

진동형상 민감도에 의한 가속도계 최적위치 결정

Determination of Optimal Accelerometer Locations using Mode-Shape Sensitivity

권순정¹⁾ · 신수봉²⁾

Kwon, Soon-Jung · Shin, Soobong

국문 요약 >> 이 논문에서는 진동형상의 민감도로 유도한 피셔정보행렬(Fisher Information Matrix)를 이용하는 가속도계의 최적위치 결정 기법 MS-EIDV(modal sensitivity-effective independence distribution vector)을 제안하고, 이를 사용하여 구조물의 동적 거동을 잘 반영하여 가속도계의 최적위치를 결정할 수 있는 합리적인 기준을 제시한다. 실험을 위한 가속도계의 최적위치는 구조물의 변수가 가지값이어야 결정되지만 구조물의 변수값은 실험결과를 사용한 SI(system identification)기법과 같은 역해석을 통해 구해지기 때문에, 본 논문에서는 구조변수의 오차를 감안하여 미지의 구조물의 현 상태를 통계적으로 반영하는 방법을 제시하였다. 제안된 방법들의 검증을 위해 주파수영역 SI기법을 적용하였으며, 구조변수 추정 결과를 통해 현장에서 계측하고자하는 진동형상의 수에 따른 최소 필요 가속도계의 개수를 제시하였다. 수치예제에서는 진동형상만을 이용한 최적위치 결정법인 EIDV기법과 제안된 MS-EIDV기법에 의해 추정된 구조변수 결과를 비교하였다.

주요어 최적가속도계위치, 피셔정보행렬, MS-EIDV, 진동형상 민감도, SI

ABSTRACT >> This paper proposes a new algorithm of MS-EIDV (modal sensitivity-effective independence distribution vector) for determining optimal accelerometer locations (OAL) by using the Fisher Information Matrix (FIM) derived from mode-shape sensitivities. Also, the paper provides a reasonable guideline for selecting OAL which can reflect dynamic responses of a structure effectively. Since OAL should be determined with known values of structural parameters but since the parameters can be estimated by applying an inverse method such as SI (system identification) using measured response, the paper proposes a statistical method to overcome the paradox by considering the error bound of the structural parameters. To examine the proposed methods, a frequency-domain SI method has been applied. By using the identified results, the minimum necessary number of accelerometers could be selected depending on the number of target measurable modes. Through simulation studies, the results by applying EIDV method directly using the information of mode shapes were compared with those by applying the proposed MS-EIDV.

Key words OAL, FIM, MS-EIDV, mode-shape sensitivity, SI

1. 서론

토목구조물은 그 규모가 크고 복잡하며 해석모델 역시 많은 자유도를 갖는다. 측정된 구조물의 동적응답을 이용하여 구조변수를 추정하는 효과적인 방법으로는 System Identification (SI)이라 불리는 역해석 기법이 주파수영역(frequency-domain) SI⁽¹⁻³⁾ 및 시간영역(time-domain) SI⁽⁴⁻⁷⁾로 나뉘어 각각 토목

분야에서도 최근 활발히 연구되고 있다. 구조물 역해석 문제를 실제 구조물에 적용할 때 회전자유도 및 지점 부위의 거동 등은 측정하기가 어렵기 때문에 측정할 수 있는 자유도의 수가 제한을 받게 된다. 따라서 좋은 SI 결과를 유도하기 위해서는 측정위치의 선택이 무엇보다도 중요하다. 특히 SI 기법에 의한 구조변수의 추정에 측정오차(measurement noise)를 고려할 경우, SI 결과의 정확성은 이러한 측정위치의 선택 및 측정위치의 개수에 따라 크게 좌우된다. 그러나 SI 기법 적용의 결과에 대한 측정위치 선택의 영향이 무시할 수 없음에도 불구하고 토목구조물의 거동을 계측할 최적 센서위치(OSL: Optimal Sensor Location) 결정의 문제는 아직 그렇게 심각하게 고려되고 있지 못하다.

¹⁾ 인하대학교 토목공학과 박사후연구원, 공학박사
(대표지자: sjkwon21@inha.ac.kr)

²⁾ 정회원·인하대학교 토목공학과 부교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2007년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

(논문접수일 : 2006. 10. 10 / 심사종료일 : 2006. 11. 22)

구조물의 동적거동의 측정은 구조물에 설치된 다양한 센서들에 대한 현장실험으로 수행된다. 구조물의 전체적인 동적거동특성을 파악하기 위해서 일반적으로 가속도계를 사용하고 있으나, 측정장비 및 가속도계의 가격이 고가임으로 일반적인 교량의 동적실험에 소수의 제한된 가속도계만을 현장에서 사용하고 있는 실정이다. 상시진동실험(ambient vibration test)에서는 실제 가속도계 개수를 증가시키지 않고 modal 자료를 확장하여 얻기 위하여 기준(reference) 가속도계의 위치를 고정시킨 상태에서 소수의 가속도계를 이동시키면서 전체 구조물의 동적거동을 반복적으로 파악하는 실험을 수행하는 것이 일반화되어 있다.⁽⁸⁾ 그러나 이 경우에도 현장 실험의 여건상 가속도계를 다시 설치하고 장비를 연결하는 시간이 상당히 소요되므로 가속도계를 설치할 수 있는 위치는 제한적일 수밖에 없다. 또한 장기 모니터링을 위해 가속도계를 고정 매설할 경우에는 더욱 가속도계의 개수가 제한되기 때문에 영구적으로 가속도계를 설치할 수 있는 위치는 제한된다.

일반적으로 측정위치의 선택은 어떤 체계적인 선택에 따른 영향의 분석에 의해 결정되기 보다는 엔지니어의 직감 혹은 구조물의 대칭성과 구조물의 동적 거동을 무시한 정역학적 지식을 바탕으로 정해지고 있는 실정이다. 특히 계측에 사용할 측정센서의 개수가 제한되어 있는 경우에도 센서의 개수에 무관하게 일반적인 선택법이 그냥 적용되는 경우가 많다. 특히 SI 기법에 의해 식별되는 구조변수의 추정값은 동적응답의 측정위치의 선택에 따라 그 결과가 변하며, 심한 경우에는 제대로 구조변수를 추정할 수 없는 경우도 발생한다. 따라서 효과적인 SI 기법의 활용을 위해 경험이나 직관에 의하지 않으면서 보다 체계적인 OSL기법의 개발과 그 적용이 필요하다. 이 논문에서는 다양한 종류의 센서 중 구조물의 전체적 양상을 측정할 수 있는 가속도계의 위치 즉 최적가속도계위치(OAL: Optimal Accelerometer Location) 및 OAL의 최적 개수를 구하는 가이드라인을 제시한다.

문헌조사를 통한 최적센서위치 결정법에 관한 연구동향은 크게 Fisher Information Matrix (FIM)이라 불리는 통계학적 수학기법을 사용하여 최적센서위치를 결정하는 것과 그렇지 않은 것 두 가지로 분류 할 수 있다. FIM을 이용한 방법 중에는 민감도해석을 적용하지 않은 최적센서위치 결정법⁽⁹⁾과 민감도해석을 적용한 최적센서위치 결정법⁽¹⁰⁻¹²⁾으로 나뉜다. 그러나 기존의 연구에서 제시하는 민감도 해석은 진동형상의 민감도를 제안된 식에서 직접 구하는 것이 아니라 하나의 변수를 고정하고 이때의 다른 변수들의 변화를 계산하는 일종의 반복기법의 민감도해석이다. FIM을 이용하지 않은 방법 중에는 Hankel matrix를 이용한 연구⁽¹³⁻¹⁵⁾

들이 있다.

기존의 OAL기법들에서 간과되었던 점은 OAL이 구조계에 대한 정보가 기지의 값이라는 가정에서 결정되지만 실제 구조물에 대한 정확한 구조변수는 기지의 정보가 아니라는 것이다. 특히 SI기법을 적용하기 위하여 OAL을 결정하려는 경우에는 SI는 미지의 구조변수를 추정하여 구조계를 식별하려는 것인 반면, OAL 기법은 주어진 기지의 구조계를 바탕으로 센서위치를 결정하는 것이기 때문에 서로 구하고자 하는 것이 묻고 물리는 모순에 빠지게 된다. 이러한 순환적 모순을 벗어나기 위해 이 논문에서는 실제 변수값과 설계 변수값 사이의 차이를 인정하고, 이 차이를 일정한 오차로 고려하는 Monte Carlo 기법을 통해 통계적으로 분석하는 방법을 제시하고 있다.

본 논문에서 제안한 기법들을 비대칭 2경간 트러스구조물에 대한 수치예제를 통해 검증하였다.

2. 최적가속도계위치 알고리즘

2.1 Maximum Likelihood 법의 확률론적 접근

Fisher에 의해 소개된 최우추정법(maximum likelihood estimation method)⁽¹⁶⁾은 많은 공학적 문제를 확률론적인 관점에서 접근할 수 있는 근거를 제공한다. 측정오차가 센서 사이에 서로 독립적이고 평균이 0(zero)이며 분산이 σ_n^2 인 정규분포를 한다면, 구조변수 x 의 최적값은 측정값에 미치는 가능성이 예측에 비해 상대적으로 최대가 되게 하는 것이라 정의할 수 있다. 다시 말하면, 최적의 변수 추정값은 측정의 결합확률밀도함수 $f(\tilde{\Phi}_m | x)$ 를 최대화시키는 것이라 정의할 수 있다. 여기서 확률변수 $\tilde{\Phi}_m$ 는 측정된 nmm 개의 모드의 제한된 자유도에서 측정된 진동형상 행렬로 다음과 같이 정의된다.⁽¹¹⁾

$$\tilde{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \cdots & \tilde{\phi}_{1nmm} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{\phi}_{Nm1} & \cdots & \tilde{\phi}_{Nm nmm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

확률변수가 주어져 있을 때 결합확률밀도함수 f 를 변수 x 의 함수로 나타낸 우도함수(likelihood function) $f(\tilde{\Phi}_m | x)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$f(\tilde{\Phi}_m | x) = \left[(2\pi)^{N_m \times nmm} \prod_{i=1}^{nmm} \text{Det}(C_i) \right]^{-1/2} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nmm} (\tilde{\phi}_{ai}(x) - \tilde{\phi}_{mi})^T C_i^{-1} (\tilde{\phi}_{ai}(x) - \tilde{\phi}_{mi}) \right] \quad (2)$$

여기서 \mathbf{x} ($N_p \times 1$)는 미지의 구조변수 벡터, 측정자유도의 개수 N_m 에 대해 $\tilde{\phi}_{ai}$ 는 ($N_m \times 1$)의 크기로 제한된 N_m 개의 자유도에서 계산된 i 번째 모드의 진동 형상 벡터, $\tilde{\phi}_{mi}$ 은 ($N_m \times 1$)의 크기로 계산된 것과 같은 자유도에서 측정된 i 번째 모드의 진동형상 벡터이며, \mathbf{C}_i ($N_m \times N_m$)는 i 번째 모드의 측정치에 대한 공분산(covariance) 행렬이다.

식 (2)을 로그 스케일로 변환시키면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L^* = -2 \ln f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}) = N_m \times nmm \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^{nmm} \ln \text{Det}(\mathbf{C}_i) + \sum_{i=1}^{nmm} (\tilde{\phi}_{ai}(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi})^T \mathbf{C}_i^{-1} (\tilde{\phi}_{ai}(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi}) \quad (3)$$

실험에 의한 측정오차가 구조변수 \mathbf{x} 와 서로 독립적인 것으로 가정할 수 있으면 식 (3)의 첫 번째와 두 번째 항은 일정한 값이 되기 때문에 식 (3)의 L^* 를 최소화하는 것은 다음 식의 L 을 최소화하는 것과 같은 문제가 된다.

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nmm} (\tilde{\phi}_{ai}(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi})^T \mathbf{C}_i^{-1} (\tilde{\phi}_{ai}(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi}) \quad (4)$$

측정값의 분산 σ_n^2 이 모든 측정위치와 측정값에 대해 동일하다고 가정되면 공분산 행렬 \mathbf{C} 는 $\mathbf{C} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ 로 나타낼 수 있기 때문에 식 (4)는 다음과 같이 변환된다.

$$\text{Minimize}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_p}} L = \sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^{nmm} \|\tilde{\phi}_{ai}(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi}\|^2 \quad (5)$$

식 (5)는 least-squares 문제를 푸는 것이 되기 때문에 식이 성립되기 위하여 $nmm \times N_m \geq N_p$ 의 식별조건을 만족시킬 필요가 있다.

2.2 Fisher Information Matrix 유도

미지의 구조변수를 추정하기 위해서는 실험에 의해 제공되는 정보가 최대화되어야 한다. 모든 실험계획은 허용 가능한 실험조건에 대한 제약을 고려해서 결정되기 때문에 서로 다른 실험의 유용성을 비교하기 위해서는 실험의 우수성을 서로 비교할 수 있는 기준을 정할 필요가 있다. 일반적으로 이러한 최적의 조건을 정의하기 위해 사용되는 대부분의 접근법들은 추정오차를 최소화하여 구조변수를 추정하는 방법에 기초하고 있다. 이러한 방법들 중 하나인 Cramer-Rao 부등식에 의한 방법을 적용하면, 추정오차의 하한값은 \mathbf{F}^{-1} 로 정의된다. 여기서 \mathbf{F} 는 Fisher Information Matrix(FIM)

로 앞 절에서 정의한 확률밀도함수 $f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})$ 에 의해 다음 식으로 정의될 수 있다.⁽¹⁷⁾

$$\mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) = E_{\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}} \left\{ \left[\frac{\partial \log f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \left[\frac{\partial \log f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right\} \quad (6)$$

식 (2)을 식 (6)에 대입하여 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) &= E_{\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}} \left[\left\{ \nabla \ln f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}) \right\} \left\{ \nabla \ln f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}) \right\}^T \right] \\ \mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{nmm} \left[\boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \boldsymbol{\Theta}_i + \boldsymbol{\Psi}_i \right] \quad (N_p \times N_p) \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식에서 $\boldsymbol{\Theta}_i$ 는 식 (8)로 정의되는 i 번째 모드에서의 미지변수에 대한 진동형상의 민감도(sensitivity) 행렬이며, $\boldsymbol{\Psi}_i$ 는 식 (9)와 같이 정의되는 함수이다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial x_l} \\ \frac{\partial x_l}{\partial x_l} \end{pmatrix} \\ k &= 1, 2, \dots, N_m \quad l = 1, 2, \dots, N_p \quad i = 1, 2, \dots, nmm \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Psi}_i)_{lm} &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{C}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial x_l} \mathbf{C}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial x_m} \right] \\ i &= 1, 2, \dots, nmm \quad l, m = 1, 2, \dots, N_p \end{aligned} \quad (9)$$

FIM \mathbf{F} 의 형태를 보다 단순화하기 위하여 일반적으로 공분산 행렬 \mathbf{C} 를 2.1절에서 정의한 바와 같이 $\mathbf{C} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ 로 가정한다면, $\partial \mathbf{C}_i / \partial x_j = 0$ 이 된다. 이는, 모든 센서들이 같은 형태의 측정오차에 노출된다고 가정하며, 각 센서의 측정오차는 서로 상관(correlated)되어 있지 않다면 측정오차 공분산은 구조변수 \mathbf{x} 와는 서로 독립으로 가정한 것이다. 이와 같이 가정할 경우 식 (9)의 FIM \mathbf{F} 는 다음의 형태로 축소시킬 수 있다.

$$\mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nmm} \left[\boldsymbol{\Theta}_i^T \boldsymbol{\Theta}_i \right] \quad (N_p \times N_p) \quad (10)$$

2.3 진동형상의 민감도에 의한 OAL 알고리즘

이 논문에서는 Penny 등⁽⁹⁾이 사용한 진동형상 자체를 사용한 FIM이 아닌, 식 (10)에서 정의된 진동형상의 민감도를 고려한 FIM \mathbf{F} 를 사용하였다.⁽¹⁸⁾ 다만 식 (10)에 FIM \mathbf{F} 행렬에서 진동형상의 유효독립성을 최대화하기 위하여 이 논문에서는 Penny 등(1994)에 의해 제안된 유효독립분포벡터(EIDV) 개념을 도입하였다. 식 (11)에서의 FIM을 각 모드별로 계산하여 역등원행렬 \mathbf{E}_i 를 다음과 같이 정의하였다.

떡등원행렬 \mathbf{E} 는 행렬의 대각합이 그 FIM 행렬 \mathbf{F} 의 rank와 같은 행렬을 의미한다. 최적센서위치를 구하기 위한 과정으로 식 (11)에서와 같이 각 모드별 \mathbf{E}_i 행렬의 대각성분만을 구하고, 각 모드의 대각성분을 더하면 최종적인 유한독립분포벡터 \mathbf{e}_d 를 다음 식에서와 같이 계산할 수 있다. 이 벡터 \mathbf{e}_d 항들 중 최소항을 단계적으로 소거하여 남은 자유도로 최적위치를 결정할 수 있다. 식 (11)로 정의 되는 진동형상 민감도에 의한 가속도계 최적위치설정 알고리즘은 기존연구와 달리 구조변수의 민감도가 고려되어 새로이 수학적으로 정의 되었으므로 이 논문에서 MS-EIDV라 명한다.

$$\mathbf{e}_d = \sum_{i=1}^{nm} \mathbf{e}_{di} \text{ where } \mathbf{e}_{di} = \text{diag}[\mathbf{E}_i] (N_m \times 1)$$

$$\text{with } \mathbf{E}_i = \tilde{\mathbf{S}}_i [\tilde{\mathbf{S}}_i^T \tilde{\mathbf{S}}_i]^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_i^T (N_m \times N_p) \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{S}_i (N_m \times N_p)$ 는 i 번째 모드에서의 미지변수에 대한 진동형상의 민감도 행렬로 앞서 정의된 식 (10)과 같으며 민감도 행렬임을 강조하기 위해 \mathbf{S} 로 기호를 바꾸어서 다시 사용하고 있다.

2.4 진동형상 민감도 정식화

이 논문에서는 식 (8)의 진동형상의 구조변수에 대한 민감도를 고유치 벡터의 민감도를 구하는 여러 가지 방법들 중에서 Lee and Jung⁽¹⁹⁾에 의해 제안된 다음의 직접 계산법을 사용하였다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i \\ -\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \boldsymbol{\phi}_i / \partial x_j \\ \partial \lambda_i / \partial x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial \boldsymbol{\phi}_i / \partial \mathbf{K}_j \\ 0.5 \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i \quad (12)$$

식 (12)는 고유치가 중근인 경우에도 약간의 수정을 통해 응용할 수 있는 방법이다. 식 (11)에 의한 떡등원행렬 \mathbf{E} 의 계산에 FIM \mathbf{F}_i 의 역행렬이 곱해지는 과정에서 수치적인 문제가 발생할 수 있다. FIM \mathbf{F}_i 가 식 (8)의 i 번째 모드 진동형상의 N_p 개의 구조변수에 대한 민감도로 정의가 되는데, 이 민감도벡터들이 선형독립(linear independent) 관계에 있지 않는 경우가 발생할 수가 있다.

일반적으로 측정자유도의 수가 구조변수의 수보다 크므로 ($N_m \geq N_p$) \mathbf{F}_i 행렬의 $\text{rank}(\mathbf{F}_i) = \text{column rank}(\mathbf{F}_i) = N_p$ 가 되어야 역행렬을 구하는 데 발생하는 수치적인 문제가 사라질 수 있다. 그러나 진동형상들은 고유벡터의 직교성(orthogonality) 조건에 의해 $\text{rank}(\mathbf{F}_i) = \text{column rank}(\mathbf{F}_i) = N_p$ 의 조건을 만족시킬 수 있지만 고유벡터의 민감도로 정의되는 경우에는 $\text{rank}(\mathbf{F}_i) = \text{column rank}(\mathbf{F}_i) = N_p$ 의 조건을

만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 따라서 이 연구에서는 singular value decomposition(SVD) 기법을 적용하여 singular value가 정의한 허용치(tolerance) 보다 작은 값은 무시하는 방법을 통하여 FIM \mathbf{F}_i 의 역행렬을 구하도록 하였다. 각 자유도번호에 대응하는 SVD의 값 중 가장 큰 값을 각 자유도번호에 대응하는 SVD에 나누면 각 자유도번호에 따른 condition number가 계산된다. 여기서 기울기가 급격히 변화 하는 부분을 허용치로 정의하여 그 이상의 SVD 부분은 제거하였다.

2.5 구조변수 오차의 고려

사용 중인 구조물의 최적응답을 얻기 위해서는 현장실험 전에 최적의 센서위치를 결정해야 한다. 하지만 구조물이 설계되면 대로 정확히 시공되었다고 보장할 수 없다. 그러므로 이 논문에서는 모드형상의 민감도가 고려된 최적센서의 위치를 결정하기 위해 구조물의 변수오차를 포함하여 구조물의 재료특성의 정규분포 오차범위 안에서 센서의 위치를 결정하는 방법을 제시한다. 이를 위해서 주어진 오차범위 내에서 센서의 위치 결정에 적절한 반복횟수가 결정되어야 한다. 이 논문에서는 이 반복횟수를 결정하기 위하여 수치예제의 1차 모드부터 3차의 모드형상까지를 고려했을 경우에 관하여 구조변수의 오차를 10%로 가정하여 100회의 반복 작업을 한 후 센서의 위치가 안정적으로 결정되는 때를 반복 횟수로 결정하였다.

구조물의 변수오차를 포함하여 주어진 오차범위 내에서 반복 계산된 센서의 선택 순위 결과 50회의 반복횟수 정도면 센서의 선택 위치가 일관성을 가짐으로 앞으로 수행되는 민감도를 고려한 센서의 위치결정에는 구조 변수오차에 대한 반복횟수를 50회로 고정하고 OAL 예제를 수행하였다.

OAL의 선택 결과를 검증하기 위하여 적용한 주파수영역 SI기법에서는 측정오차를 5% 가정하고 구조변수의 초기값은 OAL 수행시 가정한 10%로 하여 Monte Carlo 반복을 100회 하였을 때의 결과 값의 안정성을 검토하였다. 안정성의 검토 결과 30회 이상의 Monte Carlo 반복법에서는 일정한 SI 결과값을 나타내고 있으므로 SI기법의 측정오차에 대한 반복횟수의 검증은 30회로 한다.

3. 주파수영역 SI 알고리즘

구조물을 진동시켜 측정된 시간영역 데이터를 처리하여 주파수영역의 고유진동수와 진동형상을 구하게 된다면, 계측된 진동형상과 계산에 의한 진동형상의 오차를 최소화하

는 다음식의 과정으로 최적의 구조변수를 구하는 주파수영역 SI 기법을 정의할 수 있다.⁽²⁾

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_p}} \quad & J(\mathbf{x}) = J_o(\mathbf{x}) + J_r(\mathbf{x}) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{mm} \|\tilde{\Phi}_{oi}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}_{mi}\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\Delta \mathbf{K}(\mathbf{x})\|_F^2 \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x}_{lo} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{up} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\|\Delta \mathbf{K}(\mathbf{x})\|_F^2 = \|\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_o)\|_F^2$ 는 강성도 행렬 $\mathbf{K}(N \times N)$ 의 기준값과의 차이에 대한 $\|\mathbf{K}\|_F^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (k_{ij})^2}$ 로 정의되는 Frobenius norm이다. \mathbf{x}_{lo} 및 \mathbf{x}_{up} ($N_p \times 1$)은 \mathbf{x} 의 상한값 및 하한값이다. N 및 β 는 전체자유도의 개수 및 정규화계수이다.

4. 수치예제

진동형상 민감도에 의한 OAL를 결정하기 위해 비대칭 2경간 트러스 교량의 수치예제를 수행하였다. 수치예제는 8개의 그룹으로 모델링 되었으며, 고려대상 모드가 1차 모드부터 3, 4, 5 및 6차 모드까지의 4가지 경우에 대하여 수치예제를 수행하였다. 각 경우에 대해 가속도계 선택순위를 정하였다. 이렇게 구하여진 OAL의 합리성을 검증하기 위하여 SI 기법을 적용하면 각 고려 모드별 그룹의 수로 SI 결과가 나오기 때문에 각각의 구조물당 8개의 그룹에 4가지의 고려 경우를 곱하면 총 32가지 경우의 구조 변수 추정값이 도출되므로 각 경우의 고려 대상 모드수별 전체의 그룹의 OAL의 합리성을 판단하기가 어렵다. 이런 이유로 인하여 구조물 전체의 OAL의 합리성을 판단하기 위하여, 구조물의 전체 부재에 대한 ANM(average of normalized mean

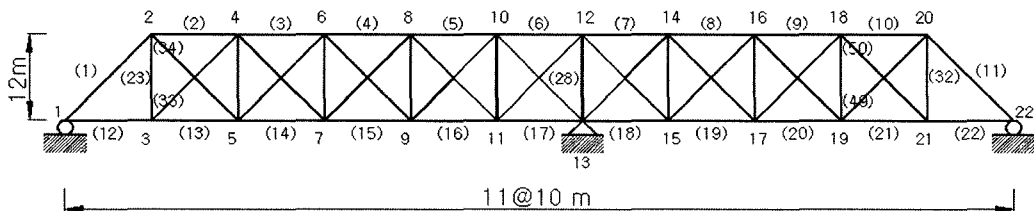
parameters), ARMS(average of root mean square error) 및 ASD(average of standard deviation)를 구하여 예제에 대한 구조물 전체의 OAL의 합리성을 검증하였다. 구조물 전체 OAL 합리성을 검증하기 위한 주파수영역 수치예제의 ANM, ARMS 및 ASD는 다음 식으로 정의 된다.⁽¹⁸⁾

$$\begin{aligned} \text{ANM} &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_g} \bar{x}_{g_i} \times N_{g_i} \\ \text{ARMS} &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_g} \sqrt{N_{g_i} (\bar{x}_{g_i} - x_{h_i})^2} \\ \text{ASD} &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_g} \bar{s}_{g_i} \times N_{g_i} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 N_e 는 전체 부재의 수, N_{g_i} 는 전체 그룹의 수, \bar{x}_{g_i} 는 Monte Carlo 반복에 의한 각 그룹의 구조변수 평균값, N_{g_i} 는 각 그룹의 부재수, x_{h_i} 는 각 그룹의 구조변수 기준값이며, \bar{s}_{g_i} 는 Monte Carlo 반복에 의한 각 그룹의 구조변수 표준편차이다.

그림 1은 주파수영역에서의 최적가속도계위치를 결정하기 위한 수치해석 예제로 각 절점 당 수직방향 및 수평방향의 변위자유도만 고려 대상으로 하는 비대칭인 2경간 트러스 모델로 이상화 하여 적용하였다. 그림 2는 고려대상 모드 차수에 따른 OAL선택 결과의 변화를 보여주고 있다. 4차 모드의 진동형상은 수평으로의 진동이 주를 이루고 있기 때문에, 그림 2에서 보듯이 1차 모드부터 4차까지를 고려 대상으로 하는 경우에 대한 OAL의 결과는 다른 고려 대상 모드까지의 OAL의 결과에 비해 수평변위에 대한 가속도계의 위치 순위가 높게 나오고 있다.

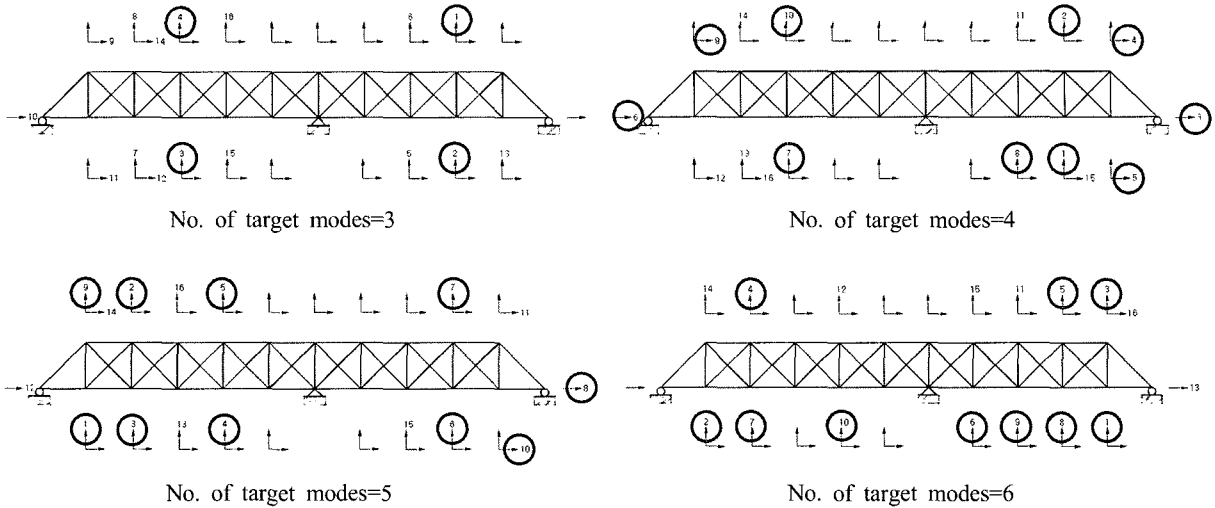
식 (5)의 식별 조건에 따라 1차모드부터 3차 모드까지 측



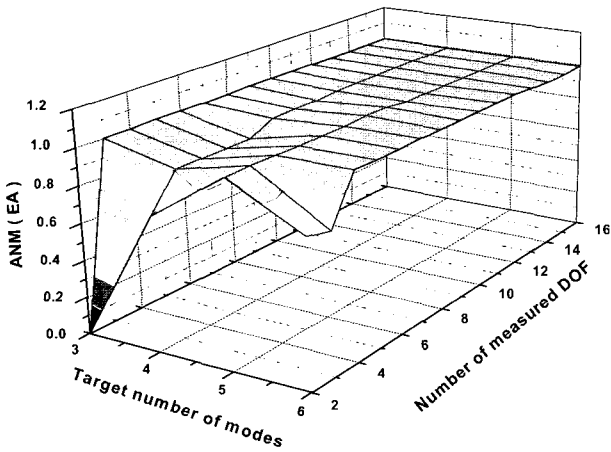
〈그림 1〉 2경간 비대칭 트러스 교량 모델

〈표 1〉 비대칭 트러스 교량의 재료특성 및 단면

Group	Member	Area[m ²]	E[Gpa]	Mass[kg/m ³]
1, 5	Left Top, Right Top	250	210	7850
2, 6	Left Bottom, Right Bottom	300		
3, 7	Left Vertical, Right Vertical	200		
4, 8	Left Diagonal, Right Diagonal	220		



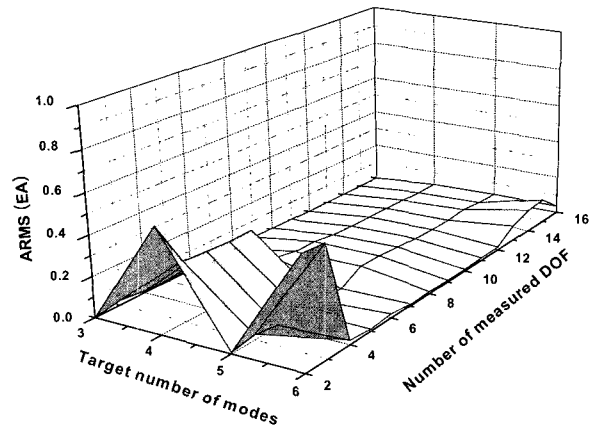
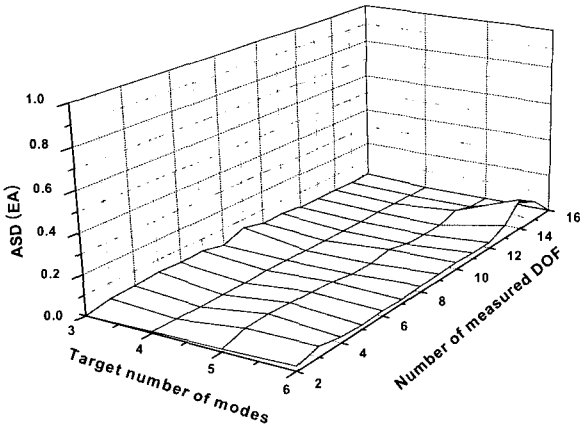
〈그림 2〉 고려대상 모드차수에 따른 제한된 방법에 의한 최적가속도계의 선택 위치



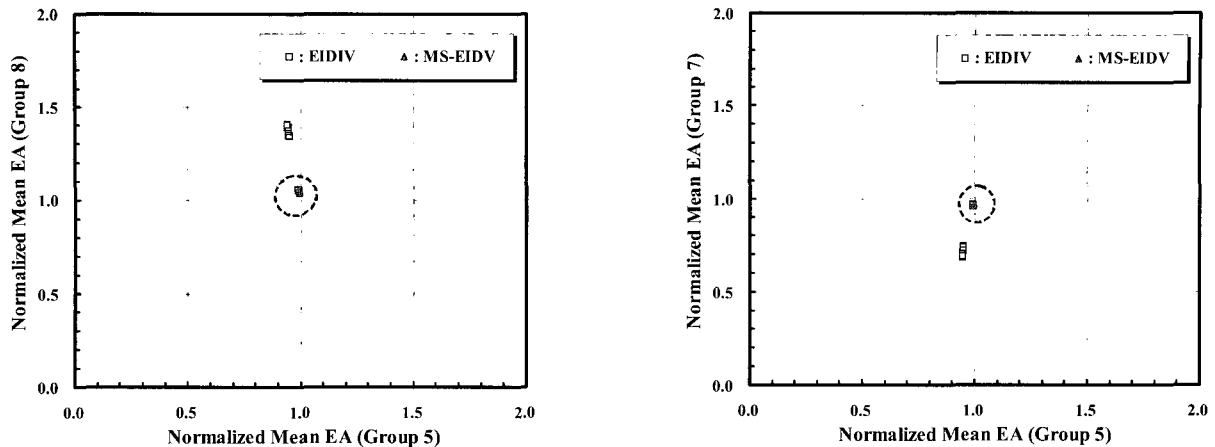
〈그림 3〉 모드 및 가속도계 개수에 따른 구조변수 추정값

정하는 경우에 대한 가속도계의 개수에 따른 구조변수 추정값은 가속도계의 선택이 최소 3개 이상 되어야만 식별조건을 만족하게 된다. 예를 들면 그림 2에서 구조변수의 ANM 수치로서 고려대상 모드수가 3개이며 가속도계 설치 개수가 2개일 때는 구조변수 추정값은 0(zero)으로 이는 식 (5)의

조건을 만족하지 않음을 잘 보여주고 있다. 그림 4는 비록 그림 3의 고려대상 모드에 따른 필요 가속도계 개수의 구조변수값이 정해에 수렴하더라도 안정적인 ARMS값과 ASD 값이 나타나는 가속도계의 일정한 개수가 필요함을 나타낸다. 이상의 그림 3과 그림 4의 결과에 따라 1차 모드부터 3차 모드까지를 측정하는 경우에 대한 구조변수의 추정을 위해서는 최소 4개의 가속도계가 그림 2의 순서로 배치되어야 하며, 1차 모드부터 4, 5, 6차모드까지 측정하는 각각의 경우에 대한 구조변수의 추정을 위해서는 최소 10개의 가속도계가 그림 2의 순서로 배치되어야 한다. 그림 4에서 1차 모드부터 6차 모드까지 측정하는 경우에 대한 가속도계의 개수에 따른 구조변수의 표준편차는 14개의 가속도계를 선택할 때 크게 나오는데 이는 SI기법을 적용할 때 고려한 측정오차의 영향이라 판단된다. 그림 5는 진동형상의 민감도를 고려하지 않은 EIDV방법과 진동형상의 민감도를 고려한 MS-EIDV방법을 적용하여 1차 모드부터 5차 모드까지 고려대상으로 하여 필요한 최소가속도계 개수인 10개를 각



〈그림 4〉 모드 및 가속도계 개수에 따른 구조변수의 ASD 및 ARMS



〈그림 5〉 상세 구조변수 추정값 (5차모드까지 10개 가속도계)

각 다르게 배치하였을 때 상세 구조변수 추정값을 비교한 것이다. 제안된 MS-EIDV의 구조변수 추정이 EIDV의 구조변수 추정값보다 분산도 적고 구조변수가 정해진 1에 수렴함을 보여주고 있다.

5. 결론

이 논문에서는 구조물의 정밀안전진단 및 연구용 실내 실험에서 엔지니어적 또는 정적구조역학 개념에 근거하여 배치되었던 가속도계의 부착 위치를 수학적 근거를 통하여 합리적으로 배치하는 기법을 제시하였다. 그 적용성의 판단을 비대칭 2경간 트러스 교량의 수치예제를 적용하여 고려하고자 하는 대상 진동 모드수에 따른 OAL 선택 순위를 결정하였으며, 주파수영역 SI기법을 적용하여 구조변수의 추정값을 구하였다. 진동형상의 민감도를 고려하지 않은 경우의 가속도계 배치 경우와 비교하여 본 논문에서 제시한 진동형상의 민감도를 고려한 OAL 기법이 역해석 결과값이 구조물의 구조변수를 정해에 잘 수렴하며 구조변수의 분산 또한 안정적으로 도출됨이 수치예제에서 확인되었다.

감사의 글

이 논문은 인하대학교의 지원에 의하여 연구되었음

참고 문헌

1. Hjelmstad, K.D. and Shin, S., "Crack identification in a cantilever beam from modal response," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 5, 1996, pp. 527-545.
2. Jang, J.H., Yeo, I.H., Shin, S. and Chang, S.P., "Experi-

mental Investigation of System- Identification-Based Damage Assessment on Structures," *J. of Struc. Eng.*, ASCE, Vol. 12,8 No. 5, 2002, pp. 673-682.

3. Vestouni, F. and Capecchi, D., "Damage detection in beam structures based on frequency measurements," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 126, No. 7, 2000, pp. 761-768.
4. Ge, L. and Soong, T.T., "Damage identification through Regularization Method I: Theory," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 124, Issue 1, 1998, pp. 103-108.
5. Hjelmstad, K.D. and Banan, M.R., "Time-Domain Parameter Estimation Algorithm for Structures I: Computational Aspects," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, Issues 3, 1995, pp. 424-434.
6. Huang, C.-H., "A non-linear inverse vibration problem of estimating the time-dependent stiffness coefficients by conjugate gradient method," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001, pp. 1545-1558.
7. Kang, J.S., Park, S.-K., Shin, S. and Lee, H.S., "Structural system identification in time domain using measured acceleration," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 288, Issues 1, 2005, pp. 215-234.
8. 정대성, 김철영, 김남식, 윤자걸, "상시진동실험을 이용한 남해대교의 동특성 평가", 대한토목학회논문집, 제 22권, 제 6-A호, 2002, pp. 1501- 1514.
9. Penny, J.E.T., Friswell, M.I. and Garvey, S.D., "Automatic choice of measurement locations for dynamic testing," *AIAA J.*, Vol. 32, No. 2, 1994, pp. 407-414.
10. Udawadia, F.E., "Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems," *J. of Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 120, No. 2, 1994, pp. 368-390.
11. Fadale, T.D., Nenarokomov, A.V. and Emery, A.F., "Two Approaches to Optimal Sensor Locations," *J. of Heat Transfer*, Vol. 117, 1995, pp. 373-379.
12. Kammer, D.C., "Optimal Sensor Placement for Modal Identification Using System- Realization Methods," *J. of*

- Guidance*, AIAA, Vol. 19, No. 3, 1996, pp. 729-731.
13. Cherng A.P. "Optimal sensor placement for modal parameter identification using signal subspace correlation techniques," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, Issue 2, 2003, pp. 361-378.
 14. Li, Y.Y. and Yam, L.H., "Sensitivity analyses of sensor location for vibration control and damage detection of thin-plate systems," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 240, Issues 4, 2001, pp. 623-636.
 15. Liu, C. and Tasker, F., "Sensor Placement for Time-Domain Modal Parameter Estimation," *J. of Guidance, control, and Dynamics*, AIAA, Vol. 19, No. 6, 1996, pp. 1349-1356.
 16. O'Connor J.J and Robertson E.F, "MacTutor History of Mathematics," <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Fisher.html>, 2003.
 17. Goodwin, G.C. and Payne, R.L., *Dynamic System Identification Experiment Design and Data Analysis*, Academic Press, New York, 1977.
 18. 권순정, "주파수영역과 시간영역에서의 가속도계 최적위치 결정 및 SI기법에 의한 검증", 박사학위논문, 인하대학교, 2006.
 19. Lee, I.-W. and Jung, G.-H., "An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities-part I. distinct natural frequencies," *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 3, 1997, pp. 429-435.