0$에 대하여 항상 다음의 관계가 성립한다.

$$DF(t)E + E^T F^T(t) D^T \le \frac{1}{\varepsilon} DD^T + \varepsilon E^T E \tag{7}$$

여기서 행렬 F는 $F^T(t)F(t) \le I$의 조건을 만족한다.

마지막으로 아래의 보조정리는 다음에 제시되는 주요결과의 LMI를 유도하는 데 중요하게 사용된다.

보조정리 2. 행렬 $\Phi < 0$와 실수 $0 \le d(t) \le h$에 다음을 만족하면

$$\begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + h\Psi < 0$$

항상 다음이 성립한다.

$$V(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^T(t)\Phi\xi_1(t) + \int_{t-d(t)}^{t} \left\{ [\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)]\Psi \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \right\} ds < 0. \tag{8}$$

증명. ξ_1, ξ_2가 LMI 외부 변수임을 고려하면 (8)을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\xi_1, \xi_2) &= \left[\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)\right] \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \\ &\quad + \int_{t-d(t)}^{t} \left\{ [\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)]\Psi \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \right\} ds \\ &= \int_{t-d(t)}^{t} \left\{ \left[\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)\right] \left(\frac{1}{d(t)} \cdot \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Psi \right) \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \right\} ds \end{aligned}$$

여기서 $0 < d(t) \le h$의 조건과 Φ의 음확정 조건에 의한 아래의 결과를

$$\Phi < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \le 0$$

이용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\xi_1, \xi_2) &\le \int_{t-d(t)}^{t} \left\{ \left[\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)\right] \left(\frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Psi \right) \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \right\} ds \\ &= \frac{1}{h} \int_{t-d(t)}^{t} \left\{ \left[\xi_1^T(t) : \xi_2^T(s)\right] \left(\begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + h \cdot \Psi \right) \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \right\} ds \\ &< 0 \end{aligned}$$

이것으로 증명을 마친다. □

3. 주요 결과

다음의 정리는 시스템 (1)로 정의된 불확정 시간지연 선형시스템에 대하여 (2)의 조건을 만족하는 모든 시간지연 요소에 대하여 안정성을 보장하는 결과이다.

정리 1. 다음의 LMI를 만족하는 실수 대칭 행렬 $P \in R^{n\times n} > 0$, $S \in R^{n\times n} \ge 0$, $R \in R^{n\times n} \ge 0$, $Z \in R^{2n\times n} \ge 0$ 그리고 적절한 차원을 갖는 임의의 실수 행렬 $L_1, L_2, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2$ 및 임의의 실수 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$가 존재하면 (1)로 정의된 시간지연 선형시스템은 (2)의 조건을 만족하는 모든 시간지연 요소와 (3)으로 정의된 불확정량에 대하여 점근적으로 안정하다.

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & L_1 D \\ \star & \Psi_{22} & L_2 D \\ \star & \star & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & L_1 D & 0 \\ \star & \Psi_{22} & 0 & L_2 D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\varepsilon_1 I & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 & M_1 D \\ \star & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & M_2 D \\ \star & \star & \Phi_{33} & 0 & M_3 D \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

여기서 $U_1, U_2, U_3, \Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{22}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{22}, \Phi_{23}, \Phi_{33}$는 다음으로 정의된다.

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= U_1^T P U_2 + U_2^T P U_1 + U_1^T S U_1 + hZ + \mu U_1^T R U_1 + L_1 U_3 \\ &\quad + U_3^T L_1^T + \varepsilon_1 U_1^T E^T E U_1 + N_1 U_1 + U_1^T N_1^T \\ U_1 &= [I : 0], \quad U_2 = [0 : I], \quad U_3 = A U_1 - U_2 \\ \Psi_{12} &= -\mu U_1^T R + L_1 A_d + U_3^T L_2^T + \varepsilon_1 U_1^T E^T E_d - N_1 + U_1^T N_2^T \\ \Psi_{22} &= -(1-\mu)S + \mu R + L_2 A_d + A_d^T L_2^T + \varepsilon_1 E_d^T E_d - N_2 - N_2^T \\ \Phi_{11} &= U_1^T R U_2 + U_2^T R U_1 + M_1 U_3 + U_3^T M_1^T + \varepsilon_2 U_1^T E^T E U_1 \\ \Phi_{12} &= M_1 A_d + U_3^T M_2^T + \varepsilon_2 U_1^T E^T E_d \\ \Phi_{13} &= -U_1^T R U_2 - U_2^T R U_1 + U_3^T M_3^T + N_1 U_2 \\ \Phi_{22} &= M_2 A_d + A_d^T M_2^T + \varepsilon_2 E_d^T E_d \\ \Phi_{23} &= A_d^T M_3^T + N_2 U_2 \\ \Phi_{33} &= -Z + U_1^T R U_2 + U_2^T R U_1 \ . \end{aligned}$$

증명. 우선 (9), (10)에 각각 schur complement[1]를 적용하여 아래의 관계식을 얻을 수 있다.

$$(9) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \star & \Psi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} D \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) D^T \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}^T < 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} (10) \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 \\ \star & \Psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} D \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) D^T \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \\ & + h \left(\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \star & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \star & \star & \Phi_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} D \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right) D^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^T \right) < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

다음으로 (1)로 정의된 시간지연 선형시스템에 대한 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수의 각 항을 아래와 같이 정의한다.

$$V_1(x_t) = x^T(t) P x(t)$$

$$
\begin{aligned}
V_2(x_t) &= \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Sx(s)ds \\
V_3(x_t) &= \int_{t-h}^{t}\left\{\int_{\theta}^{d(t)} \xi^T(s)Z\xi(s)ds\right\}d\theta \\
V_4(x_t) &= \int_{0}^{d(t)}\{[x(t)-x(t-\theta)]^T R[x(t)-x(t-\theta)]\}d\theta
\end{aligned}
$$

이제 $\xi(t), x(t-d(t)), \xi(s)$가 LMI 외부변수임을 고려하여 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수의 각 항에 대한 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot V_1(x_t) &= 2x^T(t)P\dot x(t) \\
&= 2x^T(t)U_1^T PU_2\,\xi(t) \\
&= \xi^T(t)\left[U_1^T PU_2 + U_2^T PU_1\right]\xi(t) \qquad (13) \\
\dot V_2(x_t) &= x^T(t)Sx(t)-(1-\dot d(t))x^T(t-d(t))Sx(t-d(t)) \\
&\le x^T(t)Sx(t)-(1-\mu)x^T(t-d(t))Sx(t-d(t)) \\
&= \xi^T(t)U_1^T SU_1\xi(t)-(1-\mu)x^T(t-d(t))Sx(t-d(t)).
\end{aligned} \qquad (14)
$$

또한 아래의 결과는 잘 알려진 적분항의 미분에 대한 Leibniz 공식이다[2].

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds \\
&= f(t,b(t))\dot b(t) - f(t,a(t))\dot a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

관계식 (15)의 결과를 적용하여 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수의 세 번째 항과 네 번째 항의 시간 미분항을 구하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot V_3(x_t) &= \int_t^t \xi^T(s)Z\xi(s)ds - (\dot t-\dot h)\int_{t-h}^{t}\xi^T(s)Z\xi(s)ds \\
&\quad + \int_t^t \xi^T(t)Z\xi(t)d\theta \\
&\le h\xi^T(t)Z\xi(t) - \int_{t-d(t)}^{t}\xi^T(s)Z\xi(s)ds \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot V_4(x_t) &= \dot d(t)[x(t)-x(t-d(t))]^T R[x(t)-x(t-d(t))] \\
&\quad + 2\int_0^{d(t)}\{[x(t)-x(t-d(t))]^T R[\dot x(t)-\dot x(t-\theta)]\}d\theta \\
&\le \mu[x(t)-x(t-d(t))]^T R[x(t)-x(t-d(t))] \\
&\quad + 2\int_{t-d(t)}^{t}\{[x(t)-x(s)]^T R[\dot x(t)-\dot x(s)]\}ds \\
&= \mu[\xi^T(t) : x^T(t-d(t))]\begin{bmatrix} U_1^T \\ -I\end{bmatrix} R\left[U_1 : -I\right]\begin{bmatrix}\xi(t) \\ x(t-d(t))\end{bmatrix} \\
&\quad + 2\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \xi(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} U_1^T \\ -U_1^T\end{bmatrix} R\left[U_2 : -U_2\right]\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \xi(s)\end{bmatrix}\right\}ds \\
&= [\xi^T(t) : x^T(t-d(t))]\begin{bmatrix}\mu U_1^T RU_1 & -\mu U_1^T R \\ -\mu RU_1 & \mu R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t) \\ x(t-d(t))\end{bmatrix} \\
&\quad + \int_{t-d(t)}^{t}\left\{\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \xi(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} U_1^T RU_2 + U_2^T RU_1 & -U_1^T RU_2 - U_2^T RU_1 \\ -U_1^T RU_2 - U_2^T RU_1 & U_1^T RU_2 + U_2^T RU_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \xi(s)\end{bmatrix}\right\}ds \qquad (17)
\end{aligned}
$$

여기서 이 후의 논리 전개를 위해 아래와 같이 두 개의 새로운 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
\xi_a^T(t) &= \left[\xi^T(t) : x^T(t-d(t))\right] \\
\xi^T(t,s) &= \left[\xi^T(t) : x^T(t-d(t)) : \xi^T(s)\right].
\end{aligned}
$$

다음으로 아래의 Newton-Leibniz 공식과

$$
x(t)-x(t-d)-\int_{t-d}^{t}\dot x(s)ds = 0
$$

보조정리(1)의 결과를 적용하면 임의의 행렬 $L_1, L_2, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2$ 에 대한 다음의 결과를 유도할 수 있다. 처음으로 시스템(1)의 궤적에 따라 다음을 얻고

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\left[\xi^T(t)L_1 + x^T(t-d(t))L_2\right]\cdot \\
&\quad \left[(A+\Delta A(t))x(t) - \dot x(t) + (A_d+\Delta A_d(t))x(t-d(t))\right] \\
&= 2\left[\xi^T(t)L_1 + x^T(t-d(t))L_2\right]\left[Ax(t)-\dot x(t)+A_d x(t-d(t))\right] \\
&\quad + 2\left[\xi^T(t)L_1 + x^T(t-d(t))L_2\right]DF(t)\left[EU_1 : E_d\right]\begin{bmatrix}\xi(t) \\ x(t-d(t))\end{bmatrix} \\
&\le \xi_a^T(t)\begin{bmatrix} L_1U_3 + U_3^T L_1^T & L_1A_d + U_3^T L_2^T \\ \star & L_2A_d + A_d^T L_2^T\end{bmatrix}\xi_a(t) \\
&\quad + \xi_a^T(t)\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2\end{bmatrix} D\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)D^T\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2\end{bmatrix}^T\xi_a(t) \\
&\quad + \xi_a^T(t)\begin{bmatrix}\varepsilon_1 U_1^T E^T EU_1 & \varepsilon_1 U_1^T E^T E_d \\ \star & \varepsilon_1 E_d^T E_d\end{bmatrix}\xi_a(t) := V_5(x_t),
\end{aligned}
$$

다음으로 시스템 (1)의 궤적에 따라 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\left[\xi^T(t)M_1 + x^T(t-d(t))M_2 + \xi^T(s)M_3\right]\cdot\right. \\
&\quad \left.\left[(A+\Delta A(t))x(t)-\dot x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-d(t))\right]\right\}ds \\
&= 2\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3\end{bmatrix}\left[U_3 : A_d : 0\right]\xi(t,s)\right\}ds \\
&\quad + 2\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\left[\xi^T(t)M_1 + x^T(t-d(t))M_2 + \xi^T(s)M_3\right]\cdot\right. \\
&\qquad \left. DF(t)\left[EU_1 : E_d\right]\xi_a(t)\right\}ds \\
&\le \int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\begin{bmatrix} M_1U_3 + U_3^T M_1^T & M_1A_d + U_3^T M_2^T & U_3^T M_3^T \\ \star & M_2A_d + A_d^T M_2^T & A_d^T M_3^T \\ \star & \star & 0\end{bmatrix}\xi(t,s)\right\}ds \\
&\quad + \int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3\end{bmatrix} D\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)D^T\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3\end{bmatrix}^T\xi(t,s)\right\}ds
\end{aligned}
$$

$$+\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\begin{bmatrix}U_1^TE^T\\E_d^T\\0\end{bmatrix}(\varepsilon_2)[EU_1:E_d:0]\cdot\right.$$
$$\left.\xi(t,s)\right\}ds := V_6(x_t).$$

또한, Newton-Leibniz 방정식 (5)에 의하여 다음이 성립한다.

$$0 = 2\left[\xi^T(t)N_1+x^T(t-d(t))N_2\right]\left[x(t)-x(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right]$$
$$= 2\left[\xi^T(t)N_1+x^T(t-d(t))N_2\right][x(t)-x(t-d(t))]$$
$$-2\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\left[\xi^T(t)N_1+x^T(t-d(t))N_2\right]\dot{x}(s)\right\}ds$$
$$= \xi_a^T(t)\begin{bmatrix}N_1U_1+U_1^TN_1^T & -N_1+U_1^TN_2^T\\ \star & -N_2-N_2^T\end{bmatrix}\xi_a^T(t)$$
$$-\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\begin{bmatrix}0 & 0 & N_1U_2\\0 & 0 & N_2U_2\\U_2^TN_1^T & U_2^TN_2^T & 0\end{bmatrix}\xi(t,s)\right\}ds := V_7(x_t).$$

다음으로, 시스템 (1)에 대하여 새롭게 정의한 아래의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수에 대하여

$$V(x_t) = V_1(x_t)+V_2(x_t)+V_3(x_t)+V_4(x_t) \qquad (18)$$

위의 (13)(14)(16)(17)의 결과와 $V_5(x_t), V_6(x_t), V_7(x_t)$의 결과를 종합하여 시스템 (1)의 궤적에 따른 미분을 구하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t)+\dot{V}_2(x_t)+\dot{V}_3(x_t)+\dot{V}_4(x_t)$$
$$\le \dot{V}_1(x_t)+\dot{V}_2(x_t)+\dot{V}_3(x_t)+\dot{V}_4(x_t)$$
$$+V_5(x_t)+V_6(x_t)+V_7(x_t)$$
$$=\xi_a^T(t)\left(\begin{bmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12}\\ \star & \Psi_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}D\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)D^T\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}^T\right)\xi_a(t)$$
$$+\int_{t-d(t)}^{t}\left\{\xi^T(t,s)\left(\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13}\\ \star & \Phi_{22} & \Phi_{23}\\ \star & \star & \Phi_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}D\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)D^T\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}^T\right)\xi(t,s)\right\}ds.$$

마지막으로 위에서 유도된 (11)과 (12)의 성질과 보조정리 2를 적용하면 $\dot{V}(x_t)<0$를 얻게 되어 시간지연 (2)와 불확정성 (3)을 갖는 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. □

4. 수치 예제

다음은 이 논문에서 제시된 불확정성을 가지는 시간지연 선형 시스템의 안정성에 관한 결과의 유용성을 수치 예제를 통하여 보인다. 이를 위하여 기존의 대표적인 두 가지 예제들에 대해서 안정 조건에 대한 이전의 결과들과의 비교를 수행한다. 먼저, 예제 1에서는 시간지연이 상수(constant)인 경우에 대하여 불확정성의 크기에 따른 최대허용 시간지연(h)을 비교하고, 예제 2에서는 일정한 크기의 바운드를 가지는 불확정성에 대하여 시간지연의 최대변화량(μ)에 따른 최대 허용 시간지연(h)을 비교한다.

예제 1[16] : 다음의 행렬 값을 갖는 불확정성 시간지연 선형시스템 (1)을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix}-0.6 & -2.3\\0.8 & -1.2\end{bmatrix},\quad A_d = \begin{bmatrix}-0.9 & 0.6\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

여기서 불확정성은 $\|\Delta A(t)\| \le \lambda,\quad \|\Delta A_d(t)\| \le \lambda$ 이다.

아래의 표1. 은 시간지연 선형시스템 (1)에 대하여 시간지연이 상수인 경우(즉, $\mu=0$) 안정성을 보장해주는 최대 시간지연(h)의 값을 여러 경우의 불확정성의 크기(λ) 값에 대하여, 정리 1의 LMI를 이용하여 구한 결과를 표로 요약한 것이다.

표 1. $\mu=0$인 경우 λ에 따른 최대허용 시간지연(h)
Table 1. Maximal allowed time delay(h) according to the various size of uncertainty(λ) when $\mu=0$

λ	0.3	0.4	0.5	0.6
Ref. [5] & [14]	0.9288	0.7342	0.4903	0.1027
Ref. [16]	0.9514	0.7950	0.6426	0.2087
정리 1	1.0243	0.8102	0.6459	0.2097
개선 (%)	7.6624	1.9119	0.5135	0.4792

위의 표1에서 보듯이 새로이 제시된 결과는 기존의 결과들에 비하여 안정성을 보장하는 최대허용 시간지연의 크기가 크게 향상됨을 보인다.

예제 2[15] : 다음의 행렬 값을 갖는 시간지연 선형시스템 (1) 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix}-0.5 & -2.0\\1.0 & -1.0\end{bmatrix},\quad A_d = \begin{bmatrix}-0.5 & -1.0\\0.0 & 0.6\end{bmatrix}$$

여기서 시스템의 불확정성은 다음으로 주어진다.

$$D = I_2,\ E = E_d = \mathrm{diag}\{0.2, 0.2\}\ .$$

아래의 표2는 시간지연 선형시스템 (1)에 대하여 안정함을 보장해주는 최대 시간지연(h)의 값을 여러 가지 최대시간지연 변화량(μ)값에 대하여 정리 1의 결과를 이용하여 구한 결과와 기존의 결과들과의 비교를 요약한 것이다.

표 2. μ에 따른 최대 허용 시간지연(h)
Table 2. Maximal allowed time delay(h) according to the various size of μ

μ	0.0	0.3	0.5	0.7	0.9
Ref. [5]	0.6812	0.3862	0.1829	0.1137	-
Ref. [15]	0.8435	0.6019	0.2433	0.2420	0.2420
정리 1	0.8791	0.6469	0.4340	0.3116	0.3074
개선(%)	4.2205	7.4763	78.3806	28.7603	27.0248

마지막으로, 위의 예제 1과 예제 2의 결과에서 보듯이 새로이 제시된 불확정성을 갖는 시간지연 선형 시스템의 안정성에 대한 결과인 정리1을 적용한 시간지연 종속 안정 조건이 불확정성(λ)과 시간지연을 변화율(μ)값의 변화에 대해서 이전의 결과들 보다 안정성을 보장하는 최대허용 시간지연의 크기(h)가 크게 향상됨을 확인할 수 있다.

6. 결 론

이 논문에서는 기존의 불확정 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연 의존 안정 조건들이 내포하고 있었던 보수적 결과를 효율적으로 해결할 수 있는 새로운 Lyapunov- Krasovskii 후보 함수를 제안하였다. 불확정량애 대한 노옴의 크기가 제한된 시간지연 선형시스템에 대하여 정의된 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 이용하여 시스템 상태방정식 혹은 Newton-Leibniz 방정식 및 다양한 제로(zero)항들과 결합하여, 안정성을 보장하는 LMI가 음확정일 가능성을 높여주었을 뿐 만 아니라 비교적 간단한 일련의 대수적 조작을 통하여 쉽게 시간지연 선형시스템의 안정을 보장해주는 LMI 표현을 유도하는 것이 가능하였다. 제안된 방법의 유용성을 예시하기 위해 기존의 대표적인 두 개의 예제들이 제시되었으며 제시된 예제들의 결과에 의하면 새롭게 제안된 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 이용한 안정 조건이 이전의 결과들에 비해 더 큰 최대허용 시간지연 값을 보장해 주기 때문에 이전의 방법들이 갖고 있던 보수성을 상당히 완화시켰음을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 결과물은 교육인적자원부와 산업자원부의 출연금 및 보조금으로 수행한 산학협력중심대학육성사업의 연구결과입니다.

참 고 문 헌

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia, PA : SIAM, 1994.

[2] W. J. Rogh, *Linear System Theory*. Upper Saddle River, New Jersey:Prentice Hall, 1996.

[3] Niculescu, S.-I., Neto, A. T., Dion, J.-M., and Dugard, L., 1995, "Delay-Dependent Stability of Linear Systems with Delayed state : an LMI Approach," Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, PP. 1495-1497.

[4] E. Fridman and U. Shaked, "New bounded real lemma for time-delay systems and their applications," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 46, no. 12, PP. 1973-1978, Dec. 2001.

[5] E. Fridman and U. Shaked, "An improved stabilization method for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 47, no. 11, PP. 1931-1937, Nov. 2002.

[6] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : A linear matrix inequality approach," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 42, no. 8, PP. 1144-1148, Aug. 1997.

[7] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," Int. J. Control, Vol. 74 PP. 1447-1455, 2001.

[8] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for system with uncertain time-invariant delays," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 44,no. 4, PP. 876-877, Apr, 1999.

[9] S.-I. Niculescu, "Memoryless control with an α -stability constrint for time-delay systems : An LMI approach," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 43,no. 5, PP. 739-743, May, 1998.

[10] J. H. Kim, "Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 46, no. 5, PP. 789-792, May, 2001.

[11] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust H_∞ and $L_1 - L_2$ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 48,no. 9, PP. 1661-1666, Sep, 2003.

[12] Y. xia and Y. Jia, "Robust control of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter -dependent Lyapunov functionals," Syst. Control Lett., Vol. 50, PP. 183-193, 2003.

[13] Y. He, M. Wu, J. H. She and G. P. Liu "Parameter -dependent Lyapunov functional for stability of time -delay systems with polytopic-type uncertainties," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 49, no. 5, PP. 789-792, May, 2004.

[14] Y.S. Lee, Y.S. Moon, W.H. Kwon and P.G. Park "Delay-dependent robust H1 control for uncertain systems with a state-delay," Automatica, Vol. 40, PP. 65-72, Jan, 2004.

[15] M. Wu, Y. He, J. H. She and G. P. Liu "Delay -dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," Automatica, Vol. 40, PP. 1435-1439, Mar, 2004.

[16] S. Xu and J. Lam "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 50, no. 3, PP. 384-387, Mar, 2005.

[17] M. S. Mahmoud and A. Ismail "New results on delay -dependent control of time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, Vol. 50, no. 1, PP. 95-100, Jan, 2005.

[18] X. M. Zhang, M. Wu, J. H. She and Y. He "Delay -dependent stabilization of linear systems with time -varying state and input delays," Automatica, Vol. 41, PP. 1405-1412, May, 2005.

저 자 소 개

이 연 규(李 淵 圭)

1970년 6월 28일생. 1998년 충북대학교 전자공학과 졸업. 2000년 동 컴퓨터과학과졸업(석사). 2000년~2003년 한국전자통신연구원 연구원. 2004~현재 충북대 대학원 제어계측공학과 박사과정.

Tel : 043-286-7329

E-Mail : hobii@nate.com

김 진 훈(金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임 강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 1995년~현재 충북대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수.

Tel : 043-261-2387, Fax : 043-268-2386

E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr