

2단계 시리얼 시스템의 Fill Rate 만족 방안

†권익현* · 김성식**

Two-stage Serial Supply Chains under Fill Rate Constraints

Ick-Hyun Kwon* · Sung-Shick Kim**

■ Abstract ■

In this paper, we investigate the problem of minimizing average inventory costs subject to a fill rate constraint in a two-stage serial inventory model with a normally distributed demand. Fill rate is the fraction of demand that is satisfied immediately from on-hand inventory. We first find the lower bounds of base-stock levels in each node by using the exact base-stock level that satisfies a fill rate in a single node model proposed by Sobel. And then, we extensively analyze the system and show that the cost function is convex. Using such convexity and some other useful properties, we can easily find optimal base-stock levels numerically.

Keyword : Two-stage Serial Inventory System, Fill Rate, Base-stock, Normally Distributed Demand

1. 서 론

오늘날 기업은 유통구조의 다양화로 인한 물류 제반환경의 변화에 적응하고 치열한 시장경제 체제에서 살아남기 위하여 원가절감의 중요성을 절감하고 있다. 정보기술의 발전으로 인터넷이나 인트라넷

등의 정보 인프라의 확대로 가능해진 정보공유에 대한 필요성이 증가하였고, 이에 따라 VMI(vendor managed inventory)나 ECR(efficient consumer response) 등이 광범위하게 논의되어져 왔다. 또한 불과 10년 전의 사업 환경과 비교하여도 기업에 있어서 다양해진 고객의 욕구에 부응하기 위해 요

논문접수일 : 2005년 10월 17일 논문게재확정일 : 2006년 3월 10일

* 고려대학교 정보통신기술연구소

** 고려대학교 산업시스템정보공학과

† 교신저자

구되어지는 제품의 수는 기하급수적으로 증가하게 되었다.

빠른 시간 안에 고객의 욕구를 만족시키는 제품을 만들어내기 위하여 대부분의 기업들은 세계 전역을 대상으로 생산, 판매, 개발 등의 글로벌 비즈니스를 수행하고 있다. 공급자 중심에서 수요자 중심의 경제 전환 이후에 이러한 대세는 이미 모든 제조 산업으로 확산되었다. 기업간 제품 제조 기술의 보편화와 섬유, 전자, 자동차, 조선 등 모든 산업에서의 세계적 공급 과잉은 고객이 필요로 하는 제품을 빠른 시간 내에 제공할 수 있는 기업만이 생존할 수 있게 되었다. 제조업체들은 이러한 급변하는 시장에 빠르게 대응하고 무한경쟁에서 생존하기 위해 끊임없는 제조공정 및 기업운영의 혁신을 추진하고 있고, 이로 인해 공급사슬 관리(supply chain management; SCM)에 대한 관심은 증가되고 있다 [5, 6, 20].

본 논문에서는 이와 같이 최근 주목받고 있는 SCM의 대표적인 분야 가운데 하나인 공급사슬의 재고 관리 문제를 다루도록 한다. 이를 위해 고객의 수요는 확률적인 형태로 발생하며 주기적 재고 조사(periodic review) 정책에 따라 운용되는 2단계 시리얼(serial) 시스템을 대상으로 하여 목표로 하는 고객에 대한 서비스 수준을 만족시키면서 동시에 전체 시스템에서 발생하는 재고유지(holding) 비용의 총합을 최소화하는 각 노드별 기초 재고 수준(base-stock level)을 결정하는 문제를 다룬다. 이러한 목적의 달성을 위해서는 공급사슬을 구성하는 각 노드의 상관관계와 재고 정책이 전체 시스템에 미치는 영향에 대한 분석이 필요하다. 논리적 접근과 더불어 시뮬레이션을 통한 다양한 실험을 통해 공급사슬에 존재하는 이러한 복잡하고 동적인 문제를 해결하고자 한다.

Clark and Scarf[7]의 연구 이래로 재고유지 비용과 재고이월 비용(backorder cost)의 합을 최소화하는 문제는 많이 다루어져 오고 있다. Van Houtum et al.[19]은 이와 관련된 연구를 정리하여 발표하였으며, 비교적 최근에는 Diks and de Kok[9]에 의해

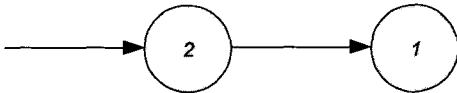
다단계 분배형 네트워크에서 주기적 재고 조사, 기초 재고 정책 하에서의 비용 최적화 정책이 제안되었다.

이와 같은 비용 최소화 문제와 비교하여 서비스 수준을 고려하는 연구는 상대적으로 드문 실정이다 [2]. Diks et al.[8]은 설치 재고(installation inventory)와 계층 재고(echelon inventory)를 중심으로 하여 다양한 수요 분포와 재고 정책 하에서 서비스 수준을 고려하는 기존 연구들을 체계적으로 조사하여 발표하였다. Zipkin[21]은 복합 포아송 분포(compound Poisson distribution)를 따르는 단일 노드에서 fill rate를 표현하였고, 이를 바탕으로 fill rate를 만족시키면서 재고 비용을 최소화하는 방법을 고안하였다. Van Houtum and Zijm[18]은 일량 분포를 따르는 시리얼 및 조립형(assembly) 시스템에서 재고유지 비용과 재고이월 비용의 합을 최소로 하는 기초 재고 수준을 결정하는 방법을 제안하였고, 재고이월 비용을 조정하면서 목표로 하는 서비스 수준을 만족시키는 절차에 대해 간략하게 언급하였다. Boyaci and Gallego[3]는 포아송 분포를 따르는 시리얼 시스템에서 fill rate를 만족시키면서 시스템 내의 재고 비용을 최소화하는 정확한 방법과 근사적인 방법을 함께 제안하였다. 그들은 주어진 fill rate를 만족시키기는 시스템 내의 총재고량에 대한 상한과 하한을 구하였고 이러한 총재고량이 어떠한 노드에 분산되어야 할당되어야 하는가에 대한 관점으로 문제를 해결하였다. Axsäter[2]는 복합 포아송 분포를 따르는 시리얼 시스템에서 비용 최소화 문제를 다룬 Chen[4]의 연구를 fill rate를 만족시키면서 재고유지 비용을 최소화하는 문제로 확장하는 연구를 수행하였다. 그는 몇 가지 가정을 추가하여 혼합된 계층 재고(mixed echelon stock) (R, nQ) 정책이 최적해를 보장함을 증명하였다. Sobel[17]은 감마 분포(gamma distribution)와 정규 분포를 따르는 단일 노드에서 fill rate를 정확하게 표현하였으며 정규 분포일 경우의 근사적인 표현 방법을 제안하였다. 또한 시리얼 시스템에서 fill rate와 각 노드의 기초 재고 수준과의 상관관계를 분석하였으며,

주어진 기초 재고 수준에서 fill rate의 상한과 하한을 구하였다.

2. 기본 모형 및 가정

본 연구에서는 아래의 [그림 1]에서와 같이 단일 제품을 취급하는 Clark-Scarf 형태의 2단계 시리얼 시스템을 대상으로 한다. 상위 노드는 외부의 무한 용량을 갖는 공급자(supplier)로부터 제품을 공급 받아 하위 노드에 분배한다. 하위 노드에서는 고객의 직접적인 수요가 발생하며 만족시키지 못한 수요는 다음 기간으로 이월된다. 수요는 정규 분포(normal distribution)의 형태를 따르며 매기간 독립적으로 발생하는 것으로 가정한다. 또한 기간별 수요는 비음수 조건(non-negative condition)을 만족시켜야 하므로 표준편차는 평균에 비해 충분히 작은 것으로 가정한다. 각 노드는 주기적 재고 조사, 기초 재고 정책에 따라 재고 보충 계획을 수립한다.



[그림 1] 2단계 시리얼 시스템

각 노드의 조달시간은 재고 조사 기간(review period)의 정수배 형태로 정의되며 확정적으로 주어지는 것으로 가정한다. 주문 후에 제품이 도착하기까지는 조달시간 만큼의 시간이 소요된다. 이러한 조달시간이 있음으로 인해 각 노드의 아크 상에는 특정 시점으로 이동 중인 수송중(pipeline) 재고가 존재하게 된다. 이러한 환경 하에서 본 연구는 목표로 하는 fill rate 형태의 고객 서비스 수준(service level)을 만족시키면서 전체 노드에서 발생하는 재고유지 비용(holding cost)의 합을 최소화하는 기초 재고 수준(base-stock level)을 결정하는 문제를 다룬다. Fill rate란 발생한 수요 중에서 해당 노드가 가지고 있는 재고로써 즉시 충족 가능한 량의 비율을 나타내는 것으로, 서비스

수준을 표현하는 방법으로 일반적으로 많이 사용되어 지고 있다[14].

본 연구에서 사용되어지는 기호는 아래와 같다.

- L_j : 노드 j 의 조달시간, $j=1, 2$
- μ : 단위 기간 당 수요의 평균
- σ : 단위 기간 당 수요의 표준편차
- $D(L)$: L 기간 동안의 수요 분포
- β : 목표 서비스 수준(target fill rate)
- h_j : 노드 j 의 재고유지 비용, $j=1, 2$
- I_j : 노드 j 의 on-hand 재고량, $j=1, 2$
- S_j : 노드 j 의 계층 기초 재고 수준(echelon base-stock level), $j=1, 2$

$D(L)$ 은 L 기간 동안의 수요 분포를 나타내므로 평균이 $L\mu$, 표준편차가 $\sqrt{L}\sigma$ 인 정규분포의 형태를 갖는다. 노드 1의 조달시간 동안의 수요는 $D(L_1+1)$ 이고 이에 대한 평균과 표준편차를 각각 μ_1, σ_1 이라 하면 $\mu_1 = (L_1+1)\mu, \sigma_1 = \sqrt{L_1+1}\sigma$ 의 형태로 표현된다. 노드 2의 조달시간 동안의 수요는 $D(L_2)$ 이고 마찬가지로 $\mu_2 = L_2\mu, \sigma_2 = \sqrt{L_2}\sigma$ 로 표현할 수 있다[1]. 재고유지 비용은 $h_1 \geq h_2$ 로 네트워크상의 하위 단계(downstream)에 있는 노드가 상위 단계(upstream)에 있는 노드보다 상대적으로 큰 값을 갖는 것으로 가정한다.

지금까지 본 연구와 동일한 문제를 다룬 연구는 존재하지 않으며, 이와 가장 유사한 연구로 볼 수 있는 Sobel[17]의 연구에서는 재고비용에 대한 고려 없이 주어진 기초 재고 수준에서의 fill rate의 개략적인 범위를 구하였을 뿐이다. 본 연구에서는 먼저 Sobel[17]이 제안한 단일 노드에서의 fill rate를 만족하는 기초 재고 수준을 이용하여 시리얼 시스템의 각 노드에 대한 기초 재고 수준의 하한을 구한다. 다음으로 효과적인 분석 방법을 통해 주어진 문제에 존재하는 몇 가지 중요한 속성(property)을 도출하고, 이러한 속성을 이용하여 최적해를 구하는 방안을 제안한다.

3. 알고리즘

3.1 Fill rate의 표현 방법

지금까지 알려진 전통적인 fill rate를 표현하는 방법은 다양한 문헌(eg, [15, 20])에 나타나고 있고 실제 산업 현장에서도 광범위하게 이용되고 있다 [14]. 그러나 이러한 근사적인 표현 방법은 비교적 간단하지만 실제 fill rate를 정확하게 반영하지 못하는 한계가 있다. 정규 분포에 따라 수요가 발생하는 단일 노드에서의 기초 재고 수준을 S , $(L+1)$ 기간 동안의 수요를 나타내는 랜덤 변수를 u 라 하고 이에 대한 수요 분포를 $f(u)$ 라 하면, 기존의 일반적인 방식으로 fill rate β 를 아래의 식과 같이 표현할 수 있다[14].

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - \int_S^\infty (u-S)f(u)du / \mu \\ &= 1 - \sigma_{L+1} G\left(\frac{S-\mu_{L+1}}{\sigma_{L+1}}\right) / \mu,\end{aligned}$$

where $\mu_{L+1} = (L+1)\mu$, $\sigma_{L+1} = \sqrt{L+1}\sigma$ and

$$G(x) = \int_x^\infty (v-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2) dv$$

위의 fill rate는 $(L+1)$ 기간 동안의 수요의 합을 바탕으로 계산되기 때문에 지난 기간의 재고이월을 중복해서 고려하는 문제점으로 인해 실제 fill rate 보다 낮게 평가하는(underestimate) 결과값을 나타내게 된다[14]. Hadley and Whitin[12], Silver[16], Johnson et al[14] 등은 이와 같은 문제점을 보완하기 위한 근사적인 방법을 개발하였으나 정확한 fill rate를 계산하기에는 여전히 한계가 존재한다[17].

앞서 서론에서 살펴보았듯이 정규 분포를 하는 단일 노드에서 주어진 기초 재고 수준에서의 정확한 fill rate를 구하는 계산식이 존재한다[17]. Sobel의 표현에 따라 단일 노드에서 x_t 를 t 기간 초의 재고 수준(inventory level), z_t 를 t 기간에 도착할 물량, y_t 를 z_t 가 도착하였지만 수요가 발생하기 전 시점의 재고 수준으로 정의하면 $y_t = x_t + z_t$ 로 표현될

수 있다. 또한 t 기간의 수요 분포를 D_t 라 하면 $x_{t+1} = y_t - D_t$ 로 나타낼 수 있다. 이때 fill rate β 의 정확한 표현은 아래의 식과 같다.

$$\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\sum_{t=1}^T \min\{(y_t)^+, D_t\} / \sum_{t=1}^T D_t\right],$$

where $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$, $x^+ - x^- = x$

Sobel[14]의 연구 결과에 의하면 주어진 기초 재고 수준을 S , 조달시간을 L , $\nu = \sigma/\mu$, $b(a, j) = (a - j\mu) / (\sigma\sqrt{j})$, $\Phi(\cdot)$ 와 $\phi(\cdot)$ 를 각각 표준 정규 분포(standard normal distribution)의 누적분포함수(cumulative distribution function)와 확률밀도함수(probability density function)라 하면, fill rate β 는 아래의 식 (1)을 통해 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\beta &= \nu\{\sqrt{L}(\phi[b(S, L)] - \phi[-\sqrt{L}/\nu]) \\ &\quad - \sqrt{L+1}(\phi[b(S, L+1)] - \phi[-\sqrt{L+1}/\nu])\} \\ &\quad + (1/\mu)(S - L\mu)(\Phi[b(S, L)] - \Phi[b(S, L+1)]) \\ &\quad + \Phi[b(S, L+1)] + L\phi[-\sqrt{L}/\nu] \\ &\quad - (L+1)\phi[-\sqrt{L+1}/\nu]\end{aligned}\quad (1)$$

3.2 2단계 시리얼 시스템의 개요

계층 재고(echelon stock), 기초 재고 정책(base-stock policy)을 사용하는 2단계 시리얼 시스템에서, 주문한 직후 임의의 t 시점에서 노드 2의 계층 재고 상태(echelon inventory position)는 항상 S_2 를 유지한다. 이는 노드 2가 외부의 무한 용량을 갖는 공급자를 통해 제품을 주문함으로써 적시에 필요한 물량만큼을 공급받을 수 있기 때문이다. 노드 2의 계층 재고 수준(echelon inventory level)을 II_2^e 라고 정의하면, $(t+L_2)$ 시점에서의 II_2^e 는 $II_2^e = S_2 - D(L_2)$ 로 표현되며 이는 임의의 모든 기간에서 동일하게 적용됨을 알 수 있다. 또한, 노드 2의 설치 재고 수준(installation inventory level)을 II_2^i 라고 정의하면 $II_2^i = S_2 - D(L_2) - S_1$ 로 표현된다.

한편 노드 1에서 주문한 직후의 임의의 시점에서의 재고 재고 상태는 노드 2에서와 달리 반드시 s_1 을 유지하지 못한다. 이는 노드 2가 가지고 있는 보유 재고가 노드 1이 필요로 하는 물량을 모두 충족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있기 때문이다. 노드 2의 이월 주문 수준(backorder level)은 $(L_2)^- = (s_2 - D(L_2) - s_1)^-$ 로 표현할 수 있다. 여기서 노드 1의 실제 발생하는(realized) 기초 재고 수준을 \hat{s}_1 이라고 정의하면 $\hat{s}_1 = s_1 - (s_2 - D(L_2) - s_1)^- = \min(s_1, s_2 - D(L_2))$ 의 형태로 표현되고 이는 목표로 했던 s_1 보다 작은 값을 갖게 된다. 이에 따라 \hat{s}_1 의 기대값은 아래의 식 (2)와 같이 표현할 수 있다[1, 10, 11].

$$\begin{aligned}
 E[\hat{s}_1] &= s_1 - E[(s_2 - D(L_2) - s_1)^-] \\
 &= s_1 - \int_{s_2 - s_1}^{\infty} (y - (s_2 - s_1)) \frac{1}{\sigma_2} \phi\left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right) dy \\
 &= s_1 - \sigma_2 G\left(\frac{s_2 - s_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

노드 1에 대한 on-hand 재고량의 기대값은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E[I_1] &= E[(\hat{s}_1 - D(L_1 + 1))^+] \\
 &= E[\hat{s}_1 - D(L_1 + 1)] + E[(\hat{s}_1 - D(L_1 + 1))^+] \\
 &= E[\hat{s}_1] - \mu_1 + E[(\hat{s}_1 - D(L_1 + 1))^+] \quad (3)
 \end{aligned}$$

위의 식에서 만약 $D(L_2) \leq s_2 - s_1$ 이면 $\hat{s}_1 = s_1$ 이고, $D(L_2) > s_2 - s_1$ 이면 $\hat{s}_1 = s_2 - D(L_2)$ 이므로 식 (3)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E[I_1] &= E[\hat{s}_1] - \mu_1 + \sigma_1 G\left(\frac{s_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \\
 &\quad + \int_{s_2 - s_1}^{\infty} \sigma_1 \left[G\left(\frac{s_2 - \mu_1 - x}{\sigma_1}\right) - G\left(\frac{s_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \\
 &\quad \times \frac{1}{\sigma_2} \phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) dx \quad (4)
 \end{aligned}$$

노드 2에 대한 on-hand 재고량의 기대값은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 E[I_2] &= E[(s_2 - D(L_2) - s_1)^+] \\
 &= (s_2 - \mu_2 - s_1) + E[(s_2 - D(L_2) - s_1)^-] \\
 &= (s_2 - \mu_2) - (s_1 - E[(s_2 - D(L_2) - s_1)^-]) \\
 &= (s_2 - \mu_2) - E[\hat{s}_1] \quad (5)
 \end{aligned}$$

3.3 최적화 알고리즘

$\alpha(s_1, s_2)$ 를 노드 1과 2의 기초 재고 수준이 각각 s_1, s_2 일 경우의 평균 재고비용, $\beta(s_1, s_2)$ 을 그때의 fill rate라 정의하고 본 논문의 문제를 모델링하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \min \alpha(s_1, s_2) &= \sum_{j=1}^2 h_j E[I_j] \quad (6) \\
 \text{s.t. } \beta(s_1, s_2) &\geq \beta \quad (7)
 \end{aligned}$$

앞서 언급한 바와 같이 이와 같은 문제를 다룬 연구가 존재하지 않고 수리적인 방법을 통해 최적해 또는 근사 최적해를 구하기에는 대단한 어려움이 따른다. 이때 최적의 기초 재고 수준을 구하기 위한 가장 명확한 방법은 완전 전개(complete enumeration)를 통해서이다. 아래의 [정리 1]은 본 논문에서 만족해야하는 제약식 (7)의 범위를 한정시킴으로써 탐색 영역을 줄여주는 역할을 한다.

[정리 1] $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 인 관계가 성립하는 (s_1, s_2) 에서 주어진 목적함수는 최소화된다.

<증명> $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 를 만족하는 임의의 s_1 과 s_2 를 각각 \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 라 하자. 먼저 $s_1 = \tilde{s}_1$ 로 고정시키고 s_2 를 \tilde{s}_2 에서부터 증가시키는 경우를 생각해보자. 직관적으로, 이 경우 비용함수 (6)과 fill rate 함수 $\beta(s_1, s_2)$ 은 s_2 에 대해서 단조 비감소 함수(monotone non-decreasing function) 형태를 나타내며 또한 제약식 (7)을 만족함을 알 수 있다. 그러므로 주어진 목적 함수를 최소화하기 위해서는 $\beta(s_1, s_2)$ 가 주어진 fill rate를 정확하게 만족해야 한다. 반대로 $s_2 = \tilde{s}_2$ 로 고정하고 s_1 을 \tilde{s}_1 에서부터 증가시키는 경우에도 비용함수와 fill rate 함수는 s_1 에 대해 단조

비감소 함수 형태를 나타내므로 마찬가지로 관계가 성립한다. \square

[정리 1]에 의해 본 논문에서 사용되는 제약식을 $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 로 한정하기로 한다. [정리 2]는 주어진 제약식을 만족하는 s_1 과 s_2 에 대한 적절한 하한(lower bound)을 제공한다.

[정리 2] 목표로 하는 fill rate를 만족하는 (s_1, s_2) 은 $(\underline{s}_1, \underline{s}_2)$ 이상의 범위에서 존재한다. 단, \underline{s}_1 와 \underline{s}_2 는 각각 단일 노드에서 $L=L_1$, $L=L_1+L_2$ 일 경우 식 (1)에 의해 fill rate β 를 만족하는 기초 재고 수준을 나타낸다.

<증명> 특정한 한 값 s_2 에 대하여 s_1 이 s_2 와 동일한 값을 가질 경우 $\beta(s_1, s_2)$ 는 최대값을 갖게 된다. 만약 $s_1 = s_2$ 이면 주어진 2단계 시리얼 시스템은 $S=S_2$, $L=L_1+L_2$ 인 단일 노드 모형으로 볼 수 있으며, 이와 같은 관점에서 보았을 때 $s_1 = s_2 = \underline{s}_2$ 일 경우 $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 인 관계가 성립한다. $s_2 < \underline{s}_2$ 인 s_2 와 $(0, s_2)$ 에 속하는 모든 s_1 에 대하여 $\beta(s_1, s_2) < \beta$ 가 된다. 그러므로 주어진 fill rate를 만족하는 s_2 는 \underline{s}_2 이상의 범위에서 존재한다.

다음으로 노드 1의 하한에 대해 고려해보자. 만약 s_2 가 무한히 큰 값을 갖는다면 주어진 2단계 시리얼 시스템은 $S=S_1$, $L=L_1$ 인 단일 노드 모형으로 볼 수 있고, $s_1 = \underline{s}_1$ 일 경우 $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 를 만족한다. 그러므로 $s_2 < \infty$ 인 s_2 에 대해 주어진 fill rate를 만족하는 s_1 은 \underline{s}_1 이상의 범위에서 존재한다. \square

$\beta(s_1, s_2) = \beta$ 를 만족하는 (s_1, s_2) 의 집합을 $\mathcal{S}(\beta)$, $\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 원소 가운데 s_j 의 최대값(상한)과 최소값(하한)을 각각 s_j^u 와 s_j^l 이라 정의하고, [정리 2]의 결과를 적용하면 $\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 s_1 과 s_2 의 범위는 다음과 같다.

$$\beta(s_1^u, s_2^l) = \beta(\underline{s}_2, \underline{s}_2) = \beta \quad (8)$$

$$\beta(s_1^l, s_2^u) = \beta(s_1, s_1^u) = \beta \quad (9)$$

즉, $\mathcal{S}(\beta)$ 는 s_2 가 $s_2^l = \underline{s}_2$ 에서 특정한 상한 값 s_2^u 까지 증가함에 따라 s_1 은 $s_1^u = \underline{s}_2$ 에서 $s_1^l = \underline{s}_1$ 까지 감소하는 범위 내에서 무수히 많이 존재한다. 본 연구의 목적은 $\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 다양한 (s_1, s_2) 의 조합 가운데 평균 재고비용을 최소화하는 s_1 과 s_2 를 구하는 것이다.

식 (8)에서와 같이 $s_1 = s_1^u$, $s_2 = s_2^l$ 일 경우 $s_1 = s_2 = \underline{s}_2$ 의 관계가 성립한다. s_1 과 s_2 가 동일한 값을 가지므로 $E[I_2]$ 는 직관적으로 0이 됨을 알 수 있다. 이는 식 (5)에 의해 $E[I_2] = \sigma_2 G(\mu_2/\sigma_2)$ 이고 이 값은 0에 근사함을 통해 증명될 수 있다. 마찬가지로 $E[I_1]$ 은 식 (4)를 통해 계산할 수 있다.

식 (9)의 $s_1 = s_1^l$, $s_2 = s_2^u$ 일 경우 노드 2는 노드 1의 기초 재고 수준을 유지할 수 있을 만큼의 충분한 양의 재고를 가지고 있으므로 $E[I_1]$ 은 단일 노드에서 $S = \underline{s}_1$ 이고 $L = L_1$ 인 경우 계산된 평균 on-hand 재고량에 근사하며 이 값은 식 (4)를 통해 구할 수 있다. 마찬가지로 $E[I_2]$ 는 식 (5)에 의해 계산된다.

$\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 (s_1, s_2) 의 조합이 위의 식 (8)에서부터 식 (9)로 변화할 때, 식 (2), (4)와 (5)를 통해 $E[I_1]$ 는 감소하고 $E[I_2]$ 는 증가하는 것을 알 수 있다. 즉, (s_1, s_2) 의 조합 가운데, s_2 가 증가하고 s_1 이 감소하면 식 (2)로부터 $E[\hat{S}_1]$ 는 감소하게 됨으로 이에 따라 식 (4)의 $E[I_1]$ 는 감소한다. 마찬가지로 $E[\hat{S}_1]$ 이 감소하면 식 (5)의 $E[I_2]$ 는 증가하게 된다.

한편, $\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 원소들은 동일한 fill rate를 나타내지만, 전체 시스템에 존재하는 평균적인 on-hand 재고량의 합은 노드 2의 기초 재고 수준에 직접적인 영향을 받아 서로 다른 값을 갖게 된다. 다시 말해, $E[I_1] + E[I_2]$ 을 $E[I_2^e]$ 라고 정의하면 $\mathcal{S}(\beta)$ 에 포함되는 (s_1, s_2) 의 조합 가운데 s_2 의 값이 증가할수록 $E[I_2^e]$ 또한 이와 비례해서 선형적으로 증가한다. 즉 $E[I_2(s_2)]$ 와 $E[I_2^e(s_2)]$ 를 $\mathcal{S}(\beta)$ 에 속하는 임의의 s_2 에 대한 I_2 와 I_2^e 의 기대값이라고 정의하면, \underline{s}_2 이상에서 정의되는 임의의 s_2^u 와 s_2^l (단, $s_2^u \leq s_2^l$)에 대해 아래의 식 (10)과 같은 관계가 성립한다.

[정리 3] $E[L_2^e(S_2^*)] = E[L_2^e(S_2^*)] + (S_2^* - S_2^e)$ (10)

<증명> 노드 j 로 이동 중인(in-transit) 재고량을 T_j 라고 정의하면 안정화 상태(steady-state)에서 시스템에 존재하는 전체 재고량의 합은 $\sum_{j=1}^2 (E[I_j] + E[T_j])$ 로 표현할 수 있다. $E[T_j]$ 는 Little의 법칙에 의해 (S_1, S_2) 에 상관없이 $E[T_j] = E[D(L_j)]$ 이므로[3, 13], $S(\beta)$ 에 속하는 임의의 S_2 에 대해 다음과 같은 관계가 성립한다[13].

$$S_2 - \mu \cdot \beta = \sum_{j=1}^2 (E[I_j(S_2)] + E[T_j]) \quad (11)$$

$S_2 \leq S_2^e \leq S_2^*$ 인 임의의 S_2^e 와 S_2^* 를 식 (11)에 각각 대입한 후 두 식의 좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면 식 (10)이 됨을 알 수 있다. □

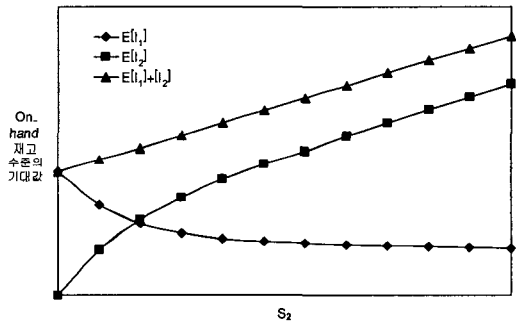
$S(\beta)$ 에 속하는 모든 (S_1, S_2) 에 대해 $E[I_1]$, $E[L_2]$ 및 $E[L_2^e]$ 의 변화하는 패턴과 재고비용의 형태($h_1 \geq h_2$)를 종합적으로 고려했을 때, [관찰 1]의 성질이 존재함을 알 수 있다.

[관찰 1] $h_1 = h_2$ 일 경우 $\alpha(S_1, S_2)$ 는 S_2 에 대해 증가함수의 형태를 나타내며, $h_1 > h_2$ 일 경우 $\alpha(S_1, S_2)$ 는 S_2 에 대해 볼록(convex)하다.

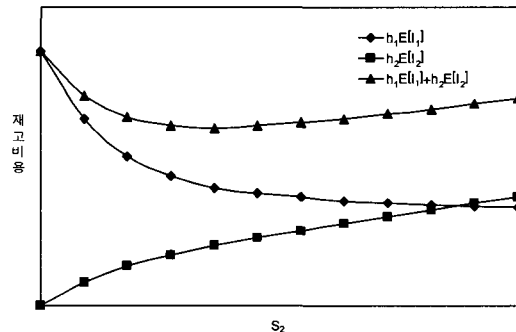
먼저 $h_1 = h_2$ 일 경우 $\alpha(S_1, S_2)$ 는 $E[L_2^e]$ 에 비례한다. [정리 3]에서 $E[L_2^e]$ 는 S_2 의 크기에 비례하여 선형적으로 증가하므로, 직관적으로 $\alpha(S_1, S_2)$ 는 S_2 에 대해 증가함수의 형태를 나타냄을 알 수 있다.

다음으로 $h_1 > h_2$ 인 경우 비용함수의 볼록함(convexity)을 보다 명확하게 규명하기 위해 각 변수들의 상관관계를 도해적으로 나타내 보기로 한다. [그림 2]는 S_2 에 대한 $E[I_1]$, $E[L_2]$, $E[L_2^e]$ 의 변화 형태를 개략적으로 나타내며, [그림 3]은 $h_1 > h_2$ 인 경우 이러한 변화로 발생하는 각 노드별 평균 재고 유지 비용과 이들의 합을 나타낸다. $S(\beta)$ 에 속하는 S_2 에 대해, S_2 를 S_2 에서부터 증가시킬 경우 식 (4)

와 (5)로부터 $E[I_1]$ 은 감소하고 $E[L_2]$ 는 0에서부터 증가하며 이 두 값의 합인 $E[L_2^e]$ 는 선형적으로 비례하여 증가함을 알 수 있다. 또한 이러한 관계는 [그림 2]로부터 확인할 수 있다. 따라서 $h_1 > h_2$ 인 경우, S_2 의 증가에 대한 $E[I_1]$ 의 감소폭보다 $E[L_2]$ 의 증가폭이 더 크기 때문에 [그림 3]에서와 같이 $\alpha(S_1, S_2)$ 는 S_2 에 대해 볼록함을 알 수 있다. 본 연구에서는 이러한 비용함수의 볼록함이 다양한 실험 조건에 대해서 일관되게 나타나는 성질임을 확인하였으며, 이로부터 [관찰 1]의 타당성을 입증할 수 있다.



[그림 2] S_2 에 대한 $E[I_1]$, $E[L_2]$, $E[I_1] + E[L_2]$ 의 상관관계



[그림 3] 비용함수의 볼록함

[관찰 1]에 의해 $S(\beta)$ 에 속하며 평균 재고비용을 최소화하는 (S_1, S_2) 를 (S_1^*, S_2^*) 라 하면, (S_1^*, S_2^*) 는 $\alpha(S_1, S_2)$ 의 볼록함(convexity)을 이용하여 S_2 를 $S_2 = S_2^*$ 부터 순차적으로 증가시켜 감으로써 쉽게 찾을

수 있다. 본 논문에서는 앞서 도출된 여러 정리들과 수식을 이용하여 기초 재고 수준의 최적값을 수리적으로 계산하는 절차를 제안한다.

• 최적화 알고리즘의 절차

Step 1 : 식 (1)로부터 s_2 계산

식 (2), (4), (5)로부터 $E[L_2^e]$ 를 계산하고 이 값을 Δ_0 로 설정

Step 2 : $s_2 = \underline{s}_2 + \Delta$ 로 설정한 후 Step 3을 통해 $\alpha(s_1, s_2)$ 를 계산하고, 이 값이 최소가 될 때까지 Δ 를 순차적으로 증가

Step 3 : 주어진 s_2 와 식 (2)와 (4), (5)를 이용하여 $E[L_2^e] = \Delta_0 + \Delta$ 를 만족하는 s_1 을 탐색하고 이때의 $\alpha(s_1, s_2)$ 계산

제안된 최적화 알고리즘은 비용함수의 볼록함을 이용하여 s_2 를 \underline{s}_2 부터 순차적으로 증가시켜 가면서 최소의 비용을 갖는 (s_1, s_2) 을 찾는다. 이때 주어진 s_2 에서 $\beta(s_1, s_2) = \beta$ 를 만족하는 s_1 과 $E[L_1]$ 를 계산하기 위해 [정리 3]의 결과와 식 (2), (4), (5)를 이용한다. 즉 $E[L_2^e(s_2)]$ 는 식 (2), (4), (5)를 통해 구할 수 있으므로, 주어진 s_2 에서의 $E[L_2^e(s_2)]$ 또한 마찬가지로 계산할 수 있다. s_2 와 $E[L_2^e(s_2)]$ 가 알려져 있으므로 식 (2)~(5)에서 간단한 이분법(bisection method)을 사용하여 s_1 과 $E[L_1]$ 를 계산할 수 있다.

4. 수치 예제

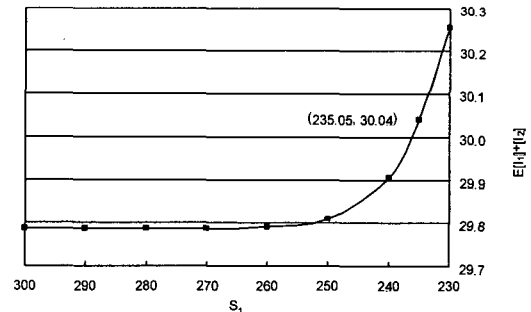
본 장에서는 다음과 같은 조건으로 주어지는 2단계 시스템에 대해서 제안된 최적화 알고리즘을 적용하는 절차를 보이고자 한다.

$L_1 = L_2 = 1, \mu = 100, \sigma = 20, h_1 = 5, h_2 = 1, \beta = 0.95$

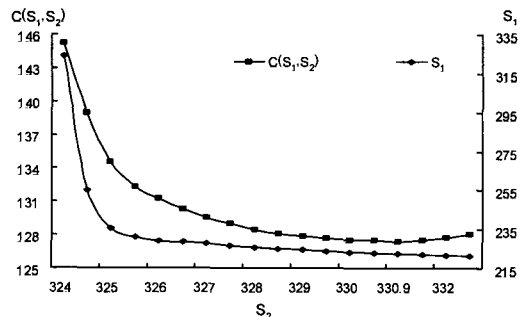
먼저 Step 1에서는 식 (1)로부터 $\underline{s}_2 = 324.04$, 식 (11)에서 $E[L_2^e(s_2)] = \Delta_0 = 29.04$, 식 (2), (4), (5)로부터

$\alpha(324.04, 324.04) = 145.20$ 을 각각 구한다. 다음으로 Step 2에서 $s_2 = \underline{s}_2 + \Delta$ 로 증가시키고 Step 3으로 이동하여 $\beta(s_1, s_2) = 0.95$ 를 만족하는, 즉 $E[L_2^e(s_2)] = 29.04 + \Delta$ 인 s_1 을 탐색한다. 한 예로써, 아래 [그림 4]는 $\Delta = 1.0$ 인 경우에 대해 s_1 을 순차적으로 감소시키면서 이에 따라 $E[L_2^e]$ 의 변화되는 값을 식 (2), (4), (5)로부터 계산한 결과를 나타낸다. [그림 4]로부터 $(s_1, s_2) = (235.05, 325.04)$ 에서 $E[L_2^e(s_2)] = 30.04$ 가 되어 $\beta = 0.95$ 를 만족함을 알 수 있으며, 식 (2), (4), (5)로부터 $\alpha(235.05, 325.04) = 134.34$ 또한 구할 수 있다.

아래 [그림 5]에서는 Δ 를 순차적으로 증가시켜가면서 이와 같은 Step 2와 3을 반복적으로 적용하여 $\beta = 0.95$ 를 만족하는 s_1 과 $\alpha(s_1, s_2)$ 를 계산한 결과를 나타낸다. 최적의 기초 재고 수준의 조합은 $\Delta = 6.9$ 일 때의 $(s_1^*, s_2^*) = (222.26, 330.94)$ 이며 이때의 평균 재고 비용 $\alpha(s_1^*, s_2^*) = 127.48$ 이다.



[그림 4] s_1 과 $E[L_1] + E[L_2]$ 의 상관관계



[그림 5] s_2 와 $C(s_1, s_2), s_1$ 의 상관관계

5. 결과 분석

앞서 서론에서 살펴보았듯이 본 연구와 동일한 문제를 고려한 연구는 존재하지 않는다. 그러므로 본 논문에서는 완전 전개(complete enumeration)를 통해 얻어지는 최적해와의 비교를 통해 제안된 최적화 알고리즘의 성능을 검증하기로 한다. 이를 위해 <표 1>과 같은 5가지의 실험 환경을 구성하여 비교 실험을 수행하였다.

<표 1> 비교 실험 환경

실험	μ	σ	L_1	L_2	h_1	h_2	β
1	100	10	1	1	2	1	0.90
2	100	10	1	3	3	1	0.95
3	100	20	1	1	5	1	0.90
4	100	20	3	1	3	1	0.95
5	100	20	3	3	2	1	0.99

비교 실험에서는 먼저 주어진 실험 환경에 대해 본 논문에서 제안한 최적화 알고리즘을 적용하여 (S_1^*, S_2^*) 을 구하였다. 이를 위해 펜티엄4 기반의 데스크톱 PC 환경에서 매트랩(MATLAB) 7.0을 이용하였으며, 수행 시간은 실험 환경에 따라 차이를 보였으나 대략 수분가량 소요되었다. 다음으로 완전 전개 방법을 통해 가능한 모든 (S_1, S_2) 의 조합을 나열하고 모의실험(simulation)을 통해 이들 가운데 최적해를 도출하였다. 모의실험은 C++를 통해 구현되었으며 실험의 정확도를 높이기 위하여 1,000,000

시간 동안 수행하였다. 비교 실험 결과 모든 실험 환경에서 두 대안은 동일한 결과를 나타냄을 확인할 수 있었으며 이로써 제안된 최적화 알고리즘이 최적해를 보장함을 입증할 수 있다.

본 논문에서는 몇 가지 실험 환경에 대해 제안된 최적화 알고리즘을 적용하여 얻어진 결과를 수치적으로 분석해 보기로 한다. 아래의 <표 2>와 <표 3>은 $\mu=100, \sigma=10$ 과 $\mu=100, \sigma=20$ 인 분포에서 $\beta=0.95$ 를 만족시키는 $S(\beta)$ 가운데 일부분을 보여 준다. 실험에서 h_1 은 1에서부터 100까지 변화시켰으며 $L_1=L_2=1, h_2=1$ 로 고정하여 사용하였다. 표의 좌측에는 (S_1, S_2) , 가운데 부분에는 $E[L_j]$ 와 $E[L_2^e]$ 를 우측 부분에는 각각의 h_1 에 대한 평균 재고비용을 나타낸다. 여기서 별표로 표시된 값들은 각각의 h_1 에 대한 $C(S_1, S_2)$ 의 최소값을 나타낸다.

<표 2>에서는 식 (1)을 통해서 $S_1=201.34, S_2=304.23$ 을 구하고, $(S_1^*, S_2^*) = (304.23, 304.23)$ 에서부터 S_2 를 순차적으로 증가시켜 가면서 다양한 재고비용 유형에 대한 최적의 (S_1^*, S_2^*) 를 구한 것이다. <표 2>에서 S_2 가 증가할수록 $E[L_1]$ 은 감소, $E[L_2]$ 는 증가하며 $E[L_2^e]$ 는 식 (10)을 만족하면서 증가하며, 식 (11)의 관계 또한 성립함을 알 수 있다.

$h_1=1$ 일 경우 $h_1=h_2$ 이므로 $E[L_2^e]$ 가 가장 작은 $S_2=304.23$ 에서 $C(S_1^*, S_2^*)=9.23$ 이 된다. 또한 $h_1=h_2$ 일 경우 [관찰 1]의 결과와 같이 $C(S_1, S_2)$ 는 S_2 에 대해 증가함수의 형태로 나타나는 것을 알 수 있다. $h_1 > h_2$ 인 나머지 경우에 대해서 $C(S_1, S_2)$ 는 S_2 에

<표 2> $\mu=100, \sigma=10$ 인 경우의 결과

S_1	S_2	$E[L_1]$	$E[L_2]$	$E[L_2^e]$	$C(S_1, S_2)$				
					$h_1=1$	$h_1=5$	$h_1=10$	$h_1=20$	$h_1=100$
304.23	304.23	9.23	0.00	9.23	9.23*	46.16	92.31	184.63	923.15
205.42	306.99	7.17	4.82	11.99	11.99	40.68*	76.54	148.26	721.99
203.43	309.48	6.75	7.73	14.48	14.48	41.51	75.29*	142.86	683.40
202.38	312.29	6.54	10.75	17.29	17.29	43.44	76.13	141.51*	664.52
201.55	318.57	6.37	17.20	23.57	23.57	49.05	80.91	144.61	654.23*
201.34	328.61	6.33	27.28	33.61	33.61	58.95	90.62	153.95	660.65

<표 3> $\mu = 100, \sigma = 20$ 인 경우의 결과

s_1	s_2	$E[L_1]$	$E[L_2]$	$E[L_2^e]$	$C(s_1, s_2)$				
					$h_1 = 1$	$h_1 = 5$	$h_1 = 10$	$h_1 = 20$	$h_1 = 100$
324.04	324.04	29.04	0.00	29.04	29.04*	145.20	290.40	580.79	2903.93
222.26	330.94	22.88	13.06	35.94	35.94	127.48*	241.90	470.75	2301.50
219.15	336.29	21.98	19.31	41.29	41.29	129.22	239.13*	458.95	2217.50
217.63	341.93	21.54	25.39	46.93	46.93	133.10	240.81	456.23*	2179.61
216.43	354.49	21.22	38.28	59.49	59.49	144.36	250.44	462.60	2156.88*
216.15	377.67	21.15	61.53	82.67	82.67	167.26	273.00	484.48	2176.29

대해 불룩하고 h_1 이 증가함에 따라 $C(s_1, s_2)$ 를 최소화 하는 s_2^* 의 값도 함께 증가함을 알 수 있다. 또한 s_2 가 증가함에 따라 $S(\beta)$ 를 만족하는 s_1 의 값은 감소하게 된다.

$S(\beta)$ 에 포함되는 (s_1, s_2) 의 조합 가운데 작은 값의 s_1 은 식 (2)와 식 (4)에 의해 상대적으로 작은 $E[L_1]$ 값을 갖는다. 그러므로 h_1 이 h_2 에 비하여 상대적으로 클수록 (s_1^*, s_2^*) 는 $E[L_1]$ 을 감소시키는 방향 즉, (s_1^*, s_2^*) 에 근접하는 값으로 변화하게 되고, 만약 $h_1 = \infty$ 이면 (s_1^*, s_2^*) 는 $(s_1^{\infty}, s_2^{\infty})$ 이 된다.

<표 3>은 <표 2>에서와 마찬가지로 $s_1 = 216.15, s_2 = 324.04$ 를 구하고, 각각의 h_1 에 대해서 (s_1^*, s_2^*) 를 구한 결과를 나타낸다. 표준편차가 증가함에 따라 모든 조건에 대해서 $S(\beta)$ 에 속하는 (s_1^*, s_2^*) 의 값 또한 증가함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 정규 분포를 따르는 2단계 시리얼 시스템에서 목표로 하는 fill rate 형태의 고객 서비스 수준을 만족시키면서 전체 시스템에서 발생하는 평균 재고비용을 최소화하는 기초 재고 수준(base-stock level)을 결정하는 문제를 다루었다. 먼저 효과적인 분석 방법을 통해 본 문제에서 만족해야 하는 fill rate 제약식의 범위를 한정시킨 다음, 기존의 단일 노드에서 정확한 fill rate를 계산하는 Sobel [17]의 연구 결과를 이용하여 각 노드에 대한 기초

재고 수준의 하한을 구하였다. 다음으로 fill rate 제약식을 만족하는 모든 기초 재고 수준에 대하여 주어진 비용함수가 불룩(convex)하다는 것을 보였고, 이러한 성질을 이용하여 최적해를 보장하는 각 노드별 기초 재고 수준을 수리적으로 구하는 절차를 제안하였다. 추후 연구로는 본 연구를 N단계 시리얼 시스템이나 분배형(distribution) 또는 조립형(assembly) 시스템 등과 같은 보다 일반적이고 현실적인 형태의 모형으로 확장하는 문제를 고려하고자 한다.

참 고 문 헌

- [1] Axsäter, S., *Inventory Control*, Kluwer Academic Publishers, Boston, (2000), pp. 151-157.
- [2] Axsäter, S., "Note : Optimal Policies for Serial Inventory Systems under Fill Rate Constraints," *Management Science*, Vol.49, No.2(2003), pp.247-253.
- [3] Boyaci, T. and G. Gallego, "Serial Production/Distribution Systems under Service Constraints," *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol.3, No.1(2001), pp.43-50.
- [4] Chen, F., "Optimal Policies for Multi-Echelon Inventory Problems with Batch Ordering," *Operations Research*, Vol.48, No.3

- (2000), pp.376-389.
- [5] Chopra, S. and P. Meindl, *Supply Chain Management : Strategy, Planning, and Operation*, Prentice Hall, 2003.
- [6] Christopher, M., *Logistics and Supply Chain Management : Strategies for Reducing Cost and Improving Service*, Prentice Hall, 2005.
- [7] Clark, A.J. and H. Scarf, "Optimal Policies for a Multiechelon Inventory Problem," *Management Science*, Vol.6, No.4(1960), pp. 475-490.
- [8] Diks, E.B., de Kok, A.G. and A.G. Lagodimos, "Multi-Echelon Systems : A Service Measure Perspective," *European Journal of Operational Research*, Vol.95, No.2(1996), pp.241-263.
- [9] Diks, E.B. and A.G. de Kok, "Optimal Control of a Divergent Multi-Echelon Inventory System," *European Journal of Operational Research*, Vol.111, No.1(1998), pp.75-97.
- [10] Federgruen, A. and P.H. Zipkin, "Approximations of Dynamic Multilocation Production and Inventory Problems," *Management Science*, Vol.30, No.1(1984), pp.69-84.
- [11] Federgruen, A. and P.H. Zipkin, "Computational Issues in an Infinite-Horizon, Multiechelon Inventory Model," *Operations Research*, Vol.32, No.4(1984), pp.818-836.
- [12] Hadley, G. and T. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.
- [13] Heijden, M.C. Van Der, "Near Cost-Optimal Inventory Control Policies for Divergent Networks under Fill Rate Constraints," *International Journal of Production Economics*, Vol.63, No.2(2000), pp.161-179.
- [14] Johnson, M.E., H.L. Lee, T. Davis, and R. Hall, "Expressions for Item Fill Rates in Periodic Inventory Systems," *Naval Research Logistics*, Vol.42, No.1(1995), pp. 57-80.
- [15] Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, McGraw-Hill, New York, 2001.
- [16] Silver, E.A., "A Modified Formula for Calculating Customer Service under Continuous Inventory Review," *AIIE Transactions*, Vol.2, No.3(1970), pp.241-245.
- [17] Sobel, M.J., "Fill Rates of Single-Stage and Multistage Supply Systems," *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol.6, No.1(2004), pp.41-52.
- [18] Van Houtum, G.J. and W.H.M. Zijm, "Computational Procedures for Stochastic Multi-Echelon Production Systems," *International Journal of Production Economics*, Vol.23, No.1-3(1991), pp.223-237.
- [19] Van Houtum, G.J., K. Inderfurth, and W.H.M. Zijm, "Material Coordination in Stochastic Multi-Echelon Systems," *European Journal of Operational Research*, Vol.95, No.1(1996), pp.1-23.
- [20] Vollmann, T.E., W.L. Berry, D.C. Whybark, and F.R. Jacobs, *Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management*, McGraw-Hill, New York, 2004.
- [21] Zipkin, P.H., *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, New York, 2000.