

자유롭게 움직이는 탄성체의 실시간 시물레이션

최민규* 홍현민† 고흥석*^o

*광운대학교 †우리는행 †서울대학교

*mgchoi@kw.ac.kr †eenc95@wooribank.com †ko@graphics.snu.ac.kr

Real-Time Simulation of Free-Floating Deformable Objects

Min Gyu Choi* Hyun-Min Hong† Hyeong-Seok Ko†

*Kwangwoon University †Woori Bank †Seoul National University

요약

컴퓨터 그래픽스 분야에서 변형체 애니메이션은 매우 중요한 기법으로 그 응용 범위가 매우 넓다. 본 논문에서는 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡이 발생하지 않으며, 변형체의 어느 한 부위가 고정되어 있지 않고 자유롭게 움직일 수 있는 동적 탄성 변형을 실시간에 시물레이션 하는 기법을 제안한다. Choi와 Ko [3]가 제안한 모달 와핑 기법은 실시간에 부피의 왜곡이 없는 동적 탄성 변형을 생성할 수 있지만 탄성체의 어느 한 부위가 고정되어 있어야 하며, Hauser 등 [9]이 제안한 임펄스 기반의 충돌 반응을 고려한 선형 모달 해석법은 안정적인 시물레이션 결과를 주지만 큰 변형에 있어서 부피 왜곡이 있다. 본 논문에서는 Choi와 Ko [3]가 제안한 모달 와핑 기법을 임펄스 기반의 충돌 반응을 포함하도록 확장하여 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡을 방지하며 또한 자유롭게 움직이는 탄성체의 충돌 반응을 안정적으로 시물레이션 할 수 있게 한다.

1. 서론

최근 영화나 게임 등에서 다양한 가상 캐릭터들이 등장하고 있다. 이들은 대부분 근육, 뼈살 같은 출력이는 신체 부위를 가지고 있으며 몸 전체가 젤리와 같은 탄성체로 이루어진 경우도 있다. 이와 같이 변형 가능한 캐릭터의 사실적인 애니메이션을 생성하기 위해서는 탄성체 부분의 시물레이션이 필수적이다. 게임이나 외과수술과 같이 실시간에 결과를 볼 수 있어야 하는 경우에는 탄성체의 사실적인 움직임뿐만 아니라 시물레이션 속도도 대단히 중요하다. 본 연구에서는 이러한 탄성체가 중력에 의해 낙하하거나 충돌에 의해 튀어 오르는 애니메이션을 실시간에 사실적으로 생성하는 기법을 제안한다.

탄성체를 시물레이션하기 위해서는 연속체 역학에 기반을 둔 유한 요소법이 널리 쓰이고 있다. 유한 요소법을 이용한 시물레이션의 정확도는 탄성체의 변형 정도를 나타내는 스트레인 텐서에 달려있으며, 높은 정확도를 위해 비선형 스트레인 텐서가 주로 사용되고 있다. 일반적으로 비선형 스트레인 텐서는 수치 계산을 불안정하게 만들며 이를 근본적으로 해결하기 위해서는 시물레이션 시간 간격을 매우 작게 해야 한다. 따라서 비선형 스트레인 텐서와 유한 요소법을 곧바로 적용한 시물레이션은 사실적인 결과를 만들어낼 수 있지만 실시간에 이루어질 수 없다는 단점이 있다.

탄성체의 실시간 시물레이션을 위한 대표적인 기법으로는 모달 해석법이 있다. 일반적으로 유한 요소법을 통해 얻은 지배 방정식은 선형 스트레인 텐서를 사용하더라도 연성

미분 방정식이다. 모달 해석법은 이러한 미분 방정식의 고유 값 문제를 미리 풀어서 비연성 미분 방정식으로 귀결시킨다. 분리된 각각의 미분 방정식의 해는 각각의 고유 진동 모드에 해당하는데, 이 모드들 중에서 시물레이션 결과에 적게 영향을 주는 모드들을 배제하여 수치 적분 계산 시간을 줄일 수 있다. 모달 해석법을 이용한 탄성체의 시물레이션은 실시간 성능을 내지만 큰 변형에서의 부피 왜곡 문제와 자유롭게 움직이는 탄성체를 처리할 수 없는 제약을 가지고 있다.

Choi와 Ko [3]는 선형 스테레인 텐서에 기반을 둔 모달 해석법을 확장하여 부피의 왜곡 없이 큰 회전 변형을 사실적으로 시물레이션 하는 모달 와핑 기법을 제안하였다. 이 기법은 탄성체의 변형에서 회전 변형 성분을 분리해 내고 이를 모달 해석법 통해 모달 기저로 표현함으로써 큰 회전 변형을 실시간에 사실적으로 시물레이션 한다. 하지만 이 방법 역시 기존의 모달 분석법과 마찬가지로 고정된 탄성체만을 고려하였으며 다른 물체와의 충돌을 감안하지 않았다.

기존의 모달 해석법을 이용하여 자유롭게 움직일 수 있는 탄성체를 다루기 위해서는 탄성체를 강체로 간주하여 탄성체의 무게중심 및 방향을 구하고 외력에 대한 탄성체의 반응은 모달 해석법으로 계산하여 탄성체 전체를 시물레이션 해야 한다. 이때 탄성체가 외부 물체와 충돌할 경우에는 강체와 탄성체를 한꺼번에 고려하여 충돌 반응을 계산해야 한다. Hauser 등 [9]은 기존의 선형 모달 해석법에 임펄스 기반의 충돌 반응을 결합하여 자유롭게 움직일 수 있는 탄성체를 실시간에 시물레이션 하였다. 하지만 선형 모달 해석법에 기반하고 있어 큰 회전 변형을 사실적으로 표현할 수 없었다.

본 논문에서는 고정되지 않고 자유롭게 움직일 수 있으며 또한 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡이 발생하지 않는 동적 탄성 변형 시뮬레이션을 실시간에 수행하고자 한다. 이를 위해 Hauser 등 [9]이 기존의 선형 모달 해석법에 임펄스 기반의 충돌 반응을 결합한 것과 유사하게 Choi와 Ko [3]가 제안한 모달 와핑 기법에 임펄스 기반의 충돌 반응을 결합한다. 제안된 기법은 모달 와핑에 기반을 두기 때문에 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡을 방지하며 실시간에 탄성체를 시뮬레이션 할 수 있고, 또한 임펄스 기반의 충돌 반응을 고려하기 때문에 변형체가 안정적으로 자유롭게 움직이게 할 수 있다.

2. 관련 연구

Terzopoulos 등 [20]의 연구 이후 탄성체의 변형에 관한 많은 연구가 컴퓨터 그래픽스 분야에서 활발히 진행되었다. 탄성체 시뮬레이션에 있어서 주된 관심사는 시뮬레이션 속도의 향상과 보다 사실적인 시뮬레이션에 있다. 이들에 대한 자세한 소개는 컴퓨터 그래픽스 문헌 [7] 및 역학 문헌 [21]에서 찾아볼 수 있다.

속도의 향상과 사실적 표현은 저울의 양 추와 같다. 어느 한쪽의 성능을 향상시키면 다른 한쪽 성능은 저하될 수밖에 없다. 변형체 모델링에 있어서 사실적인 시뮬레이션에 치중하려면 비선형 스트레인 텐서를 사용해야 한다. 이 경우 탄성체의 큰 변형에도 부피의 왜곡은 생기지 않지만 계산의 안정성을 위해 매우 작은 시간 간격을 사용해야 된다. 비선형 스트레인 텐서를 사용하는 경우에 계산 부담을 줄이기 위한 많은 연구가 있었다. 점 질량으로 근사하면 질량 행렬을 대각화 할 수 있기 때문에 질량 행렬의 역행렬을 간단히 구할 수 있다. 또한, 다중 격자법에 기반을 둔 적응적 메쉬 [19], 계층적이지만 하위 요소를 포함하지 않는 비구조 겹침 메쉬 [4], 제어 격자 재분할 [2], 기저함수의 정제 [8] 기법을 쓰면 계산 시간을 더욱 줄일 수 있다. 하지만 이들 방법 역시 비선형 스트레인 텐서에 기반을 두기 때문에 계산에 여전히 많은 시간이 소요된다.

비선형 항을 제거한 모델에 모달 해석법을 적용하면 계산 시간을 현저하게 줄일 수 있다. Pentland와 Williams [17]가 처음으로 모달 해석법을 컴퓨터 그래픽스 분야에 도입한 후, 이 기법은 바람에 흔들리는 나무의 움직임 [18]과 물체의 변형에 따라 발생하는 소리와 움직임의 동기화 [16] 등에 성공적으로 적용되었다. 선형 모델의 모달 해석법에 대한 연구는 더욱 다양해져서 James와 Pai [11]는 그래픽스 하드웨어를 프로그래밍 할 경우 인체의 움직임에 따른 피부의 변형을 실시간으로 생성할 수 있음을 보였다. Hauser 등 [9]은 강제 역학 과 모달 해석법을 결합하여 공간에서 자유롭게 움직이는 탄성체에 제약조건을 가해 탄성체의 직접 조작성이 가능하게 하였다. 선형 모델의 모달 해석법이 탄성체의 시뮬레이션 시간을 줄이는데 크게 기여하긴 했지만 변형이 크게 일어날 경우 생기는 부피의 왜곡에 대한 문제가 해결되지는 않았다.

선형화에 의한 왜곡 문제는 탄성체를 시뮬레이션 할 때에 회전 변형을 고려하지 않기 때문에 생기는 문제이다. Terzopoulos와 Witkin은 [19] 탄성체에 참조 프레임을 설정하고 거기에 맞추어 변형을 시뮬레이션 하는 참조 프레임 개념을 도입하였다. 참조 프레임을 정할 경우 탄성체가 회전하면서 변형할 때에 회전 성분만을 추출할 수 있다. 이 경우 회전과 변형을 분리해서 시뮬레이션 할 수 있기 때문에 작은 변형

만으로 전체의 회전 변형을 시뮬레이션 할 수 있다. 회전 변형 외에도 탄성체 막대를 구부리는 경우와 같이 탄성체 일부에서의 큰 변형이 부피 왜곡의 원인이 될 수 있다. Capell 등 [2]은 탄성체의 꺾이는 지점을 기준으로 영역을 나누어 각각의 변형을 따로 시뮬레이션 하고 꺾이는 지점에서는 두 영역의 변형을 융합하여 왜곡을 줄이는 방법을 제안하였다. 탄성체에서 일어나는 회전 변형을 해결하기 위해 Muller 등 [13]은 삼차원 매쉬로 이루어진 탄성체 모델의 각 노드를 추적하여 각 노드의 회전을 알아내는 강성 와핑 기법을 소개하였다. Choi와 Ko [3]는 와핑을 통해 노드의 회전 성분을 분리한다는 점에서 Muller 등 [13]과 비슷한 방법으로 회전 변형을 다루었다. Muller 등의 연구와 다른 점은 모달 해석법을 도입해 선형 시스템을 분리하고 불필요한 노드를 제거하여 시스템을 간략화 했다는 점과 프로그래밍이 가능한 하드웨어를 사용하여 매우 많은 다각형으로 이루어진 모델도 실시간으로 시뮬레이션 할 수 있다는 점이다. 동시 회전 법 [5, 6, 14]과 달리 Muller 등 [13]과, Choi와 Ko [3]는 노드 차원에서 강성 행렬의 회전을 다루었다.

James와 Fatahian [10]은 비선형 모달 해석법을 소개하였다. 상대 공간 역학의 데이터에 의한 도표화와 변형 모양의 차원 감소를 통해 큰 변형을 왜곡 없이 상호 작용까지 가능하도록 한 기법이다. 하지만 도표화가 상호 작용에서 나타날 수 있는 모든 움직임에 대해 가능한 것이 아니어서 특정 움직임에 대해서만 상호작용 시뮬레이션이 가능하며, 또한 도표화에 필요한 전처리 시간이 매우 길다.

3. 자유롭게 움직이는 탄성체의 변형

본 논문에서는 고정되어 있지 않고 자유롭게 움직이는 탄성체를 시뮬레이션하기 위해 탄성체의 국지 좌표계에 대한 강제 시뮬레이션과 국지 좌표계 내에서의 모달 와핑을 결합한다. 탄성체가 외부 물체와 충돌하지 않고 단지 외력만을 받을 때에는 강제 시뮬레이션과 모달 와핑을 통한 변형체 시뮬레이션을 독립적으로 수행할 수 있다. 국지 좌표계의 위치 및 방향은 탄성체와 똑같은 질량 및 관성을 가진 강체에 외력을 적용하여 구할 수 있으며, 국지 좌표계 내에서의 탄성체의 변형 또한 모달 와핑 기법에 외력을 적용하여 손쉽게 구할 수 있다. 이에 반해 탄성체가 외부 물체와 충돌할 경우에는 강체로서의 움직임 및 변형체로서의 움직임을 한꺼번에 감안해야 한다. 메쉬 노드가 외부 물체를 관통하지 않거나 외부 물체에 접촉하게 하기 위해서는 강체 시뮬레이션에 의한 위치 및 속도의 변화와 모달 와핑에 의한 위치 및 속도 변화를 동시에 고려하여 임펄스 및 접촉력을 구하고 이를 강제 시뮬레이션 및 모달 와핑에 적용해야 하기 때문이다.

3.1 모달 와핑

유한 요소법을 이용한 탄성체의 지배 방정식은 다음과 같다:

$$\ddot{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (1)$$

\mathbf{M} 과 \mathbf{C} 는 각각 질량 및 댐핑 행렬이며 $\mathbf{F}(t)$ 는 n 개의 노드에 작용하는 외력을 나타내는 $3n$ 차원의 합성 벡터이다. 여기서 탄성력 $\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}$ 는 모든 노드의 변위를 나타내는 $3n$ 차원의 합성 벡터 \mathbf{u} 에 대해서 비선형적으로 표현된다. 따라서 지배 방정식 (1)를 실시간에 적분할 수 없다.

모달 외평 기법의 핵심은 각 매쉬 노드 마다 정의 되는 국지 좌표계에서 모달 해석을 적용하여 지배 방정식 (1)를 식 (4)와 같은 형태로 변환하는 것이다. i 번째 노드의 국지 좌표계를 나타내는 3×3 회전 행렬을 i 번째 블록으로 가지는 블록 대각 행렬을 \mathbf{R}_i 라 하자. \mathbf{R}_i 를 식 (1)의 양변에 곱하고, 매쉬의 충돌함 및 탄성체의 강성에 대한 Choi와 Ko [3]의 가정을 도입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^L + \mathbf{K}\mathbf{u}^L = \mathbf{R}^T\mathbf{F}. \quad (2)$$

\mathbf{K} 는 선형 스트레인 텐서를 사용하여 구한 탄성체의 강성 행렬이고, \mathbf{u}^L 은 시간에 따라 변하는 국지 좌표계에서 계속하고 누적시킨 $3n$ 차원의 변위 벡터이다.

일반적으로 질량 행렬 \mathbf{M} 과 강성 행렬 \mathbf{K} 는 대각 행렬이 아니다. 따라서 식 (2)는 여러 변수 간에 연관 관계가 있는 연성 미분 방정식이다. Φ 와 Λ 를 일반 고유 값 문제 $\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda$ 의 해라고 하자. 즉, $\Phi^T\mathbf{M}\Phi = \mathbf{I}$ 와 $\Phi^T\mathbf{K}\Phi = \Lambda$ 를 만족한다. Φ 의 열들은 $3n$ 차원의 기저를 형성하므로, \mathbf{u}^L 를 다음과 같이 선형 조합할 수 있다:

$$\mathbf{u}^L(t) = \Phi\mathbf{q}(t). \quad (3)$$

여기서 Φ 는 i 번째 열이 i 번째 진동 모드의 모양을 나타내는 모달 변위 행렬이고, $\mathbf{q}(t)$ 는 각 진동 모드의 진폭에 해당하는 벡터이다. 고유값의 크기가 커서 눈에 띄는 주요한 변형을 야기하는 m 개의 진동 모드에 해당하는 열들만을 Φ 에서 뽑아냄으로써 계산량을 현저히 줄일 수 있다.

식 (3)를 지배 방정식 (2)에 대입하고 Φ^T 를 양변에 곱하면 식 (2)를 다음과 같이 각 변수들이 서로 관련이 없는 비연성 형태로 분리할 수 있다:

$$\mathbf{M}_q\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q\mathbf{q} = \Phi^T(\mathbf{R}^T\mathbf{F}). \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{M}_q = \mathbf{I}$, $\mathbf{C}_q = (\xi\mathbf{I} + \zeta\Lambda)$, $\mathbf{K}_q = \Lambda$ 는 모두 대각 행렬이고, $\Phi^T(\mathbf{R}^T\mathbf{F})$ 는 국지 좌표계에서의 모달 힘이다. 위에서와 같은 비연성 선형 시스템에 Newmark 적분 기법 [15]을 적용하여 k 번째 이산 시간에서의 \mathbf{q}^k 를 수치적으로 구할 수 있고, 그에 따른 변위 벡터 \mathbf{u}^k 또한 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\mathbf{u}^k = \int_0^{t^k} \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}}^L(t)dt. \quad (5)$$

3.2 매쉬 노드의 위치, 속도, 가속도

탄성체의 i 번째 매쉬 노드의 시간 t 에서의 위치를 탄성체의 국지 좌표계에서 표현한 국지 위치 $\mathbf{p}_i^L(t)$ 는 모달 외평 식 (5)과 변위에 관한 식 (3)을 통해 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$\mathbf{p}_i^L(t) = \mathbf{p}_i^L(0) + \int_0^t \mathbf{R}_i(t)\Phi_i\dot{\mathbf{q}}(t)dt. \quad (6)$$

여기서 Φ_i 는 Φ 의 i 번째 $3 \times m$ 행렬이고, \mathbf{R}_i 는 매쉬 노드의 국지적 좌표계에 대한 회전 행렬이다. 이를 전역 좌표계에서 표현하면 다음과 같다:

$$\mathbf{p}_i^w(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{p}_i^L(t). \quad (7)$$

여기서 \mathbf{x} 는 탄성체의 무게 중심이며, \mathbf{R} 은 모달 외평에 있어서의 블록 대각 회전 행렬이 아닌 탄성체의 국지적 좌표를 나타내는 3×3 회전 행렬이다.

위 식의 양변을 미분하면 전역 좌표계에서 매쉬 노드의 속도를 구할 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i^w &= \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_i^L + \mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}_i^L \\ &= \dot{\mathbf{v}} + [\omega]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L + \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}}(t)$ 이고, ω 는 탄성체의 국지 좌표계 회전 의 한 각속도이다.

매쉬 노드의 가속도는 위 식을 한 번 더 미분하면 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_i^w &= \ddot{\mathbf{v}} + [\dot{\omega}]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L + [\omega]\dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_i^L + [\omega]\mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}_i^L \\ &\quad + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\ddot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

질량 m 을 가진 탄성체의 관성 행렬 $\mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{H}_{body}\mathbf{R}^T$ 와 각 운동량 $\mathbf{L} = \mathbf{H}\omega$ 를 위의 식에 대입하여 정리하면 매쉬 노드의 가속도를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_i^w &= \mathbf{f}/m - [\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L]\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L]\mathbf{f} + \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\mathbf{M}_q^{-1}\Phi_i^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}^T\mathbf{f} \\ &\quad + [\mathbf{H}^{-1}\mathbf{L} \times \omega]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L + [\omega][\omega]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L + 2[\omega]\mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \mathbf{R}[\omega_i]\mathbf{R}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q\mathbf{q}) \\ &\quad - [\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}\dot{\mathbf{H}}_{body}\mathbf{R}^T\omega]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L. \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 \mathbf{f} 는 탄성체에 작용하는 외력이며, ω_i 는 매쉬 노드의 국지 좌표계 \mathbf{R}_i 의 회전에 의한 각속도다.

3.3 모달 임펄스

탄성체의 i 번째 매쉬 노드가 \mathbf{v}_c 의 속도로 움직이는 외부 물체와 충돌하였고, 충돌이 일어난 지점에서 외부 물체의 바깥쪽 법선 벡터를 \mathbf{n}_c 라 가정하자. 이 때 매쉬 노드의 외부 물체에 대한 상대 속도에서 \mathbf{n}_c 방향의 성분은 순간적으로 0으로 바뀌어야 한다. 따라서 충돌 직후 매쉬 노드의 순간적인 가속도는 다음 조건을 만족해야 한다:

$$\mathbf{n}_c \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i^w + \Delta t\ddot{\mathbf{p}}_i^w - \mathbf{v}_c) = 0. \quad (10)$$

또한 충돌점에서는 무한소의 시간 Δt 동안 무한대의 외력 \mathbf{f} 가 \mathbf{n}_c 방향으로 작용해야 하며, 그 충격량 $\mathbf{J} = \Delta t\mathbf{f} = j\mathbf{n}_c$ 는 유한해야 한다. 여기서 \mathbf{J} 를 임펄스라 부른다. 매쉬 노드의 속도 (8) 및 가속도 (9)를 위의 식에 대입하고 Δt 가 무한소라는 것을 감안하면 임펄스의 크기 j 를 다음과 같이 구할 수 있다:

$$j = \frac{-\mathbf{n}_c^T(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c + [\omega]\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L + \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\dot{\mathbf{q}})}{\mathbf{n}_c^T(\mathbf{I}/m - [\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L]\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{p}_i^L] + \mathbf{R}\mathbf{R}_i\Phi_i\mathbf{M}_q^{-1}\Phi_i^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}^T)\mathbf{n}_c}.$$

탄성체의 무게 중심 및 국지 좌표계의 시뮬레이션에는 위에서 구한 임펄스 \mathbf{J} 를 충돌점 \mathbf{p}_i^w 에 작용시키면 된다. 또한 임펄스 \mathbf{J} 는 탄성체의 변형을 유발하며 이는 충돌전의 $\dot{\mathbf{q}}^-$ 를 순간적으로 아래와 같은 $\dot{\mathbf{q}}^+$ 가 되게 한다:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^+ &= \dot{\mathbf{q}}^- + \mathbf{M}_q^{-1}\Phi_i^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{f}\Delta t \\ &= \dot{\mathbf{q}}^- + \mathbf{M}_q^{-1}(\Phi_i^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{J}). \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{J}_q = \Phi_i^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{J}$ 가 모달 해석법에서의 모달 임펄스가 되며, 충돌 후에는 $\dot{\mathbf{q}}^-$ 대신 $\dot{\mathbf{q}}^+$ 을 사용하여 식 (2)를 수치적으로 적분함으로써 모달 임펄스에 의한 탄성체의 국지적 변형을 구할 수 있다.

3.4 모달 접촉력

접촉력은 접촉면의 법선 방향으로의 속도가 0인 접촉 노드가 중력이나 기타 외력에 의해 접촉면을 파고드는 것을 방지하는 힘이다. 접촉면의 법선 방향으로 속도가 0이므로 접촉 노드는 접촉면 법선의 반대 방향으로 가속도가 생기지 않는 한 접촉면을 뚫지 않는다. 따라서 i 번째 메쉬 노드가 가속도 \mathbf{a}_i^c 인 면과 접촉하고 있고 그 면의 법선 벡터가 \mathbf{n}_i^c 라하면 접촉 노드의 가속도가 다음의 조건을 만족하도록 접촉력 $\mathbf{f}_i^c = f_i^c \mathbf{n}_i^c$ 가 주어져야한다:

$$\mathbf{n}_i^c \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i^w - \mathbf{a}_i^c) \geq 0. \quad (11)$$

접촉력이 갖추어야 할 또 하나의 조건은 접촉 노드의 속도가 접촉면의 법선 방향으로 0이지만 접촉면으로부터 멀어지려 할 경우, 즉 접촉면의 법선과 같은 방향으로 가속도가 주어졌을 경우 식 (11)의 조건만을 만족하는 접촉력은 접촉면의 법선 반대 방향을 취할 수도 있다는 것이다. 이 경우 접촉면으로부터 멀어지려는 노드를 오히려 끌어당기는 힘이 된다. 따라서 접촉력은 다음과 같은 추가 조건을 만족해야 한다:

$$f_i^c \geq 0. \quad (12)$$

탄성체의 여러 메쉬 노드들이 동시에 외부 물체와 접촉할 수 있으므로, 어느 한 접촉 노드의 가속도에 대한 제약 조건을 부가하는데 있어서 다른 접촉 노드에서 발생하는 접촉력도 동시에 고려해야 한다. 제약식 (11)을 부가하기 위해서는 접촉 노드의 접촉면에 대한 상대 가속도를 식 (9)로부터 구한 후, 외력으로는 접촉력의 합력 $\mathbf{f}^c = \sum \mathbf{f}_j^c$ 를 적용하면 된다. 따라서 제약식 (11)은 다음과 같이 된다:

$$\sum_{j \in C} f_j a_{ij} + b_i \geq 0. \quad (13)$$

여기서 C 는 접촉하고 있는 메쉬 노드들의 집합이며, a_{ij} 와 b_j 는 각각 아래와 같이 정의된다:

$$a_{ij} = \mathbf{n}_i^c \cdot \left[\left(\mathbf{I}/m - [\mathbf{R}\mathbf{p}_i^l] \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{R}\mathbf{p}_i^l] + \mathbf{R}\mathbf{R}_i \Phi_i \mathbf{M}_q^{-1} \Phi_i^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}^T \right) \mathbf{n}_j^c \right],$$

$$b_i = \mathbf{n}_i^c \cdot \left([\mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \times \omega] \mathbf{R}\mathbf{p}_i^l + [\omega][\omega] \mathbf{R}\mathbf{p}_i^l + 2[\omega] \mathbf{R}\mathbf{R}_i \Phi_i \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}[\omega_i] \mathbf{R}_i \Phi_i \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{R}\mathbf{R}_i \Phi_i \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q}) - [\mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}\dot{\mathbf{H}}_{body} \mathbf{R}^T \omega] \mathbf{R}\mathbf{p}_i^l - \mathbf{a}_i^c \right).$$

\mathbf{f} 를 $f_i, i \in C$ 로 이루어진 합성 벡터라 하면 접촉력에 관한 제약식은 다음과 같은 LCP(linear complementary problem)가 된다:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{b} \geq 0, \quad \mathbf{f} \geq 0. \quad (14)$$

본 논문에서는 접촉력을 빠르게 구하기 위해서 Baraff [1]가 제안한 알고리즘을 사용하였다. 이와 같은 과정을 통해서 구한 접촉력은 강제 시뮬레이션의 외력으로, 또한 모달 외평에서의 외력으로 동시에 적용되어야 한다.

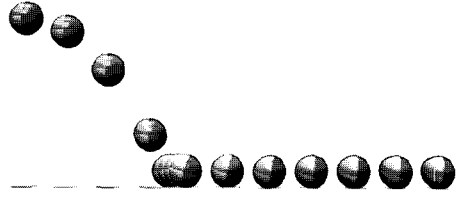


그림 1: 비탄성체의 시뮬레이션

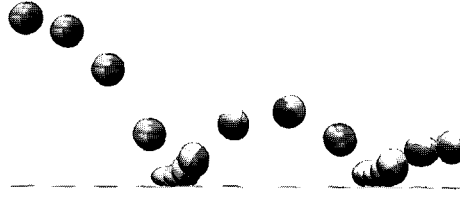


그림 2: 마찰이 없는 탄성체의 시뮬레이션

4. 실험 결과

본 논문에서 제안한 기법은 마이크로소프트 윈도우즈 환경에서 오토데스크 마야 플러그인으로 구현되었다. 사면체 메쉬는 공용 소프트웨어인 NETGEN으로 구성하였고, 규모가 큰 회박 행렬의 고유 값과 고유 벡터를 빠르게 구하기 위해 ARPACK [12]에 기반을 둔 매트랩 내부의 빌트인 C++ 수학 함수 eigs를 사용하였다. 모든 실험은 인텔 펜티엄 4 3.47GHz 프로세서와 2GB 메모리를 탑재한 PC에서 수행하였으며 그래픽 카드는 엔비디아 GeForce FX 7900 GTX를 사용하였다. 모든 실험에 있어서 $h = 1/30$ 초의 시간 간격을 사용하였다.

먼저 임펄스 및 접촉력에 의한 비교적 간단한 충돌 반응을 보여주기 위한 실험을 하였다. 그림 1은 비탄성체에 대한 실험이다. 바닥에 떨어진 비탄성체는 임펄스에 의해 수직 속도가 0이 된 후, 내부 스트레스가 없어 튀어 오르지 않고 접촉력에 의해 떨어지지도 않은 채 수평 속도 성분에 의해 바닥에서 이동하고 있다.

다음 실험은 탄성체에 대한 실험이다. 그림 2에서는 탄성체가 바닥과 충돌한 순간에 임펄스가 발생하여 접촉 노드의 속도가 0이 된다. 따라서 구체가 바닥을 뚫고 들어가는 것이 방지되며 이와 동시에 접촉력이 작용하여 구체가 수축된다. 수축하는 동안 내부에서 탄성 에너지가 축적되고, 축적된 탄성 에너지에 의해 구체가 다시 튀어 오른다. 튀어 오른 직후에는 진동을 하다가 댐핑에 의해 점차 진동이 감소하여 일정시간이 흐른 후 초기 상태의 모양으로 돌아간다. 이 실험에서는 모드를 8개만 사용하였음에도 불구하고 그림과 같이 충분히 보기 좋은 결과를 얻었다. 시뮬레이션 상황에 따라 시뮬레이션 모드 수를 조절함으로써 언제든지 정확성을 높일 수 있다.

그림 3은 위의 탄성체 실험과 동일한 환경에서 마찰력을 도입한 실험 결과다. 접촉하는 노드의 마찰력은 Coulomb 마찰 모델을 이용하였다. 바닥과 접촉하는 노드의 속도에서 접

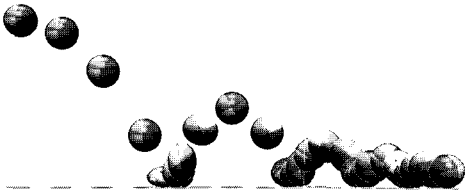


그림 3: 마찰이 있는 탄성체 시물레이션

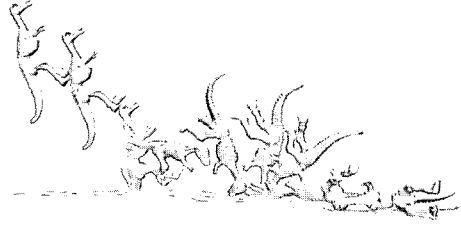


그림 6: 매우 복잡한 형태의 탄성체 시물레이션

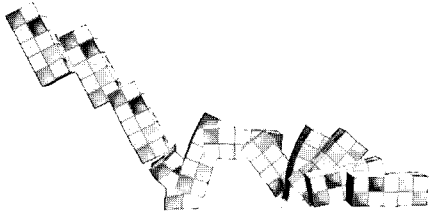


그림 4: 다중 충돌이 있는 탄성체 시물레이션

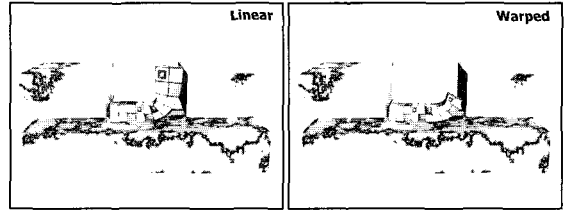


그림 7: 선형 모달 분석과 모달 와핑의 비교

축면과 평행한 속도 성분을 추출한 후 이와 반대방향의 힘을 가하였으며, 마찰력의 크기는 접촉 노드에서 계산된 노말 방향의 접촉력에 마찰계수를 곱하여 얻는다. 이때, 마찰력에 의해 노드의 진행 방향이 반대가 되지 않도록 마찰력의 크기에 제한을 두었다.

다음으로 다중 충돌을 위한 실험을 하였으며, 그림 4는 그 결과를 보여준다. 이 실험에서는 직육면체의 여러 점이 바닥과 접촉할 때의 임펄스 반응과 접촉력이 올바르게 작동하는지를 확인 할 수 있다. 댐핑에 의해 바닥에 놓여있는 상태가 되어도 접촉력은 계속 작용하여 물체가 바닥을 통과하지 않는다. 그림 5는 좀 더 복잡한 환경에서의 실험이며, 그림 6은 탄성체가 매우 많은 다각형으로 이루어진 경우이다.

본 논문의 핵심은 탄성체의 충돌 시물레이션에 기존의 선형 모드 해석법이 아닌 Choi와 Ko [3]의 모달 와핑 기법을 사용함으로써 큰 변형이 일어나도 왜곡이 없는 충돌 반응을 얻

을 수 있다는 것이다. 그림 7은 큰 변형이 발생하여 기존의 선형 모드 해석법을 이용할 경우 선형화에 의한 왜곡이 극명하게 나타나는 상황을 보여주고 있다. 왼쪽 그림은 선형 모드 해석법에 의한 결과로서 변형이 심하게 생기는 왜곡 현상이 발생하는 것을 확인 할 수 있으며, 오른쪽은 모달 와핑 기법에 의한 결과로서 부피의 왜곡 없이 사실적으로 시물레이션 되고 있음을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 고정되어 있지 않고 자유롭게 움직일 수 있으며 또한 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡이 발생하지 않는 동적 탄성 변형을 실시간에 시물레이션하기 위하여, Hauser 등 [9]이 기존의 선형 모달 해석법에 임펄스 기반의 충돌 반응을 결합한 것과 유사하게 Choi와 Ko [3]가 제안한 모달 와핑 기법을 임펄스 기반의 충돌 반응을 포함하도록 확장하였다. 제안된 기법은 Hauser 등 [9]과 달리 모달 와핑에 기반을 두기 때문에 큰 회전 변형에도 부피의 왜곡을 방지하며 실시간에 탄성체를 시물레이션 할 수 있다. 또한 외부 물체와의 충돌 반응은 임펄스 기반으로, 외부 물체와의 접촉은 접촉력 기반으로 처리하였기 때문에 시물레이션이 안정적이다.

현재는 충돌 반응보다 충돌 검사에서 소요되는 시간이 더 길다. 향후에는 탄성체 메쉬를 계층적 구조로 표현함으로써 탄성체의 충돌 검사를 보다 빠르게 수행하고자 한다. 또한 매우 큰 변형이 일어나는 물체에서 빈번히 생길 수 있는 자체 충돌 문제를 해결하고자 한다.

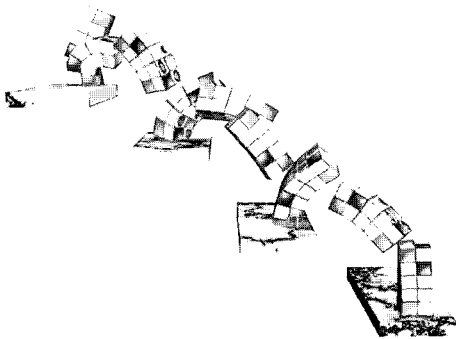


그림 5: 연속 다중 충돌이 있는 탄성체 시물레이션

감사의 글

본 연구는 서울시 전략산업 혁신클러스터 육성지원사업 (10581), 정보통신연구진흥원의 IT 연구센터(ITRC) 지원 프

로그래밍, 정보통신부 국가지정연구실 (NRL M10600000232-06J0000-23210), 정보통신부, 교육인적자원부 두뇌 한국 21 프로젝트, 서울대학교 자동화 시스템 공학 연구소의 지원을 받았다.

참고 문헌

- [1] D. Baraff. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH '94)*, 28:23–34, 1994.
- [2] S. Capell, S. Green, B. Curless, T. Duchamp, and Z. Popović. Interactive skeleton-driven dynamic deformations. *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2002)*, 21(3):586–593, 2002.
- [3] M. G. Choi and H.-S. Ko. Modal warping: Real-time simulation of large rotational deformation and manipulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(1):91–101, 2005.
- [4] G. Debunne, M. Desbrun, M.-P. Cani, and A. H. Barr. Dynamic real-time deformations using space and time adaptive sampling. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2001)*, 35:31–36, 2001.
- [5] O. Eitzmuss, M. Keckeisen, and W. Straßer. A fast finite element solution for cloth modeling. In *Proc. Pacific Graphics 2003*, pages 244–251, 2003.
- [6] C. A. Felippa. A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. Technical Report CU-CAS-00-03, Center for Aerospace Structures, Colorado, 2000.
- [7] S. Gibson and B. Mirtich. A survey of deformable modeling in computer graphics. Technical Report TR-97-19, Mitsubishi Electric Research Lab., Cambridge, MA, 1997.
- [8] E. Grinspun, A. N. Hirani, M. Desbrun, and P. Schoder. Discrete shells. In *Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. Computer Animation*, pages 49–54, 2003.
- [9] K. K. Hauser, C. Shen, and J. F. O'Brien. Interactive deformation using modal analysis with constraints. In *Proc. Graphics Interface*, pages 247–255, 2003.
- [10] D. L. James and K. Fatahalian. Precomputing interactive dynamic deformable scenes. *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2003)*, 22(3):879–887, 2003.
- [11] D. L. James and D. K. Pai. DyRT: Dynamic response textures for real time deformation simulation with graphics hardware. *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2002)*, 21(3):582–585, 2002.
- [12] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, and C. Yang. *ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [13] M. Müller, J. Dorsey, L. McMillan, R. Jagnow, and B. Cutler. Stable real-time deformations. In *Proc. ACM SIGGRAPH Symp. Computer Animation 2002*, pages 49–54, 2002.
- [14] M. Müller and M. Gross. Interactive virtual materials. In *Proc. Graphics Interface 2004*, pages 239–246, 2004.
- [15] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94, 1959.
- [16] J. F. O'Brien, P. R. Cook, and G. Essel. Synthesizing sounds from physically based motion. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2001)*, 35:529–536, 2001.
- [17] A. Pentland and J. Williams. Good vibrations: Model dynamics for graphics and animation. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH '89)*, 23(3):207–214, 1989.
- [18] J. Stam. Stochastic dynamics: Simulating the effects of turbulence on flexible structures. *Computer Graphics Forum (Proc. EUROGRAPHICS '97)*, 16(3):159–164, 1997.
- [19] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Modeling inelastic deformation: Viscoelasticity, plasticity, fracture. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH '88)*, 22(4):269–278, 1988.
- [20] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH '87)*, 21(4):205–214, 1987.
- [21] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, Maidenhead, Berkshire, England, 1977.