韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 20집 제1호. 2006. 2. 87-101

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 1, Feb. 2006. 87-101

심화 발문을 통한 영재 수업 모델 연구

방 승 진 (아주대학교)
최 중 오 (경기과학고등학교)

초·중·고등학교 수학영재를 대상으로 하는 수학수업의 모델로, 수학수업을 진행하는 과정에서 수학영재의 지적 호기심을 유도하는 발문과 이에 대한 학생들의 반응, 그리고 내용 구성 방법에 대한 연구이다. 수업 중 제시되는 각 개념은 기초에서 심화에 이르는 위계적 구조로 제시되며, 교사는 심화 발문을 통해 학생들의 개념에 대한 이해 정도를 단계별로 높인다. 본 연구에서는 교사의 이와 같은 발문과 학생들의 발문에 의해 이루어지는 영재수업의 모델을 제시하는데 목적이 있다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

우리나라는 2000년 영재교육진흥법과 2005년 개정안에 기초하여 영재학교, 영재학급 그리고 전국 대학교 부설 과학영재교육원 및 각 시도별 과학영재교육원에서 실시하는 영재교육 대상자를 초·중·고등학교에 재학 중인 학생의 5%정도 까지 확대할 예정이다. 또한 각 시도 교육청별로 방학기간을 이용하여 초·중학교 선생님들을 대상으로 영재교사 직무연수를 실시하여 영재교육 전문가를 꾸준히 양성하고 있다. 하지만 2005년 아주대학교에서 영재교사 직무연수를 받고 있는 중학교 수학교사 38명을 대상으로 설문조사를 한 결과 연수에 참여한 교사 중에 현장에서 영재교육을 실시한 경험이 있는 교사는 약44% 정도로, 영재교사 직무연수를 받는다고 해도 현장에서 영재를 지도하는 경험을 하기는 어려운 실정이다. 또한 영재수업을 진행한 경험이 있는 선생님들도 영재 수업교재와 내용이 매우 부족해 어려움을 느끼고 있으며, 수업내용도 전문가에 의해 검증된 교육과정을 따르지 않고 수업시간마다 지도교사의 판단에 따라 준비 되는 것으로 조사되었다.

영재교사의 양성과 영재교육 대상 학생의 증가 등 영재교육의 양적 확대와 함께 영재교육이 안정적으로 정착되기 위해서는 체계적인 영재교육과정의 개발과 함께 실제 수업현장에서 수업을 진행하는 실질적인 예시로서의 교육방법, 교육내용에 대한 연구와 개발이 필요하다.

---

* ZDM 분류 : D44
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 수학영재, 교사의 발문과 학생의 반응

2. 연구의 목적

영재아는 자신의 관심분야에 대해 강한 지적 호기심을 보이며, 자신이 알고 있는 지식에서 출발하여 상위단계 지식으로의 확대 및 심화에 관심을 보이는 특징이 있다. 따라서 기초 개념으로부터 내용을 점진적으로 심화하고 심화하여 하나의 중요 개념 혹은 정리로의 확장, 즉 그 개념 혹은 정리를 만든 수학자의 사고과정을 경험하게 하는 재발견 학습이 영재교육에 적합하다고 판단된다. 이와 같은 학습 방법은 수학의 개념을 위계적 구조로 구성하여 학생들에게 제시되는데, 수학 영재를 위한 프로그램에 있어서의 수업 접근방법에 대하여 NCTM(1986)은 "수학적으로 재능이 있는 학생들은 보다 높은 수준의 교육내용과 폭넓고 깊이 있는 수학적인 관점을 제시하는 프로그램에 참여하도록 해야 한다"는 의견을 제시했다. 수학은 교과목의 특성상 초 · 중 · 고등학교 수학에서 일반 교육과정에서 교수되는 기본적 개념들을 기초로 하여 연관성을 유지하면서 심화 · 발전시키는 위계적 구조로 학생들에게 제시될 때 영재아들의 지적 호기심을 충족시킬 수 있다.

본 연구는 초 · 중 · 고등학교에서 배우는 수학의 여러 가지 기초개념으로부터 출발하여 보다 심화된 개념으로 연결되는 수학적 개념의 위계적 구조를 개발하고 교사의 심화 발문을 통해 학생들이 이에 따라 사고과정을 밟아 가는 수업내용 및 방법을 제시하는데 목적이 있다.

Ⅱ. 본 론

수학 영재 학생들을 위한 학습 프로그램의 개발에 있어서 구자억(1999)은 심화 학습 프로그램의 유형에 따라 다음의 네 가지 방법을 제시하였다. 그 내용은 첫째, 교육과정의 연속적인 체계에서 학년 제한을 뛰어 넘어 능력에 맞는 내용으로 구성하여 제시하는 방법, 둘째 확인된 영재성의 종류에 따라 유형별로 분류된 교육 내용을 연속적으로 다루는 방법, 셋째 일반 교육과정에 특정한 제재를 확장 또는 관련 특별과정을 부과하는 방법, 창의력 신장을 위한 아이디어 산출을 장려하는 방법 등이 있다.

본 연구에서는 하나의 기초 개념을 교육과정의 연속적인 체계에서 한 단계 높은 수준의 개념으로 심화 · 확장하는 지식의 위계적 구조를 설계하고, 학생들이 기초개념에서 상위 개념으로 지식을 심화 · 확장하는데 교사의 발문이 어떤 역할을 하는지를 알아보고자 한다. 즉, 학생들은 교육과정에 대한 수업내용에서 교사의 심화 발문에 대한 답을 하는 과정을 통해 지식의 상위 개념으로 심화 · 확장된다. 이와 같은 수업 방법은 영재교육 뿐 만아니라 일반 수업에서도 사용할 수 있도록 하기 위해 학생들이 각 학년에서 배우는 내용으로 수업을 시작하였다.

1. 초등 영재 교육 지도안

가. 수업대상 : 경원대학교 과학영재교육원 초등 수학반

수업은 3시간 동안 진행되었으며, 하나의 주제에 대해 깊이 있는 토론을 하기에는 시간이 부족하여, 수업 이후에는 인터넷 메일을 이용해 질문과 대답이 이어졌다. 교사의 발문에 대한 답변 과정을 거쳐 원하던 결론에 도달한 학생은 모두 3명이고 나머지 12명의 학생은 결론에 도달하지는 못했지만 높은 성취도를 보였다.

나. 수업내용 : 경우의 수 구하기

수업 내용은 학생들이 일상생활에서 일어나는 다양한 사건들을 특정 기준에 따라 분류하거나 이에 대한 수량적인 정보를 제공하는 '경우의 수 구하기'로 정하였다.

다. 선수학습 내용

자연수 수열, 자연수 수열의 합, 순열과 조합의 정의와 간단한 예

라. 개념의 위계적 구성

수업 내용은 여러 개의 주사위를 던질 때 나타나는 경우의 수를 구하는 방법으로 정하고 주사위의 개수를 차례대로 늘려가며 심화된 결과를 얻고자 하였다.

기초개념 : 순서를 고려할 때의 경우의 수

심화개념 : 순서를 고려하지 않을 때의 경우의 수

마. 수업의 실제

정의 :

시행-어떤 일이 일어날 가능성을 알아보기 위하여 실험 또는 관찰하는 행위

사건-실험이나 관찰에 의해 발생하는 결과

경우의 수-어떤 사건이 일어나는 가짓수

주사위 던지기

-순서를 고려할 때의 경우의 수-

[질문1] 한 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.

[질문2] 한 개의 주사위를 던질 때 홀수의 눈이 나오는 경우의 수를 구해보자.

[질문3] 색깔과 크기가 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.

[질문4] 색깔과 크기가 다른 세 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.

[심화 발문1]

색깔과 크기가 다른 n개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.

-순서를 고려하지 않을 때의 경우의 수-
[질문5] 모양이 같은 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.
[질문6] 모양이 같은 세 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수를 구해보자.

[심화 발문2]

모양이 같은 주사위 n개를 던질 때, 나타나는 경우의 수를 구해보자.

수업을 듣는 15명의 학생이 모두 순서를 고려할 때, 또 순서를 고려하지 않을 때의 경우의 수를 구하고 [질문1]에서부터 [질문6]까지 정확한 답을 말하였다.

나온 결과의 순서를 고려하면서 주사위를 던질 때의 경우의 수는 각각의 경우를 곱에 법칙에 의해 계산하여 심화된 식 6^n을 어렵지 않게 구하였다. 심화단계로 진입하기 전에 학생들과 경우의 수에서 순서의 개념에 대한 토론을 통해 한 단계 위로 지식의 확장을 위한 준비를 하였다. [질문5]에 대해 학생들은 연습장에 모든 경우를 직접 쓴 다음에 같은 경우를 지우는 방법으로 21가지의 경우가 나타남을 발견하였다. 이 결과와 [질문3]에서 얻은 결과인 36가지의 차이점을 생각해 보고 발표하고, 토론하면서 순서에 대한 개념을 명확히 하였다. 이와 같은 방법으로 일부 학생들은 [질문6]에 대한 경우의 수 56가지를 찾아 그 답의 정확성에 대해 모든 학생들이 함께 검토하였다.

[심화 발문2]는 [심화 발문1]의 결과에 순서 개념이 도입되어 심화된 식을 얻기가 쉽지 않다. [심화 발문2]에 대한 학생들의 반응을 살펴보면, 연습장에 모든 경우를 적어 가며 찾으려고 시도하는 학생들로부터, 지금까지 구한 세 개의 수 6, 21, 56 의 규칙성을 찾으려고 시도하는 학생까지 매우 다양하게 나타났다. 여기서 심화 발문에 대한 학생들의 반응이 그 개념 혹은 수학적 사고력의 수준에 따라 매우 다양하게 나타고 있음을 알 수 있었고, 이와 같은 다양한 반응을 영재 판별의 도구로 사용할 수 있는지에 대한 연구가 필요함을 실감하였다.

3시간의 수업시간 동안에 2명의 학생이 순서가 없을 때의 경우의 수가 전 시간에 배운 조합(Combination)과 관련 있을 것이라는 가정단계까지 도달하였으나 심화된 식을 얻기에는 시간이 부족하여 과제로 제시하였다. 과제의 제시는 영재의 특성 중 과제 집착력을 측정할 수 있는 매우 효과적인 도구로 15명의 학생 중에서 과제를 제출한 학생은 A, B, C 등 3명이었다.

제출한 결과는 모두 순서가 없을 때의 경우의 수에 대한 심화된 식을 정확히 찾아냈는데, 그 결과를 찾는 과정과 방법은 학생마다 차이점을 보였다. 다음에 보이는 세 학생의 풀이는 심화 발문이 학생들의 사고력 향상에 어떤 영향을 주는가에 대한 좋은 예시가 될 것이다.

A 학생의 풀이

파스팔의 삼각형	**조합을 이용한 표현**
1	${}_{0}C_{0}$
1 1	${}_{1}C_{0}$ ${}_{1}C_{1}$
1 2 1	${}_{2}C_{0}$ ${}_{2}C_{1}$ ${}_{2}C_{2}$
1 3 3 1	${}_{3}C_{0}$ ${}_{3}C_{1}$ ${}_{3}C_{2}$ ${}_{3}C_{3}$
1 4 6 4 1	${}_{4}C_{0}$ ${}_{4}C_{1}$ ${}_{4}C_{2}$ ${}_{4}C_{3}$ ${}_{4}C_{4}$
1 5 10 10 5	$\underline{{}_{5}C_{0}}$ ${}_{5}C_{1}$ ${}_{5}C_{2}$ ${}_{5}C_{3}$ ${}_{5}C_{4}$
$\underline{6}$ 15 20 15	$\underline{{}_{6}C_{1}}$ ${}_{6}C_{2}$ ${}_{6}C_{3}$ ${}_{6}C_{4}$
$\underline{21}$ 35 35	$\underline{{}_{7}C_{2}}$ ${}_{7}C_{3}$ ${}_{7}C_{4}$
$\underline{56}$ 70	$\underline{{}_{8}C_{3}}$ ${}_{8}C_{4}$
$\underline{126}$	$\underline{{}_{9}C_{4}}$

파스칼의 삼각형에서 찾은 결과를 조합을 이용한 표현에서 n개의 주사위를 던질 때 나타나는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_{5+n}C_{n} $$

앞 내용은 A학생이 서면으로 제출한 과제를 한글 문서로 작성한 것으로, 수업시간에 주사위의 개수를 늘려가며 발견한 세 개의 수 6, 21, 56 을 파스칼의 삼각형에서 찾고, 파스칼의 삼각형에 사용한 수를 조합으로 표현하는 방법으로 일반해를 발견하였다. A 학생의 풀이가 다른 두 명의 풀이와 구분되는 점은 이 학생이 몇 번의 시행에서 얻은 결과가 적용되는 예를 찾고 이를 이용해 일반해에 접근했다는 점이다.

과제의 내용에 대하여 면담을 한 결과 A학생은 파스칼의 삼각형의 구성 원리와 이전 수업시간에 다룬 조합의 정의에 대하여는 정확하게 이해하고 있었지만, 순서 개념의 유무에 따른 순열과 조합의 차이를 이해하는 단계까지는 이르지 못하였다. 과제를 수행하면서 주사위를 던질 때 나타나는 경우의 수와 파스칼의 삼각형과의 연관성에 많은 관심을 가지게 되었다고 설명했다.

B 학생의 풀이

어렵게 찾은 식 :

$_{n+5}C_n$
(n+5개중에서 n개 선택하는 경우의 수)

대입:

n=1일때 $_6C_1 = 6 / 1 = 6$

n=2일때 $_7C_2 = 7*6 / 2*1 = 21$

n=3일때 $_8C_3 = 8*7*6 / 3*2*1 = 56$

n=4일때 $_9C_4 = 9*8*7*6 / 4*3*2*1 = 126$

n=5일때 $_{10}C_5 = 10*9*8*7*6 / 5*4*3*2*1 = 252$

n=6일때 $_{11}C_6 = 11*10*9*8*7*6 / 6*5*4*3*2*1 = 462$

n=7일때 $_{12}C_7 = 12*11*10*9*8*7*6 / 7*6*5*4*3*2*1 = 792$

n=8일때 $_{13}C_8 = 13*12*11*10*9*8*7*6 / 8*7*6*5*4*3*2*1 = 1287$

위 내용은 B학생이 메일로 보내온 보고서이다. 학생이 제출한 답에서 $n=3$까지의 과정은 수업시간에 학생들의 발표를 통해 확인되었고, 이후의 과정은 직접 계산하여 풀었다기보다 6, 21, 56의 수의 배열에서 규칙성을 발견하여 계산한 결과이다. 풀이과정에 쓰인 조합(Combination)은 전 단계 수업에서 다룬 이항정리를 설명하면서 각 항의 계수가 조합으로 표현됨을 설명하고, 간단한 응용문제를 제시하여 학생들이 풀어본 경험이 있다.

B 학생이 제출한 과제는 세 수 6, 21, 56 가 $_{n+5}C_n$의 결과임을 보였으나 왜 그런 결과가 나왔는지에 대한 설명은 없다. 실제 차시 수업시간에 면담을 통해 이 식을 얻게 된 과정을 물어 보았을 때, 단순히 6, 21, 56 의 세 수를 조합으로 표현할 수 있음을 알게 되어 일반항을 구할 수 있었다고 말했다. 이는 순서개념에 입각해서 조합과의 연관성을 찾는 과정을 거친 것이 아니라 풀이를 찾는 중에 우연이 개입된 결과라 판단된다. 그럼에도 B 학생은 순서 개념에 따른 순열과 조합의 차이점을 이해하고 있었고, 순열과 조합이 쓰이는 간단한 사례를 정확하게 제시하고 설명하는 것으로 보아, 이와 같은 결과를 이후의 심화수업과 연계하면 보다 높은 단계의 심화개념을 습득하는데 도움이 될 것으로 판단된다.

C 학생의 풀이

주사위 여러개를 동시에 던질 때 나올 수 있는 경우의 수 구하는 공식

1. 눈이 1부터 6까지 있는 주사위를 n개 던져서 나오는 경우의 수는 1 부터 6까지 써있는 구슬들을 주머니에서 중복해서 n개 꺼내어 순서에 관계 없이 만드는 수의 조합과 같다.

2. 그러므로 중복조합을 푸는 방법으로 주사위 n개를 던질 때 나오는 모든 경우의 수를 구할 수 있다.

3. 중복조합 푸는 방법 예

주사위 2개를 던진다고 가정을 하면 당연히 중복은 2개까지 허락을 해야한다.

중복 허락을 2개라고 하면 ○를 2개 그리고 그 왼쪽에 칸막이 ㅣ를 5개 그린다. ㅣ를 5개 그리는

까닭은 숫자가 6개가 있으니까 총 5개의 칸막이가 필요하기 때문이다.

ㅣㅣㅣㅣㅣ○○은 6을 2개 나타낸다고 가정을 하자. 그러면 2와 5가 나온 경우는

ㅣ○ㅣㅣㅣ○ㅣ라고 표시를 할 수있다.

그러므로 위 문제의 경우의 수는 7개의 숫자(칸막이도 숫자라고 본다)를 배열한 경우에서 중복되는 경우를 제외하면 되므로 7! / 5! x 2! 이 된다.

4. 주사위 n개를 던질때는

(n+5)!/n! x 5! 로 하면 주사위 n개를 던질 때 나올 수 있는 경우의 수를 구할 수 있다.

B 학생의 풀이가 수의 규칙성을 발견하고 조합을 이용해 표현하는데 그쳤다면, C 학생의 풀이는 선수학습을 통해 익힌 중복조합의 개념을 도입해서 그 연관성을 밝혔다는 면에서 서로 상이한 접근방법을 보여주고 있다. 즉, 결과만을 제시한 것이 아니라 순서개념을 도입해서 구슬을 주머니에서 꺼내는 경우와 비교하였다는 것에서 큰 의미를 찾을 수 있다. 하지만 면담활동을 통해 과제의 풀이과정에 대해 조사하는 과정에서 조합과 중복조합의 의미를 정확하게 구분하지 못하는 부분이 있어 많은 부분 제3자의 도움을 얻어 과제를 수행한 것이 아닌가 하는 생각이 든다. 반면에 학생들에게 풀이를 제시하고 설명하는 과정에서 중복조합을 새롭게 소개하는 역할을 해서 다른 학생들의 호기심을 자극했다는 점은 좋은 평가를 받을 만하다.

위에서 살펴본 바와 같이 교사의 심화 발문에 대해 초등 영재아가 제시하는 답의 유형은 학생의 과제집착력, 선수학습 정도, 유사 개념의 연관성을 이해하는 능력에 따라 매우 다양하게 반응하고 있음을 알 수 있다. 특히 영재아가 보여주는 과제 수행 능력에서 수평적 구조로 구성된 수학교육과정의 내용에 대한 이해여부는 큰 제한 점이 되지 않고 있음을 알 수 있다.

2. 중등부 영재교육의 실제

가. 수업대상 : 아주대 과학영재교육원 중등수학 심화반

수업은 3시간 동안 진행되었고 유크리드 원론에 적힌 직선의 정의에서 출발하여 직교좌표에의 도입과 한 점에서의 접선의 결정조건에 이르는 직선의 계통도를 만들고자 하였다.

나. 수업내용 : 직선의 결정 조건

다. 개념의 위계적 구성

직선의 결정 조건은 유크리드 원론에서 출발하여 미분의 접선에 이르기 까지 그 발달 과정이 곧 수학의 발달과정과 큰 연관을 맺고 있어 개념의 단계에 따라 위계적으로 구성하여 학생드에게 제시될 때 수업의 효과가 더욱 높아질 것으로 기대된다.

기초개념 : 직선의 결정 조건(유크리드 원론, 직교좌표 평면)

심화개념 : 접선의 결정 조건

라. 수업의 실제

직선의 정의 - 유크리드 원론 제1권

2. 선은 나비(폭,두께)가 없는 것이다.

4. 직선이란, 그 위의 점에 대해서 균일하게 가로놓인 선이다. (그 위의 모든 점이 곧게 놓여 있는 것이다.)

[질문1] 유크리드 기하학에서 직선의 결정 조건을 말해 보아라.

[질문2] 직교좌표의 도입의 의미와 직교좌표에서 직선의 결정조건을 말해 보아라.

[심화 발문1]

두 점을 이용하여 한 직선을 결정하는 조건 이외에 하나의 직선을 결정하는 경우가 있는지 생각해 보아라.

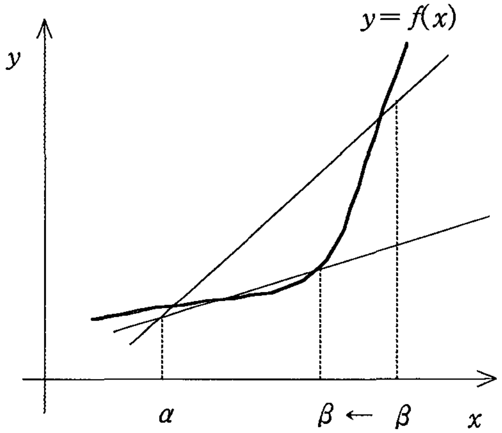
[심화발문1]에서 대부분의 학생들이 주어진 곡선 혹은 원 위의 한 점에서의 접선이 오직 하나로 결정됨을 발견하였다. 특히, 직교좌표에 그려진 원 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 직선의 수직조건을 이용한 풀이를 제시하여 줌으로써 접선의 식을 찾을 수 있음을 인지시켰다.

[심화 발문2] 임의의 곡선이 주어질 때, 곡선 위의 한 점에서의 접선이 결정되는 조건을 말해 보아라.

[심화 발문2]는 [심화 발문1]에서 원과 같이 접선의 식을 찾을 수 있는 특별한 경우에서 이를 심화시켜 곡선에서의 접선을 어떻게 구할지에 대한 의문을 학생들에게 제시한다.

학생들이 [심화 발문2]에 대한 나름대로의 답을 연습장에 적도록 한 후에 서술한 내용을 검토해본 결과 18명의 학생 중에서 7명이 접점의 x좌표 α 외에 곡선 위의 다른 점의 x좌표 β를 잡아 직선을 결정한 후에 β를 α에 가까이 보내서 접선과 근사한 직선을 찾을 수 있다고 서술하였다. 이는 학생들 스스로가 접선의 식을 구하기 위해서는 '한없이 가까이 보내는' 극한 개념이 필요함을 발견했다는데 적지 않은 의미가 있다.

D 학생의 풀이



함수 $f(x)$ 위의 점 α에서의 접선의 식을 구하기 위해서는 이 점에서의 접선의 기울기를 알아야 한다. 함수 $f(x)$위의 점 β_1 $(\neq\alpha)$를 잡고 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta_1,\ f(\beta_1))$을 지나는 직선의 기울기 m_1를 구하면

$$m_1 = \frac{f(\beta_1) - f(\alpha)}{\beta_1 - \alpha}$$

이 때, x축 위의 점 β_1을 α 방향으로 이동시킨 점 β_2 에서의 접선의 기울기 m_2를 구하면

$$m_2 = \frac{f(\beta_2) - f(\alpha)}{\beta_2 - \alpha}$$

기울기 m_1 보다 기울기 m_2가 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기에 더 가까워짐을 알 수 있다. 따라서, 이와 같은 방법으로 x축 위의 점 β_i를 계속 α에 근접시키면 접선의 기울기에 매우 근사한 값을 구할 수 있다.

D을 포함해서 [심화발문2]에 대하여 극한개념의 필요성을 인식한 7명의 학생들이 제시한 풀이과정에도 '두 점을 근사시킨다'는 개념에 대한 정확한 표현을 한 학생은 없었다. 하지만 아직

미분개념을 공부하지 않은 중학교 2학년 학생들이 접점 $A(\alpha, f(\alpha))$ 이외에 다른 점 $B(\beta, f(\beta))$를 잡고 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 계산하고, x축 위의 점 β를 α에 접근시키는 방법을 생각해 냈다는 것은 매우 의미가 있다고 판단된다.

미분이 가능한 임의의 함수 위의 임의의 점 x_1에서의 접선의 식을 유도하는 과정을 학생들에게 제시하여 주고 간단한 예로 포물선 $y=x^2$ 위의 한 점 $(1, 1)$에서의 접선을 구하는 과정을 설명하면서 간단한 미분개념을 학생들에게 소개하였다.

[심화 발문3]

주어진 곡선 위의 임의의 한 점에서의 접선을 구하는 식을 이용하여 해결할 수 있는 문제를 말해 보아라.

[심화 발문3]은 [심화 발문2]에서 발견한 극한 개념과 함수식을 이용하여 미분개념의 도입단계를 학생들에게 설명한 후에 제시하였다. [심화 발문2]는 미분의 개념을 이용하는 방법에 대해 학생들의 다양한 대답을 유추하기 위한 질문이다. [심화 발문2]에 대해서는 대부분의 학생들이 극한 개념의 필요성을 지적했고, 이를 이용한 미분개념에 대해 이해하였다.

[심화 발문3]에 대한 답을 문제지에 서술하도록 하였는데, 18명의 학생 중에서 D 학생을 포함해 6명의 학생들이 곡선의 극점에서 접선의 기울기가 0이되는 성질과 접선의 기울기가 일정한 구간에서 양수 혹은 음수가 됨을 이용하여 함수의 증가와 감소를 알 수 있음을 발견했다.

[심화 발문4]

인수분해가 되지 않는 복잡한 고차방정식의 해를 구하는 방법을 설명하여라.

[심화 발문4]은 고등학교 과정에서 배우는 미분개념을 넘어서는 내용으로 [심화 발문3]에 대하여 정확한 답을 제시했던 6명의 학생들 중에서도 [심화 발문4]에 대한 답을 제시한 학생이 없었다. 그러면서도 인수분해가 되지 않는 고차방정식의 해를 어떤 방법으로 구할 것인지에 대한 발문에 학생들의 반응이 높아 [심화 발문4]를 '주제탐구과제'로 학생들에게 제시하였다. 과제 제출은 인터넷 홈페이지를 이용하였는데, 위에서 [심화 발문2]에 대한 답을 제시했던 D 학생이 '뉴튼방법(Newton Method)'를 사용하여 해결하는 방법을 제시하였고, 다른 2명의 학생은 고차방정식을 함수로 변환하여 함수 값의 부호를 이용하여 해의 위치를 찾는 방법을 제시하였다.

3. 고등부 영재수업의 실제

가. 수업 대상 : 경기과학고 1학년

현재 우리나라에서 운영 중인 과학영재교육원은 초·중등학생만을 대상으로 하고 있으며, 고등학생을 대상으로 하는 영재교육은 한국영재학교나 특수목적고에서 정규 수업시간을 통해 이루

어지고 있다. 따라서, 고등학생을 대상으로 하는 영재수업 모델의 개발은 고등학교 교육과정의 수업과 병행하여 진행하였고, 대상학생은 경기과학고 1학년 2개 반 39명이다.

나. 수업 단원

단원 수학 10-가

소단원 :Ⅱ-4. 인수분해

다. 개념의 위계적 구성

수학10-가에서 다루는 인수분해를 정수의 소인수 분해와 연관시켜 인수분해 되지 않는 기약다항식과 소수의 성질을 비교해 보고 기약다항식을 이용해 정수론에서 다루는 패르마 소수를 유도하고자 하였다.

기초개념 : 다항식 x^2+1의 인수분해

심화개념 : 다항식 $x^{2^k}+1$의 인수분해

라. 수업의 실제

인수분해의 정의 - 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해한다고 한다.

예를 들어, $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

인수분해는 다항식의 전개를 거꾸로 생각한 것으로 곱셈 공식을 이용하여 인수분해 공식을 얻을 수 있다. 예를 들어, 다항식 $2ax^3-16ay^3$을 인수분해하면

$$2ax^3-16ay^3=2a(x^3-8y^3)=2a\{x^3-(2y)^3\}=2a(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

인수분해는 실수범위에서 분해할 수 있는 데까지만 인수분해 한다. 예를 들어,

x^2-1 은 $(x-1)$과 $(x+1)$ 의 곱으로 인수분해 되지만, x^2+1 은 더 이상 인수분해 되지 않는다.

[심화 발문1]

x^3-1 은 $(x-1)(x^2+x+1)$로 인수분해 되고, x^4-1 은 $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$로 인수분해 된다. 이와 같은 사실로부터 임의의 자연수 n에 대하여 x^n-1 은 항상 인수분해 된다고 할 수 있는가? 또, 인수분해 된다면 이를 증명하여라.

다항식 x^n-1 이 항상 인수 $(x-1)$을 가짐은 조립제법을 이용하여 증명할 수 있고 학생들이 다른 의견을 제시할 경우 그에 대한 증명을 해 본다. [심화 발문1]은 수업을 듣는 학생 전

체를 대상으로 한 질문으로 간단한 다항식의 인수분해를 통해 규칙성을 발견하는 경험을 갖게 할 목적으로 제시되었다. 실제 수업을 듣는 39명의 학생들 대부분이 x^n-1 꼴의 다항식이 인수분해 됨을 보였다.

[심화 발문2]

x^2+1 과 x^4+1 이 인수분해 되지 않고, x^3+1 과 x^5+1 은 각각 $(x+1)(x^2-x+1)$ 과 $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$로 인수분해 됨을 이용하여 임의의 자연수 n에 대하여 x^n+1이 인수분해 여부를 말하여 보아라.

교사의 [심화 발문2] 에 대한 학생의 답을 수업 시간에 얻기에는 시간이 충분하지 않다. 이와 같은 내용은 교육과정을 벋어나기 때문에 모든 학생들을 대상으로 제시하기는 하지만 과제로 부여할 수는 없다. 따라서 [심화 발문2]에 호기심을 보이는 학생들을 대상으로 방과 후 활동으로 그 풀이를 진행하며 나온 결과를 수업시간에 발표하는 방법으로 진행했다. 이와 같은 수업 방법은 우수한 학생들의 호기심을 자극하면서 동시에 다른 학생들에게도 동기를 부여하는 효과가 있음을 발견하였다.

다음은 방과 후 개인적인 질문과 답변을 통해 1학년 E 학생이 제시한 내용이다. 처음에 홀수인 경우에 조립제법을 이용하여 항상 $x+1$을 인수로 가짐을 보였고, 짝수인 경우에는 이후 몇 번의 검토과정을 거쳐 풀이를 작성하였다.

E 학생의 풀이

x^n+1 의 인수분해

1> n이 홀수 일 때

$n=2k+1$ 이라 하면

$x^n+1=x^{2k+1}+1$ $x=-1$을 대입하면 0이 되므로 조립제법을 사용하면

x^n+1 은 $x+1$ 의 인수를 갖는다.

2> n이 짝수 일 때

㉠ n 이 홀수인 인수를 가질 때

$n=2^m\cdot(2p+1)$ 이라 하면 (단, $m\geq 1$, $p\geq 1$)

$x^n+1=x^{2^m\cdot(2p+1)}+1=(x^{2^m})^{2p+1}+1=X^{2p+1}+1$ 로 인수분해 된다.

㉡ n 이 홀수인 인수를 갖지 않을 때
이는 n이 2의 거듭제곱 꼴로 표현된다는 의미이다. 즉
$x^n+1=x^{2^k}+1$ 인 경우에 인수분해 되지 않는다.

[심화 발문 3]

자연수 p이 소인수분해되지 않을 때, p을 소수라 한다. 인수분해 되지 않는 다항식과 소수의 성질을 비교해 보자. 특히 $x^{2^d}+1$ 에서 $x=2$ 인 경우 즉, $2^{2^n}+1$ 의 성질에 대해 말해 보아라.

$2^{2^n}+1$ 은 'Fermat 수'라 하고 $F_n=2^{2^n}+1$ 로 표현하며, F_n이 소수일 때 이 수를 Fermat 소수라 함을 설명하고 페르마 수의 성질을 증명해 보았다.

1> $F_n-1=(F_{n-1}-1)^2 \quad (n\geq 1)$

2> $F_n-2=F_0F_1\cdots F_{n-1} \quad (n\geq 1)$

3> $m< n$ 이면 $(F_m,\ F_n)=1$

$x^{2^d}+1$꼴의 수가 인수분해 되지 않는 성질을 유지하기 위해서는 x의 값이 2일 수밖에 없다. 즉, $2^{2^d}+1$ 꼴의 수가 x^n+1 꼴의 수들 중에서 인수분해 되지 않는 대표적인 수가 됨을 알 수 있고, 이와 같은 과정을 거쳐 패르마 수가 만들어지지 않았을까 하는 추측을 해 보았다. 현재 x^n+1 꼴과 다른 형태의 인수분해 되지 않는 다항식을 이용해 패르마 수와 유사한 성질이 있는지 확인하는 과정을 진행 중이다.

Ⅲ. 결 론

초·중·고등학교 영재학생들을 대상으로 수업을 진행한 결과 영재학생들은 자신이 알고 있는 개념과 연관되면서도 상위 단계인 심화 개념에 많은 호기심을 나타내며, 학생들의 사고를 기초 개념에서 심화 개념으로 이끄는 교사의 발문에 따라 다양한 수준의 반응이 나타남을 알 수 있었다. 교사가 제시하는 심화 발문은 중요한 수학 개념을 만든 수학자들의 사고과정을 따라 학생들이 재발견하도록 방향을 제시하는 역할을 하여 학생들이 공부하는 과정에서 수학자들이 가졌던 지적 성취감을 느낄 수 있도록 도와준다. 하지만 보통 15명에서 20명 사이의학생들을 대상으로 진행한 수업에서 교사의 [심화 발문]에 반응하여 결과를 제시하는 학생은 평균 3명 정도로 매우 적게 나타났다. 이는 교사의 발문에서 생긴 지적호기심을 지속적으로 유지하여 일정한 결과물을 만들고자 하는 학생들의 과제 집착력이 크게 작용한 것으로 판단된다.

영재를 대상으로 한 수학수업은 단순히 수평적 구조로 연관된 개념을 제시하는 것만으로는 적당하지 않다. 수업시간 혹은 방과 후 시간에도 지속적으로 지적 호기심을 유지하며 탐구활동을 지속할 수 있는 수업 내용 및 방법이 영재교육에 보다 효과적이라 판단된다. 본 연구는 수학의 각 개념을 기초에서 심화단계로 이끄는 위계적 구조로 구성하고, 교사의 심화발문을 통해 학생들이 수학자의 사고과정을 거치도록 하여 지적 성취감을 갖도록 하는 수업 모델을 제시한 것이다. 현재 초 · 중 · 고등학교에서 배우는 중요 수학 개념 혹은 내용을 위계적 구조로 구성하는 연구를 진행하고 있으며, 개발된 내용을 직접 수업에 투입하여 학생들의 다양한 반응을 연구하고자 한다.

참 고 문 헌

남승인 (2005). 수학적 유망성이 있는 학생을 위한 프로그램 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **19(3)**, pp. 557-569.

김종득 외 (2004) 과학영재학교 우수교원 확보를 위한 영재교육 관련법 개선 방안, 영재교육연구 **14(2)**.

최호성 (2003). 중등 영재 판별과 교육 프로그램의 비판적 검토, 영재교육연구 **13(4)**.

변은진 (2001). 개방형 문제를 활용한 평가가 수학적 창의력에 미치는 효과, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>

송상헌 (2000). 수학 영재아들을 위한 행동특성검사지의 개발과 활용에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학>.

구자억 (1999). 영재교육과정 개발 연구(초 · 중학교 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구), 한국교육개발원.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

이무현 역 (1997). 기하학 원론, 교우사

조석희 (1996). 영재교육의 이론과 실제, 한국교육개발원

조석희 (1993). 고등학교 과학영재 판별도구 개발(창의적 과학 문제 해결력 검사), 한국교육개발원.

http://www.math.sc.edu/cgi-bin/sumcgi/Newton.pl

A Study on the gifted classes model using deepening questions

Bang, Seung-Jin
Dept. of Math., Ajou Univ., San 5 Woncheon-dong, Yeongtong-gu, Suwon, Gyeonggi 402-751, Korea
E-mail: emath@naver.com

Choi, Jung-oh
Kyunggi Sci. High Sch., Songjuk-dong, Jangan-gu, Suwon, Gyeonggi 440-210, Korea
E-mail: setfree1@hanmail.net

Gifted students in elementary, middle and high schools require a specialized curriculum to foster their mathematically gifted natures. Questions that stimulate the teacher's intellectual curiosity, student reactions and methods pertaining to content organization and problem formation are the main foci.

* ZDM Classification : D44
* MSC2000 Classification : 97D40
* Key Word : Questions of teacher's and student reactions