

사실적인 유동 재현을 위한 계층적 미분 모델

송오영*, 김도엽[†], 고흥석[‡]

*세종대학교, [†]그래픽스 및 미디어 연구실, 서울대학교

*oysong@sejong.ac.kr [†]kim@graphics.snu.ac.kr [‡]ko@graphics.snu.ac.kr

A Hierarchical/Derivative Method for Animating High-Reynolds Fluids

Oh-young Song*, Doyub Kim[†], and Hyeong-Seok Ko[‡]

*Sejong University, [†]Graphics and Media Lab, Seoul National University

Abstract

이 논문은 비물리적인 속도 감쇄현상을 감소시키는 새로운 유체 시뮬레이션 방법을 제시한다. 제시된 방법은 물리량뿐만 아니라 물리량의 미분정보도 함께 사용하기 때문에 보다 정확한 물리현상을 반영할 수 있다. 나비에-스톡스 방정식을 푸는 일반적인 시뮬레이터는 수치소산의 대부분은 대류항을 풀 때 발생한다. 따라서, 우리는 소산현상을 효과적으로 막는 CIP 대류방법을 이용하여, 옥트리 기반의 유체 시뮬레이터를 개발하였다. 우리는 실험을 통해, 제안된 방법이 높은 레이놀즈수를 갖는 유체의 상세한 움직임(예를 들어, 작은 물방울/공기방울, 얇은 수막, 작은 소용돌이 등)을 효과적으로 묘사함을 보인다.

1 서론

물은 고체로 이루어진 장애물이나 다른 유체와 격렬하게 상호작용을 하면, 그림 1과 같은 다양한 형태의 구조적 특징들(물방울/공기방울, 얇은 물 장막, 작은 소용돌이)이 나타나게 된다. 이러한 특징들은 레이놀즈 수(Reynolds number)가 클 때 자주 보인다. 레이놀즈 수는 유체의 점성이 작을수록, 그리고 관성이 클수록 커진다. 빠르게 움직이는 물은 전형적으로 높은 레이놀즈 수를 보이는 유체이다. 이 논문은 이러한 현상을 위한 물리기반 시뮬레이션 기법에 관한 것이다.

높은 레이놀즈 수를 갖는 유체의 시뮬레이션은 아직 어려운 결과를 보여주는 것이 사실이다. 이는 주로 유체 속도의 수치적 소산(numerical dissipation)에 관련되어 있다. 이 소산을 줄이기 위해, 우리는 CIP 방법 [15, 20]을 적응적 옥트리(octree)격자구조 [12]에 적용하였다. 즉, 시뮬레이션의 대류항에 CIP 방법을 적용하여, 수치적 소산을 탁월하게 줄였다. 그리고 세부적인 특징은 옥트리의 레벨을 늘려가며 표현하였다. 우리의 방법은 각 격자점에 물리량을 저장하는 것에 더하여, 그의 공간적 미분값도 저장한다. 이 점이 기존의 방법과 다른 혁신적인 면으로 격자점외의 물리량을 보다 정확하게 추산할 수 있도록 하는 것이다.

실험을 통해 제안한 시뮬레이터가 물표면을 보다 정확히 추적함을 알 수 있었다. 더 흥미로운 사실은 비물리적인 감쇄현상(nonphysical damping)을 상당한 정도로 줄이면서, 결과적으로 높은 레이놀즈 수를 갖는 유체의 특징(즉, 미세규모의 특징)을 재현할 수 있었다는 점이다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 관련 연구를 살펴보고, 3절은 우리가 제안한 시뮬레이터의 개요를

보여줄 것이며, 4절에서는 옥트리 기반의 CIP 방법을 소개하고, 5절에서 실험결과를 보여주고, 마지막으로 6절에서 결론을 맺는다.

2 관련 연구

Foster와 Metaxas [6, 7]가 3차원 나비에-스톡스 방정식을 푸는 유체 애니메이션 방법을 소개한 이래로, 유체 애니메이션은 컴퓨터 그래픽스 분야에 널리 연구되어 왔다. 1999년에 Stam [16]은 Stable Fluids로 알려진 안정적인 유체 시뮬레이터를 소개했다. 이 시뮬레이터에서는 큰 시뮬레이션 시간 간격을 사용해도 안정적으로 동작할 수 있도록 대류항을 세미-라그랑지안(semi-Lagrangian)방법을 통해 푼다. 그 이후로, 이 방법을 기초로 빠르게 동작하는 유체 시뮬레이터를 개발하기 위해 활발히 연구가 진행되어 왔다.

액체를 시뮬레이션하기 위해서는 안정적인 나비에-스톡스 시뮬레이터뿐만 아니라, 액체 표면을 추적할 수 있는 모델이 필요하다. 이를 위해 Foster와 Fedkiw [5]는 레벨 셋 필드에 질량이 없는 입자를 추가하는 새로운 하이브리드 형태의 표면 추적 모델을 고안했다. 이 모델은 Enright et al. [2]에 의해, 파티클 레벨 셋 기법(particle level set method)으로 발전하게 된다. 이 기법은 다이나믹하게 움직이는 유체의 표면을 매우 정확하게 추적할 수 있다. 또한, Enright et al.은 [3]에서 파티클 레벨 셋 기법이 세미-라그랑지안 프레임워크에서 시뮬레이션 시간간격이 크다 할지라고 정확성을 잃지 않음을 보였다.

컴퓨터 시뮬레이션에서 시각적 사실성 및 물리적 정확성을 떨어뜨리는 첫 번째 요인은 속도장의 수치적 소산이

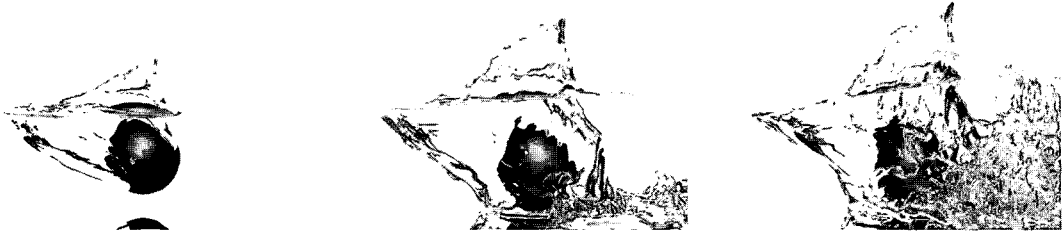


Figure 1: 공이 수조의 물과 충돌할 때의 세부적인 물의 움직임. (유효 격자: $192 \times 128 \times 128$)

다. 기체현상인 경우, 수치 소산을 줄이기 위해서, Fedkiw et al. [4]는 3차항수를 이용한 보간법을 소개하였고, 또한 vorticity confinement를 도입하여 속도의 curl을 인위적으로 증폭하였다. 그 결과로 사실적인 연기의 사용돌이치는 모습을 재현해 낼 수 있었다. vorticity 소산을 좀 더 물리기반의 방법으로 막는 연구[14, 13]가 vortex particle method를 도입함으로써 이루어졌다. 이 방법은 나비에-스톡스 방정식의 curl버전으로 출발하는 것으로 vorticity의 대류에서 발생할 수 있는 수치적 소산을 막기 위해 입자를 이용하여 대류항을 푼다.

하지만, 액체현상의 경우는 기체현상과는 다르게 점성이 큰 역할을 한다. 따라서 사용돌이치는 움직임은 금방 사라지고 덜 자주 눈에 띄는 경향이 있다. 높은 레이놀즈 수를 갖는 액체의 움직임을 재현하려면 보다 일반적인 상황에서도 속도-감쇄를 막을 수 있는 기법이 필요하다.

3 개요

우리는 공기와 물이 비압축성이라는 가정 하에서 다상 유체 시뮬레이터를 개발하였다. 비압축성 유체를 위한 나비에-스톡스 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도, p 는 압력, \mathbf{f} 는 외력, μ 는 점성계수, 그리고 ρ 는 유체의 밀도이다. 물 표면경계에서 밀도와 점성계수의 비연속적인 성질을 정확하게 모델링하기 위해, Ghost Fluids 방법을 적용하였다[11, 10, 9]. 표면주변은 레벨 셋 방법에 기반 한다. 레벨 셋 필드 ϕ 는 다음 식들에 따라 업데이트 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

$$|\nabla \phi| = 1. \quad (4)$$

나비에-스톡스 방정식의 시간 전진법으로는 fractional step method를 이용하여서 채택하였다. 즉, 식 (1)에서 각 항의 효과를 차례로 풀고, 식 (2)의 질량보존 효과를 푼다. 이러한 프레이밍워크에서 우리가 중점을 두고 있는 것은 대류항 부분이다. 그림 2에서 보듯이, 전체 과정을 대류항이 아닌 부분(non-advection part)과 대류항 부분(advection part)으로 나눈다.

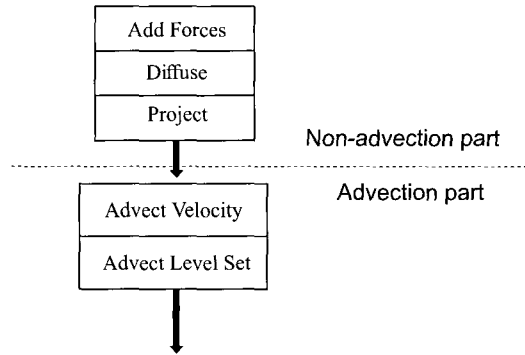


Figure 2: 시뮬레이터의 구조

대류항 부분은 대류항이 아닌 부분에서 계산하여 얻어진 속도와 레벨셋 필드를 현재의 속도 필드에 따라 대류시키는 역할을 한다. 높은 레이놀즈 수를 갖는 유체의 움직임을 재현하기 위해서는 이 단계에서 정확한 처리가 필요하다. 이를 위해, 우리는 속도/질량의 소산을 매우 효과적으로 막는 옥트리 기반의 CIP방법을 개발하였다.

4 옥트리 기반의 CIP 방법

이 절에서는 CIP방법과 옥트리 자료 구조를 결합하여 시뮬레이터의 대류항 부분을 개선시키는 방법을 보여준다.

4.1 CIP 방법 소개

나비에-스톡스 방정식을 fractional step method로 풀때, 대류항 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 와 $\mathbf{u} \cdot \nabla \phi$ 는 hyperbolic 특성을 지니므로 특별히 다루어야 한다. hyperbolic 방정식을 안정적으로 풀기 위한 프레이밍워크로는 세미-라그랑지안 방법이 있다. 하지만, 불행히도 이 방법에서는 물리량을 격자점외의 점에서 역추적해서 가져올 때, 선형 보간을 사용하므로 심각한 수치적 소산이 생긴다.

이를 극복하기 위해, Yabe와 Aoki [18, 19]는 3차의 정확성을 갖는 CIP방법을 고안하였고, 그 방법은 Yabe et al. [20]에 의해 더욱 향상 되었다. 이 방법의 핵심 아이디어는 물리학

뿐만 아니라 그의 공간적 미분 값도 함께 대류 시키는 것이다. 그러면 어떻게 미분 값을 대류 시켜야 할까? Yabe와 Aoki [18]은 미분 값의 대류를 위한 방정식도 원래의 hyperbolic 방정식으로부터 유도됨을 보였다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (5)$$

여기서 ϕ 는 대류 되어야 할 물리량이다. 식 (5)를 공간 변수 x 에 따라 미분하면, 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_x = -\mathbf{u}_x \cdot \nabla \phi, \quad (6)$$

이 식을 보면 ϕ_x 의 시간에 따라 변화하는 양을 예측할 수 있다. 식 (6)을 풀기 위해, 다시 한 번 fractional step method를 적용한다. 즉, 대류항이 아닌 부분 $\partial \phi_x / \partial t = -\mathbf{u}_x \cdot \nabla \phi$ 를 차분법으로 먼저 풀고, 그 후에 다음 식에 따라 대류항을 푼다.

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_x = 0. \quad (7)$$

CIP 방법에 대한 보다 자세한 내용은 [15]에 소개되어 있다. 위 방법의 2차원 및 3차원의 경우에 대한 것은 [19]에 소개되어 있다. Song et al.[15]은 [19]에서 제시된 방법이 불안정성을 야기 시킬 수 있음을 보이고, 그 문제를 해결한 방법을 제시하였다. 이 논문에서는 대류항부분의 시간 전진 법으로 2차의 Runge-Kutta법을 적용하였다.

4.2 계층적 옥트리 격자 구조 내의 CIP 방법

Losasso et al. [12]에 의해 소개된 옥트리 자료 구조에 기반한 적응적인 격자를 사용하면, 유체를 시뮬레이션 할 때, 공간적으로 불균등한 정확도를 갖게 된다. 하지만 이러한 격자 구조의 사용은 실용적인 관점에서 유용하다. 왜냐하면 적은 양의 메모리와 계산시간을 들이고도 시각적으로 좀 더 중요한 부분(예를 들어, 물표면)에서 더 정확하게 시뮬레이션 할 수 있기 때문이다. 따라서 우리는 옥트리 자료구조를 채택하였고, 여기에 CIP 방법을 적용하여 적응적인 접근방법의 실용적 가치를 더욱 향상시켰다.

Losasso et al. [12]는 세미-라그랑지안 대류항을 다룰 때, 선형 보간법을 이용한다. 반면에, 우리는 대류항의 계산에서 3차의 정확도를 위해, CIP 보간법을 이용한다. Guendelman et al. [8]에서처럼, 압력 값은 옥트리 자료구조에서 셀의 중앙에 위치하고 나머지 물리량(속도, 레벨셋, 그리고 미분 값들)은 노드에 저장된다. 셀이 더욱 잘게 나누어지게 되면, 새로운 격자점의 값은 미분값을 고려하는 CIP 보간법으로 계산된다. CIP 방법은 옥트리 자료구조에 매우 적합하다. CIP 보간은 3차의 공간적 정확성을 갖고 있으면서도, 여러 셀에 걸쳐서 이루어지는 것이 아니라 하나의 셀 내부에서만 이루어진다. 이러한 장점 때문에, CIP 방법은 어떠한 큰 변화도 없이 바로 적응적 격자구조에 적용가능하다. 그에 비해, 일반적인 보간법에서는 1차에서 3차의 정확성을 갖도록 하려면, 여러 셀의 값을 참조해야만 한다. 게다가 격자의 크기가 적응적으로 변화하는 경우는 여러 셀의 값을 참조해야 하는 방법은 복잡해질 수 있다.

CIP는 “옥트리에 의한 아티팩트(Octree artifact)”도 완화시켜 준다. 옥트리 자료구조에서는 공간에 따라 격자의 크기가

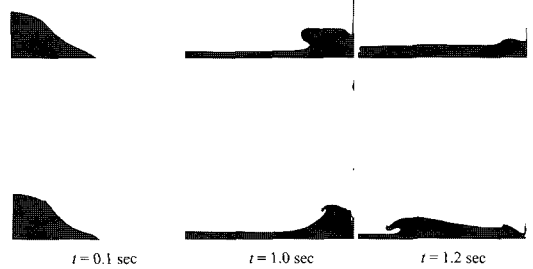


Figure 3: 2D breaking-dam 시뮬레이션: 위와 아래의 그림들은 각각 파티클 레벨 셋과 옥트리 기반 CIP방법의 결과를 보여주고 있다.

다르다. 이 격자 크기의 다름은 공간적으로 수치소산이 다르게 생김을 의미한다. 공간에 따른 질량의 수치 소산의 차이는 크게 눈에 띄지는 않지만, 속도의 경우는 눈에 띄며, 이러한 차이가 시뮬레이션에서 유체의 움직임을 어색하게 한다. 특히, 빠르게 움직이는 유체의 경우는 더욱 심한 어색함을 보여주게 된다. 예를 들어, breaking-dam 시뮬레이션에서, 물은 매우 빠른 수평적 움직임을 보여준다. 해상도가 높게 시뮬레이션 된 물 표면 근처의 유체는 수치소산이 작으므로 빠른 움직임을 보인다. 하지만, 바닥의 유체는 해상도가 낮으므로 더 점성이 있는 유체처럼 움직인다. 이러한 움직임을 함께 놓고 보면, 뒷부분의 물이 아랫부분의 물을 타고 넘는 듯한 움직임을 보이게 된다. CIP방법을 포함하여 보다 높은 차수의 보간법을 쓰는 경우에도 이러한 종류의 아티팩트를 피할 수는 없다. 그러나 대류항을 옥트리 기반의 CIP 방법으로 풀면, 아티팩트를 훨씬 줄일 수 있다. 이는 CIP 방법이 전체적으로 수치적 소산을 줄이기 때문이며, 특히 해상도가 낮은 지역에서 그 양이 크기 때문이다.

5 실험 결과

이 논문에서 제시된 기술은 파워 맥 Dual G5 2.5 GHz 와 5.5 GB 메모리에서 구현 되었다. 실제 세계의 높은 레이놀즈 수의 유체 움직임을 효과적으로 재현함을 보이기 위해, 몇 가지 실험을 수행하였다. 모든 실험은 물과 공기로 구성된 2상 유체이며, 사용한 파라미터는 $g = -9.8 \text{ m/sec}^2$, $\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{\text{water}} = 1.137 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$, $\rho_{\text{air}} = 1.226 \text{ kg/m}^3$, 그리고 $\mu_{\text{air}} = 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$ 이며, g 는 중력 가속도이다. 물 표면의 추출은 마칭 큐브 알고리즘(marching cube algorithm)을 사용하였고, 멘털 레이[®]로 렌더링 하였다.

Breaking-dam: 옥트리 기반의 CIP 방법과 기존의 선형방법과의 수치 소산을 비교하기 위하여, 128^2 유효격자에서 $0.2 \times 0.4\text{m}$ 의 물기둥을 중력 하에 놓는 2차원 breaking-dam 테스트를 실시하였다. 그림 3은 결과의 스냅 샷이다. 우리의

방법이 덜 확산적임을 알 수 있다. 즉 파동의 부서짐이 더 뚜렷하고, 소용돌이도 잘 보존됨을 볼 수 있다.

수조에 공 던지기: 이 실험은 반지름 0.15 m인 고체로 된 공을 (5.0, -3.0, 0.0) m/sec로 수조 속에 던졌을 때 생기는 물의 움직임을 재현한 것이다. 그림 1에서 보듯이 공이 물과 충돌할 때, 복잡한 구조가 만들어진다. 이 실험은 우리의 기법이 고체-물-공기가 격렬하게 상호작용하면서 발생하는 미세한 유체의 움직임 및 물 표면의 특징을 잘 재현함을 분명하게 보여주는 결과이다. 실험에 쓰인 유효격자는 $192 \times 128 \times 128$ 이다.

홍수: 이 실험에서는 $6m \times 2m \times 4m$ 의 중간 규모의 홍수를 시뮬레이션 한다. 실험 결과의 스냅 샷은 그림 4이다. 댐을 제거하면서, 물은 층계를 따라 흐르고, 중간에 있는 장애물과 격렬하게 반응하면서, 복잡한 구조를 보여준다. 이 실험에 쓰인 유효격자는 $384 \times 128 \times 256$ 이다.

6 결론

이 논문에서, 우리는 대류항 부분의 정확도를 증가시키는 유체 시뮬레이션 기법을 제안하였다. 대류항을 풀기 위해 옥트리 기반 CIP 방법을 고안하였는데, 이는 옥트리 자료구조에 CIP 보간법을 결합한 방식이다. 이 접근방법은 수치소산을 줄이는데 탁월하다. 실제로 우리의 기법을 적용한 몇몇의 실험 결과를 보면, 속도의 소산을 눈에 띄게 줄어든게 함으로써, 다이나믹한 유체의 실제 움직임을 재현해낸다.

결과 애니메이션을 보면, 유체의 세부적인 움직임이 매우 잘 표현되고 있음을 알 수 있다. 하지만, 우리의 기법은 거대 규모의 유체움직임의 정확도 향상에도 도움이 될 것이라고 생각된다. 이 기법은 미분정보도 저장해야 하는 메모리에 대한 오버헤드가 있긴 하지만, 실용적인 해상도(약 256^3 정도의 격자 수)에서 시뮬레이션 하는 데에는 전혀 문제가 없다.

7 Acknowledgements

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(M10600000232-06J0000-23210), 정보통신부 선도기반기술사업, BK21, 서울대학교 자동화시스템공동연구소의 지원으로 수행되었음.

References

- [1] J.B.A.Maintz and M.A.Viergever, A Survey of medical image registration, *Medical Image Analysis*, 2(1):1-37, 1996.
- [2] ENRIGHT, D., MARSCHNER, S., AND FEDKIW, R. 2002. Animation and rendering of complex water surfaces. *ACM Transactions on Graphics* 21, 3, 736-744.
- [3] ENRIGHT, D., LOSASSO, F., AND FEDKIW, R. 2005. A fast and accurate semi-lagrangian particle level set method. *Computers and Structures* 83, 479-490.

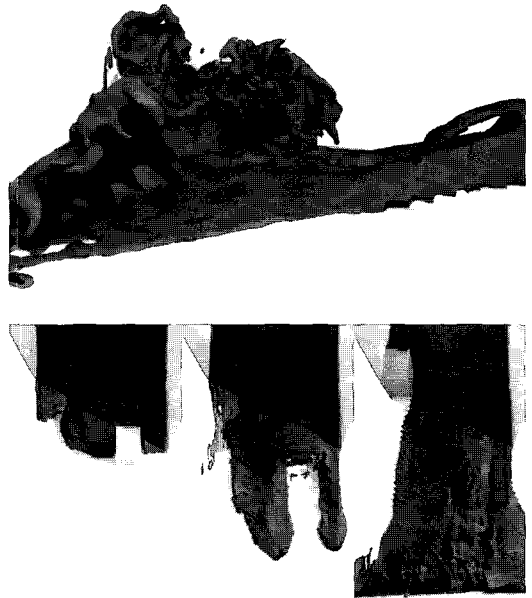


Figure 4: 홍수 시뮬레이션의 결과: 아래의 세 그림들은 위에서 바라본 홍수의 진행 상황을 보여준다. 위의 그림은 옆에서 바라본 모습이다.

- [4] FEDKIW, R., STAM, J., AND JENSEN, H. W. 2001. Visual simulation of smoke. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2001)* 35, 15–22.
- [5] FOSTER, N., AND FEDKIW, R. 2001. Practical animation of liquids. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2001)* 35, 23–30.
- [6] FOSTER, N., AND METAXAS, D. 1996. Realistic animation of liquids. *Graphical models and image processing: GMIP 58*, 5, 471–483.
- [7] FOSTER, N., AND METAXAS, D. 1997. Controlling fluid animation. In *Computer Graphics International 97*, 178–188.
- [8] GUENDELMAN, E., SELLE, A., LOSASSO, F., AND FEDKIW, R. 2005. Coupling water and smoke to thin deformable and rigid shells. *ACM Transactions on Graphics* 24, 3, 973–981.
- [9] HONG, J.-M., AND KIM, C.-H. 2005. Discontinuous fluids. *ACM Transactions on Graphics* 24, 3, 915–920.
- [10] KANG, M., FEDKIW, R., AND LIU, X.-D. 2000. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.* 15, 323–360.
- [11] LIU, X.-D., FEDKIW, R., AND KANG, M. 2000. A boundary condition capturing method for poisson’s equation on irregular domains. *J. Comp. Phys.* 160, 151–178.
- [12] LOSASSO, F., GIBOU, F., AND FEDKIW, R. 2004. Simulating water and smoke with an octree data structure. *ACM Transactions on Graphics* 23, 3, 457–462.
- [13] PARK, S. I., AND KIM, M. J. 2005. Vortex fluid for gaseous phenomena. In *Proceedings of Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation 2005*, 261–270.
- [14] SELLE, A., RASMUSSEN, N., AND FEDKIW, R. 2005. A vortex particle method for smoke, water and explosions. *ACM Transactions on Graphics* 24, 3, 910–914.
- [15] SONG, O.-Y., SHIN, H., AND KO, H.-S. 2005. Stable but non-dissipative water. *ACM Transactions on Graphics* 24, 1, 81–97.
- [16] STAM, J. 1999. Stable fluids. *Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH ’99)* 33, Annual Conference Series, 121–128.
- [17] STANFORTH, A., AND CÔTÉ, J. 1991. Semi-lagrangian integration scheme for atmospheric model - a review. *Mon. Weather Rev.* 119, 12, 2206–2223.
- [18] YABE, T., AND AOKI, T. 1991. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation i. one-dimensional solver. *Comp. Phys. Comm.* 66, 219–232.
- [19] YABE, T., AND AOKI, T. 1991. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation ii. two- and three dimensional solvers. *Comp. Phys. Comm.* 66, 233–242.
- [20] YABE, T., XIAO, F., AND UTSUMI, T. 2001. The constrained interpolation profile method for multiphase analysis. *J. Comp. Phys.* 169, 556–593.