

# 고차의 진동하중을 받는 건축물 바닥판의 효율적인 진동해석

## An Efficient High-Frequency Vibration Analysis of Floors in Building Structures

김태호<sup>1)</sup> · 이동근<sup>2)</sup>

Kim, Tae-Ho · Lee, Dong-Guen

**국문 요약 >>** 본 연구의 목적은 높은 진동수 성분의 진동원을 가지는 건축물의 바닥판을 효율적으로 해석하는 방법을 제시하는 것이다. 이를 위하여 고차진동하중을 받는 건축물의 바닥판에 적절한 요소분할 방법과 이에 따른 과도한 자유도를 줄이기 위한 자유도 선택방법에 대하여 연구하였다. 그리고 일반적으로 건축물의 바닥판의 경우에는 두께에 비하여 바닥판의 길이가 길기 때문에 전단변형이 고려되지 않은 판요소를 바닥판의 모형화에 많이 사용하는데 이에 대해서도 그 적절성을 검증하였다. 그리고 여러 개의 층으로 이루어진 건축물 바닥판을 기존의 방법을 이용하여 등가의 바닥판으로 치환하였으며 이 방법의 가능성과 한계를 검토하였고 마지막으로는 예제 구조물을 중심으로 제안한 모형화 방법의 효율성을 확인하였다.

**주요어** 고차진동, 건축물, 바닥판

**ABSTRACT >>** The object of this study is to propose the efficient method for analyzing the building floors subjected to the loading with high frequency contents. For this purpose, the method for mesh division and the selection of master DOF for FE model of building floors with these loadings are studied. Also, it is verified that the availability of thin plate element that is used by structural engineers for the modelling of the building floor of which the span-thickness ratio is usually ten times and over. And the possibility and limit of the equivalent plate which is already studied by other researcher for the multi-layer plate are investigated. At last, proposed modelling method is examined by the example structure.

**Key words** high-frequency vibration, building, floor

### 1. 서론

현대의 건축물은 여러 가지 기능을 충족시켜 주기 위하여 대형화 및 복합화되는 경향이 있으며 구조적 거동 또한 매우 복잡하게 되었다. 그래서 대형구조물의 장기적 안정성 및 사용성의 확보를 위한 유지 관리 및 쾌적한 생활환경에 대한 요구가 날로 증가되고 있다. 이러한 건축 구조물들은 지진, 바람 및 건물내부의 기계설비 등에 의하여 진동 및 소음이 발생하게 되며 구조물의 안전성뿐만 아니라 환경적 문제들 까지도 중요한 요소로 대두되고 있다. 특히 생활에 의한 소음과 진동에 영향을 받게 되는 건축물의 종류는 사용자가 하루의 절반이상을 보

내게 되는 주택과 오피스이다. 우선 주택의 경우에 가장 흔한 형태의 주거환경은 아파트이고 이는 주로 벽과 바닥판만으로 이루어진다. 아파트와 같은 주거구조물에서는 다양한 진동원에 의하여 진동이 발생하고 이러한 진동은 벽과 바닥판을 통하여 이웃한 세대 및 위, 아래층 세대로 주로 전달된다. 그리고 오피스의 경우는 가장 일반적인 구조형태가 모멘트 저항 골조이고 이는 바닥판의 진동이 기둥을 통하여 인접층으로 전달되는 경로를 가진다. 이러한 구조물의 경우에는 문제가 되는 진동모드는 주로 바닥판이 진동하는 연직방향의 모드이고 이들은 대부분 수평모드에 비하여 높은 진동수를 가진다.

진동으로 인하여 발생할 수 있는 환경문제의 예로서 소음을 기준으로 보면 아이의 뽀와 같은 중량물의 충격에 의하여 구조체가 진동하여 발생하는 소음의 경우에는 63~500Hz의 옥타브 밴드 대역을 가지고 있고, 여성의 하이힐과 같은 높은 진동수 대역을 가지는 경량소음의 경우에는 125~2000Hz의 옥타브 밴드 대역을 가지고 있어 이를 해

<sup>1)</sup> 성균관대학교 건축공학과 박사후 연구원

<sup>2)</sup> 성균관대학교 건축공학과 교수

(대표저자: dglee@skku.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 12월 31일까지 학회로 보내 주시기 그 결과를 게재하겠습니다.

(논문접수일 : 2006. 3. 31 / 심사종료일 : 2006. 9. 27)

석하기 위해서는 이에 상당하는 진동모드들을 고려할 수 있어야한다. 현재 대부분의 바닥진동해석모델은 구조체의 진동문제에 집중되고 있어 대부분 100Hz이내에 대하여 유한요소법으로 접근한 경우가 대부분이다.<sup>(1-6)</sup> 지금까지는 이러한 소음문제는 유한요소법을 이용하기보다는 SEA(Statistical Energy Analysis)와 같은 기법들이 많이 사용되었다. 이것은 유한요소법을 이용할 경우에 높은 진동수를 표현할 수 있을 만큼 부재를 분할하여야하고 이는 바닥구조물과 같은 경우에 엄청난 수의 요소를 발생시키고 해석에 필요한 자유도 증가로 인하여 개인용 컴퓨터를 이용해서는 해석이 불가능한 경우가 많거나, 가능하다 하더라도 해석에 많은 시간이 소요되어 경제적이지 못하기 때문이다.

본 연구의 목적은 높은 진동수 성분의 진동원을 가지는 건축물의 바닥판을 효율적으로 해석하는 방법을 제시하는 것이다. 이를 위하여 고차진동하중을 받는 건축물의 바닥판에 적절한 요소분할 방법과 이에 따른 과도한 자유도를 줄이기 위한 자유도 선택방법에 대하여 연구하였다. 그리고 일반적으로 건축물의 바닥판의 경우에는 두께에 비하여 바닥판의 길이가 길기 때문에 전단변형이 고려되지 않은 판요소를 바닥판의 모형화에 많이 사용하는데 이에 대해서도 그 적절성을 검증하였다. 그리고 여러 개의 층으로 이루어진 건축물 바닥판을 기존의 방법을 이용하여 등가의 바닥판으로 치환하였으며 이 방법의 가능성과 한계를 검토하였고 마지막으로는 예제 구조물을

중심으로 제안한 모형화 방법의 효율성을 확인하였다.

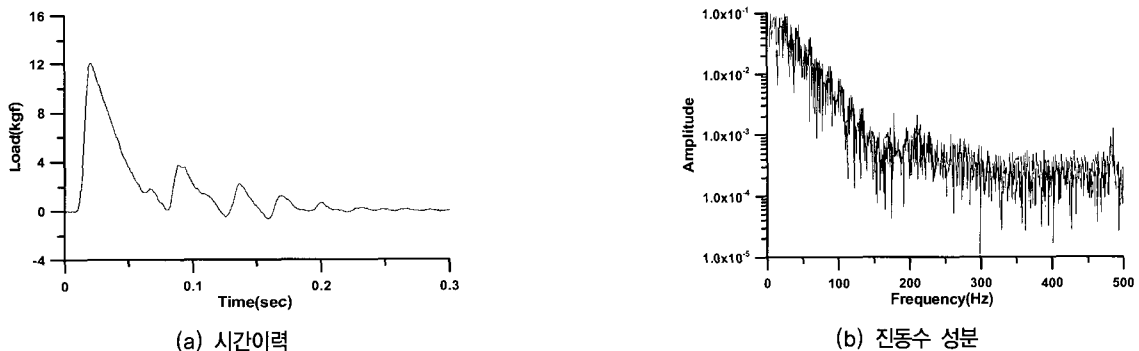
## 2. 건축물의 바닥진동해석 모형

### 2.1 유한해석모형

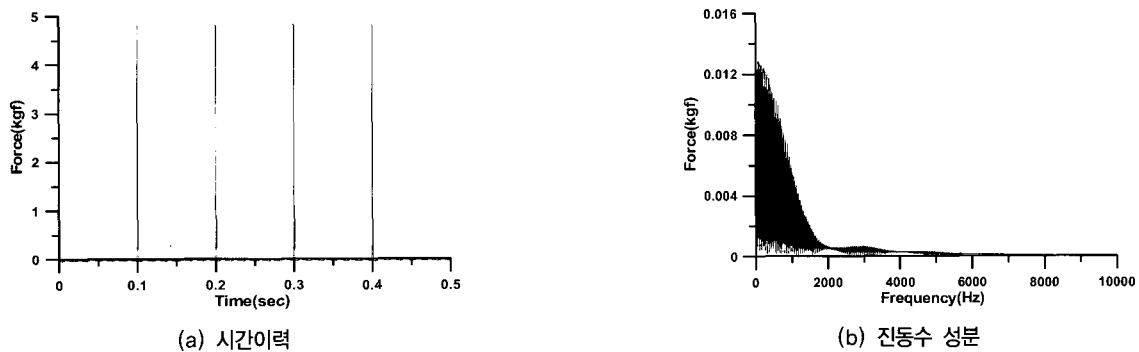
건축물의 바닥판은 기본적으로 구조체인 콘크리트 슬래브와 용도에 따라 추가되는 마감층으로 구성된다. 주차장 등과 같이 무거운 하중을 받는 경우에는 마감층의 손상 등으로 인하여 구조체로 인식되지 않지만 주거나 사무용 등으로 사용되는 경우에는 마감층 또한 구조체와 일체로 거동하는 경우도 많다. 이에 많은 연구자<sup>(1,4,6)</sup>들은 바닥판의 진동해석을 수행하기 위하여 다양한 방법을 이용하여 왔다. 이들이 사용한 가장 많은 요소는 판요소와 쉘요소이며 이 요소들에 다양한 재료적 특성-등방성, 이방성 등을 고려하여 정확한 모형화를 시도하고 있다. 건축물 바닥판이 평평하고 주로 힘에 의하여 영향을 받기 때문에 본 연구에서는 판요소를 사용하기로 한다. 사용한 요소는 얇은 판요소의 경우는 MZC<sup>(7)</sup> 사각형 요소이며 두꺼운 판요소의 경우에는 Mindlin-Reissner<sup>(8)</sup> 이론에 근거한 사각형 요소를 사용하였다.

### 2.2 하중모형

건축물 바닥판에 작용할 수 있는 대표적인 하중으로 공을 떨어뜨렸을 경우(그림 1)와 하이힐과 같은 고차의



〈그림 1〉 중량충격하중(공의 낙하)



〈그림 2〉 경량충격하중(Tapping Machine의 하중 모사)

진동수를 포함한 경우(그림 2)가 있다. 그림 1의 하중은 직접 농구공을 1m 위치에서 로드셀에 떨어뜨려 직접 계측한 것이며 그림 2의 하중은 ISO 기준<sup>(10)</sup>에서 제시한 경량충격하중의 기준에 의하여 모사한 것이다. 그림 1의 하중은 120Hz 부분까지 하중이 분포하여 비교적 저차의 진동모드들에 관계되는 것을 알 수 있으며 그림 2의 하중은 2000Hz정도 까지로 넓게 분포하여 고차의 진동모드까지 관계되는 것을 알 수 있다.

### 2.3 바닥판의 요소분할과 주자유도 선택

건축물의 진동해석을 수행할 경우에는 일반적으로 골조 해석만을 수행하는 경우가 많다. 그러나 실제로 진동이 발생하는 곳은 대부분 바닥판이며 그 하중원(사람, 기계 등)도 바닥판에 가해지는 경우가 많다. 정확한 해석을 수행하기 위해서는 바닥판을 포함한 해석이 필수적이며, 바닥판의 모형을 위해서는 판요소가 사용되어야만 한다. 이것은 골조 구조물의 해석에 필요한 것보다 많은 요소와 함께 많은 절점이 필요하여 해석시간이 길어지게 되고 계산 용량도 늘어나게 된다. Lee 등<sup>(11)</sup>은 건축물 바닥판의 효율적인 연직진동 해석을 위해서는 바닥판을 4×4이상으로 분할하는 것이 필요하다고 발표하였다. 그러나 이 연구결과는 주로 저차의 진동모드들의 기여만을 고려한 것으로 고차의 진동모드를 포함하는 경우에는 적절하지 않은 문제점이 있었다. 과도한 요소분할은 엄청난 해석시간 및 메모리를 필요로 하고 때로는 PC로는 해석이 어려운 경우도 있다. 이에 많은 연구자들은 행렬응축기법을 통하여 해석의 효율성을 얻고 있다.<sup>(11-15)</sup>

본 연구는 그림 1과 2에 제시된 것과 같이 높은 진동수 대역의 하중을 포함하여야 하며 이에 따른 응답을 정확히 표현하기 위해서는 많은 요소로 분할하는 것이 필수적이기 때문에 자유도 선택이 간편하면서도 많은 자유도를 줄일 수 있는 Lee의 방법을 선택하였다. 본 논문에서는 Guyan<sup>(16)</sup>의 동적행렬응축기법을 사용하였으며 다음과 같은 과정으로 이루어져 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{AA} & \mathbf{M}_{AB} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}}_A \\ \ddot{\mathbf{D}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_A \\ \mathbf{D}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_A \\ \mathbf{A}_B \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 M, K는 각각 질량, 강성행렬이며, D와  $\ddot{D}$ 는 각각 변위벡터, 가속도 벡터이고 A는 하중벡터이다. 그리고 아래첨자 A와 B는 각각 제거될 자유도와 남는 자유도를 나타낸다. 소거될 자유도 A의 변위가 B에 종속된다면 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\mathbf{D}_A = \mathbf{T}_{AB} \mathbf{D}_B = -\mathbf{S}_{AA}^{-1} \mathbf{S}_{AB} \mathbf{D}_B \quad (2)$$

이 관계는 두 번 미분한 가속도 관계에서도 성립하고 이 관계를 이용하면 다음과 같이 응축된 새로운 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_{BB}^* \ddot{\mathbf{D}}_B + \mathbf{K}_{BB}^* \mathbf{D}_B = \mathbf{A}_B \quad (3)$$

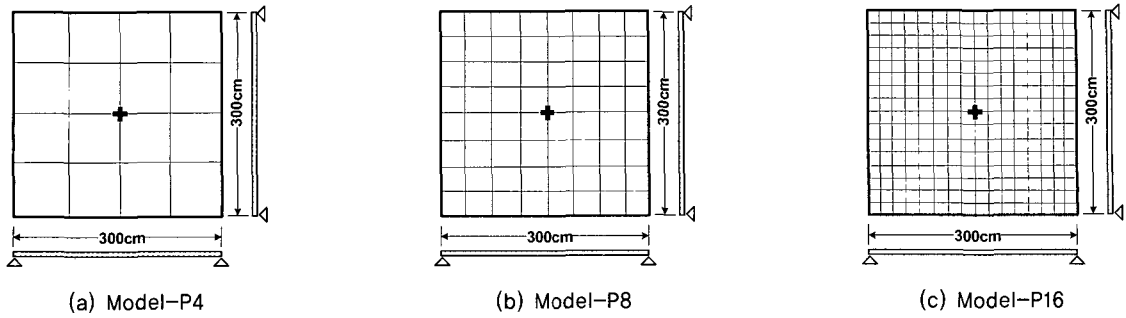
여기서  $\mathbf{K}_{BB}^*$ 와  $\mathbf{M}_{BB}^*$ 는 응축된 강성 및 질량행렬이다.

## 3. 건축물 바닥판의 요소분할과 행렬응축

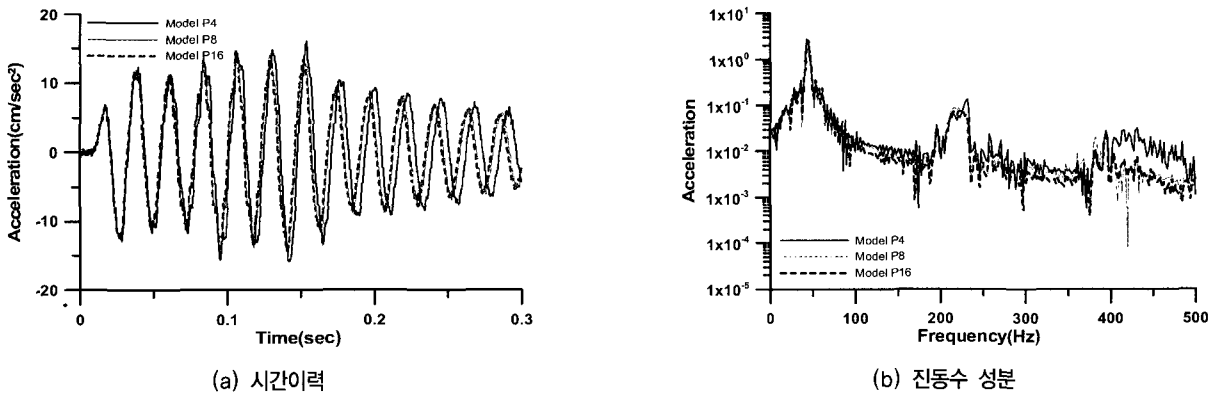
앞 장에서 살펴본 바와 같이 높은 진동수 성분의 동적하중을 받는 구조물을 해석하기 위해서는 적절한 요소분할과 자유도 선택이 필요하다. 이를 확인하기 위하여 3m×3m 단순 지지바닥판에 그림 1의 동적하중을 적용하여 보았다. 바닥판의 크기는 건축물에서 실의 규모를 고려하여 결정하였다. 바닥판의 탄성계수는 210000kgf/cm<sup>2</sup>, 포아송비는 0.167, 두께는 15cm이다. 예제에 대한 요소분할 해석모형은 Lee<sup>(11)</sup>의 방법에 기초한 Model-P4와 이 모델보다 각각 4배, 16배의 분할을 한 Model-P8과 Model-P16이다. 질량행렬은 consistent mass, 감쇠는 모든 모드에 대하여 2%를 적용하였다.

### 3.1 요소분할과 행렬응축의 필요성

앞서 언급한 바와 같이 건축물 바닥판의 해석을 위해서는 해석목적(소음평가, 진동응답평가 등등)에 따라 해석모델에 대한 고려가 필요하다. 이를 확인하기 위하여 그림 3의 예제 구조물의 중앙(“+”위치)에 그림 1과 같은 동적하중(시간간격: 0.00003125sec)을 가하여 보았다. 세 가지 요소분할모델의 가속도 시간이력과 진동수 성분이 그림 4에 제시되었다. 우선 그림 4(a)에 나타낸 시간이력을 살펴보면 Model-P4의 경우 consistent mass를 사용하는 특성상 주기가 약간 길어지는 경향을 가질 뿐 전체적으로 Model-P8과 Model-P16과 유사함을 확인할 수 있다. 이는 그림 4(b)의 진동수 성분을 분석하여도 비슷한 것을 알 수 있다. 100Hz이내의 진동수 성분은 세 요소분할 모델 모두 거의 일치하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 바닥판의 주요 저차모드에 관계된 진동응답의 평가가 목적이라면 Lee에 의하여 제시된 연구결과가 적절함을 확인할 수 있다. 그러나 소음평가와 같이 넓은 대역의 진동수 성분이 평가대상이 될 경우에는 더 이상 Model-P4는 적절한 모델이 아님을 확인할 수 있다. 그림 4(b)의 진동수 성분을 살펴보면 200Hz부근과 400~500Hz



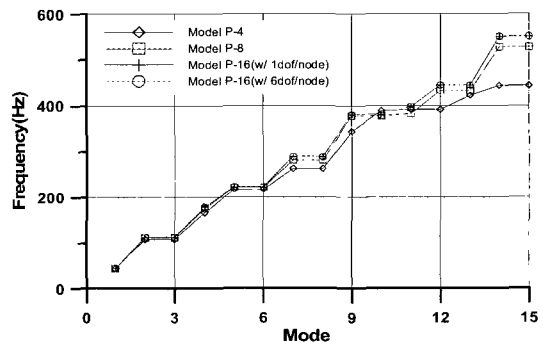
〈그림 3〉 단순지저바닥판의 요소분할 예



〈그림 4〉 예제구조물 중앙점의 가속도 응답

사이의 응답이 다른 요소분할 모델과 다소 차이가 남을 확인할 수 있다.

앞서 살펴본 예제를 통하여 높은 진동수 성분을 가지는 하중을 해석모델에 적절히 반영하기 위해서는 많은 요소분할이 필요함을 알 수 있다. 이것은 자유도의 급격한 증가를 가져와 해석의 효율성에 영향을 줄 수 있으므로 적절한 자유도 선택을 통한 행렬응축이 필수적이다. 이를 확인하기 위하여 앞서 Model P4와 P8은 모든 자유도를 고려하고 Model-P16은 모든 자유도를 고려한 경우와 연직자유도만을 고려한 경우에 대하여 고유치 해석을 수행하였다. Model P4와 P8의 경우에 사용된 자유도는 각각 102개와 390개이며 Model P16의 경우는 모든 자유도를 고려할 경우에는 1542개, 연직 자유도만 고려할 경우에는 225개를 사용하였다. 그림 5의 모드별 고유진동수 결과를 살펴보면 우선 Model-P4의 경우는 너무 요소의 분할이 적어 6차모드 이상에서는 정확한 모드를 표현하지 못하는 것을 알 수 있다. Model P-8의 경우는 390개의 자유도를 사용하여 Model-P16의 연직자유도(225개의 자유도)만을 고려한 경우보다 더 좋지 않은 결과를 보임을 확인할 수 있다. Model-P16의 연직 자유도만을 고려한 경우는 Model P-8에 비하여 더 적은 자유도를 사용하였음에도 15차 모드에서도 불과 0.002%정도의 차이만 나타내었다. 해석시간도 모든 자유도를 고려한

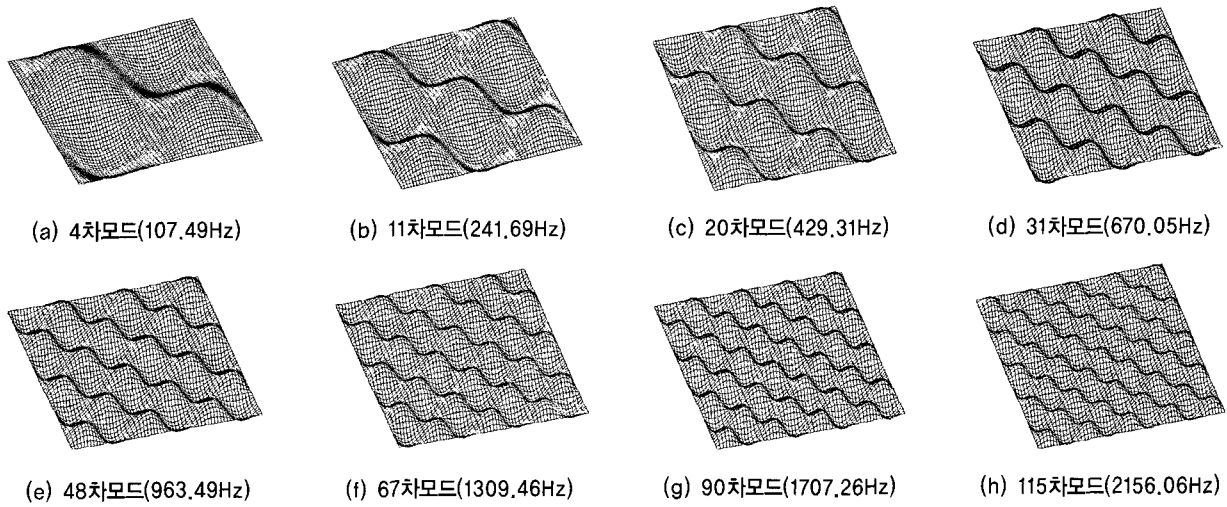


〈그림 5〉 자유도 선택에 따른 모드별 고유진동수 비교

Model-P16의 경우에 453초 정도 소요되었으나 연직자유도만을 고려한 경우는 17.6초에 해석을 수행하여 많은 요소분할을 할 경우에는 반드시 행렬응축기법이 필요함을 확인할 수 있다.

### 3.2 건축물 바닥판의 동적해석에 적합한 요소분할

요소분할과 행렬응축의 필요성에 대하여 3.1절에서 설명한 바가 있다. 기존의 바닥판의 요소분할은 단순히 상용해석프로그램의 매쉬분할에 의존하거나 엔지니어의 경험적인 판단에 의하여 결정하였다. 연구자<sup>(17,18)</sup>들 또한 요소분할기법을 단순히 wave number를 이용하여 유한요소 자체가 가지는 정확성을 판별하는 것에만 이용하였다. 그러나 고차의



〈그림 6〉 단순지지바닥판의 연직진동모드형상

〈표 1〉 크기에 따른 단순지지 바닥판의 고유 진동수 비교

(단위:Hz)

바닥판 크기 (cm×cm)	2×2 분할(오차,%)		4×4 분할(오차,%)		8×8 분할(오차,%)		이론해
	case 1	case 2	case 1	case 2	case 1	case 2	
150×150 (4차모드)	98.12 (8.8%)	100.10 (6.9%)	104.65 (2.7%)	104.68 (2.7%)	106.76 (0.7%)	106.76 (0.7%)	107.54
100×100 (11차모드)	220.77 (8.8%)	225.23 (6.9%)	235.46 (2.7%)	235.54 (2.7%)	240.21 (0.7%)	240.21 (0.7%)	241.97
75× 75 (20차모드)	392.47 (8.8%)	400.41 (6.9%)	418.59 (2.7%)	418.74 (2.7%)	427.04 (0.7%)	427.04 (0.7%)	430.17
60× 60 (31차모드)	613.24 (8.8%)	625.65 (6.9%)	654.05 (2.7%)	654.27 (2.7%)	667.21 (0.7%)	667.25 (0.7%)	672.13
50× 50 (48차모드)	883.07 (8.8%)	900.93 (6.9%)	941.84 (2.7%)	942.16 (2.6%)	960.84 (0.7%)	960.85 (0.7%)	967.89
42.8×42.8 (67차모드)	1201.79 (8.8%)	1226.11 (6.9%)	1281.78 (2.7%)	1282.21 (2.7%)	1307.81 (0.7%)	1307.82 (0.7%)	1317.37
37.5×37.5 (90차모드)	1569.90 (8.8%)	1601.66 (6.9%)	1674.38 (2.7%)	1674.94 (2.7%)	1708.16 (0.7%)	1708.17 (0.7%)	1720.70
33.3×33.3 (115차모드)	1987.30 (8.8%)	2027.50 (6.9%)	2119.56 (2.7%)	2120.57 (2.7%)	2162.32 (0.7%)	2162.34 (0.7%)	2177.73

진동하중을 정확하게 평가하기 위해서는 구조물이 고차의 진동하중을 포함할 수 있을 정도로 진동모드를 잘 표현할 수 있어야 한다. 그리고 이러한 진동모드를 잘 표현하려면 충분한 요소분할이 이루어져야 하는데 이에 대한 연구는 전무한 실정이다. 이 절에서는 구조 엔지니어들이 쉽게 사용할 수 있는 건축물의 바닥판의 요소분할 방법에 대하여 알아보았다.

먼저 3m×3m 단순지지 바닥판을 60×60의 요소로 분할한 모형에 대하여 그림 6과 같이 모드형상을 구하였다. 이 모드들의 공통점을 살펴보면 모드가 단순지지 바닥판의 1차 모드의 형상을 조합하여 나타낸다는 것이다. 예를 들면 그림 6(c)의 20차 모드는 75cm×75cm의 단순지지 바닥판의 1차 모드의 형상과 정확히 일치한다는 것이다. 이는 그림 6에

제시한 다른 모드들도 마찬가지이며 이 작은 1차 모드형상(half sine pulse shape)을 충분히 표현하기 위하여 얼마나 많은 요소분할이 필요한지를 표 1을 통하여 알아보았다. 각각의 해석모델은 2×2, 4×4, 그리고 8×8로 요소분할하였으며 고유치해석을 통하여 구한 1차모드 고유진동수를 이론해(식 (4))와 비교하였다. 표에서 case 1은 절점당 6개의 자유도를 사용한 것이며, case 2는 절점당 연직 자유도 1개만을 사용한 경우이다. 2×2분할의 경우는 case 1, case 2 모두 5%이상의 오차를 가지고 있어 해석에 적합하지 않은 것으로 판단된다. 4×4의 경우는 case 1, case 2 모두 3%이내의 작은 오차를 가지고 있는 것으로 나타났으며, 8×8의 경우는 1%이내의 아주 작은 오차만을 나타내었다. 고유치해석결과를 보면 판의 크기에 관계없이 4×4정도의 분할로도 충분히

정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

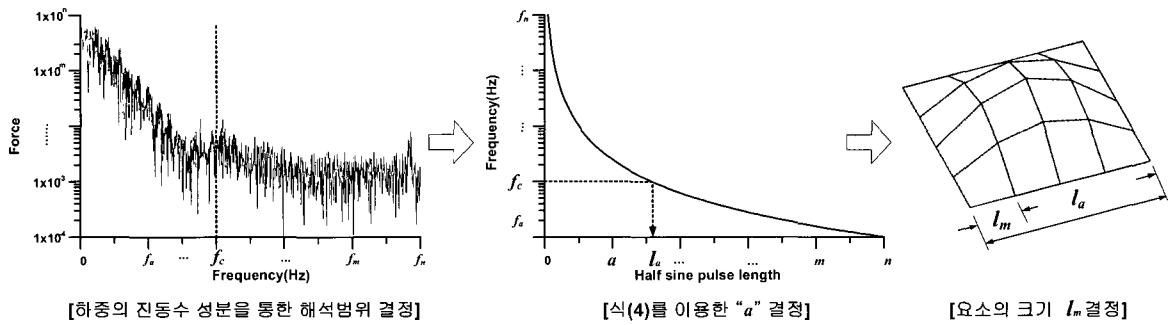
$$f_c = \frac{\pi}{l_a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

여기서  $f_c$ 는 한변의 길이가 “ $l_a$ ”인 정방형 단순지지바닥판의 1차 고유진동수이며  $D$ 는 탄성계수가  $E$ 이고, 판의 두께가  $t$ , 그리고 포아송비가  $\nu$ 인 바닥판의 휨강성이고,  $\rho$ 는 질량밀도이다.

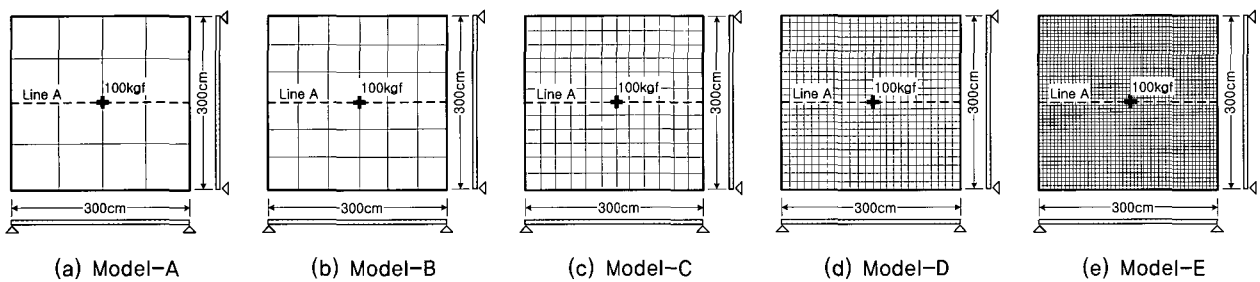
실제로 대부분의 건축물 바닥판들이 대부분 사각형의 조합으로 이루어져 있기 때문에 발생하는 모드들 또한 사각형의 형태를 가질 것이다. 그래서 그림 7과 같이 동적하중의 주요 진동수 성분을 기준으로 하여 해석에 필요한 한계진동수( $f_c$ )를 결정하면 식 (4)와 같은 단순지지 바닥판의 1차 모드 계산식에 의하여 한변의 길이가 “ $l_a$ ”인 단순지지바닥판을 구할 수 있고 이를 최소한 4×4정도로 분할하여 메쉬의

크기( $l_m$ )를 결정할 수 있다.

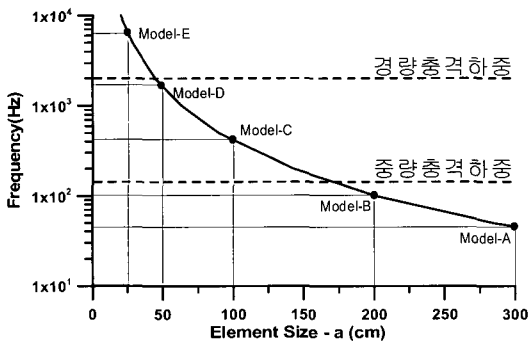
제시한 방법의 타당성을 확인하기 위하여 3m×3m 단순지지바닥판에 대하여 그림 8과 같은 요소분할을 하였다. 요소분할의 기준은 그림 9에 나타난 것과 같이 그림 1과 2에서 제시한 동적하중을 기준으로 중량충격하중의 경우는 150Hz를 한계진동수로 경량충격하중의 경우는 2000Hz를 한계진동수로 두었다. Model-A는 4×4요소분할을 한 경우로 중량/경량 충격하중 모두에 대하여 가장 좋지 않은 결과를 나타낼 것으로 예상하였다. Model-B는 6×6요소분할을 한 것으로 중량충격하중에는 적절하지만 경량충격하중에 대한 응답은 부정확할 것으로 예상되는 모델이다. Model-C는 12×12요소분할모델로 중량충격하중에 대해서는 충분히 좋은 결과를 나타낼 것이지만 경량충격하중에 대해서는 역시 부정확할 것으로 예상하였다. Model-D는 24×24요소분할을 한 경우로 중량/경량 충격하중 모두에 대하여 정확한 응답을 나



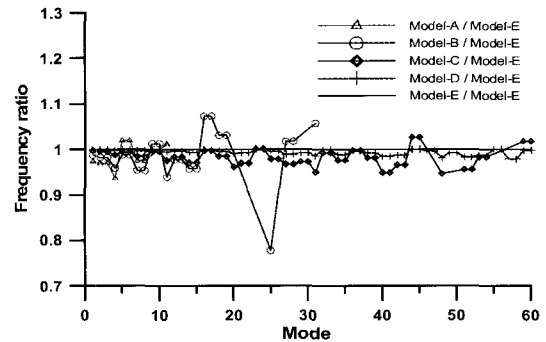
〈그림 7〉 요소분할 결정과정



〈그림 8〉 예제 구조물



〈그림 9〉 해석모델에 따른 요소분할



〈그림 10〉 모드별 고유진동수비 비교

타낼 것으로 예상하였다. Model-E는 48×48요소분할을 한 것으로 제시된 모델 중 가장 요소분할을 많이 한 것으로서 이 모델의 응답을 기준으로 다른 해석모델과 비교하였다.

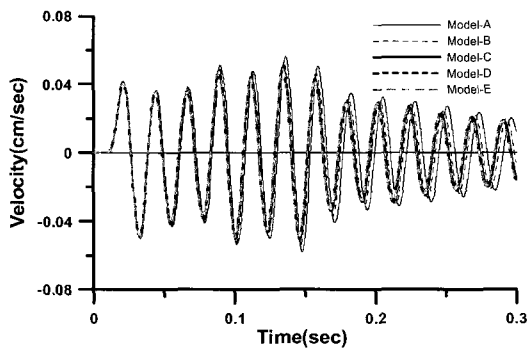
연직진동모드별 고유진동수의 비를 Model-E를 기준으로 하여 그림 10에 나타내었다. Model-A의 고유치 해석결과는 Model-E의 것과 비교해 볼 경우에 1~8차 모드는 동일한 모드를 발생시켰으나 9, 10차 연직모드는 나타나지 않았으며 11차모드만이 관찰되었다. 오차는 5%내외로 비교적 적은 편이었으나 나타낼 수 있는 모드의 수가 불과 9개 밖에 되지 않는 한계를 가지고 있다. Model-B는 Model-A에 비하여 오차도 적고 더 많은 모드를 나타낼 수 있었다. 연직 15차 모드(536Hz) 이후로는 다소 많은 모드들이 관찰되지 않았고 오차도 커지는 경향을 보였다. 이 모델은 중량충격하중의 진동수 성분을 표현하기에는 충분한 것으로 생각된다. Model-C는 그림 10에 제시된 연직 방향 60차 모드를 모두 표현할 수는 있었으나 45차 진동모드(1498Hz)이후로는 관찰되지 않는 모드들이 다수 있는 것으로 나타났다. 이에 따라 이 모델은 중량충격하중의 응답을 구하는 데에는 충분히 정확하지만 경량충격하중의 진동수 성분을 반영하기에는 부족한 것으로 생각된다. Model-D의 경우는 60개의 모든 모드를 포함하고 있으며 오차 또한 3% 이내로 경량충격하중에 대한 응답을 나타내는 데에도 큰 무리가 없을 것으로 판단된다. 그림 11과 12의 시간이력해석결과를 통해서

도 앞서 언급한 내용들을 확인할 수 있다. 그림 11의 경우는 중량충격하중을 받는 경우에 대한 속도응답을 나타낸 것인데 모든 모델이 비슷하지만 Model-A가 그중 오차가 가장 큰 것을 알 수 있다. 그림 12의 경우는 Model-E와의 응답이 Model-D만 유사할 뿐 나머지 모델의 응답은 다소 차이가 있음을 확인할 수 있다.

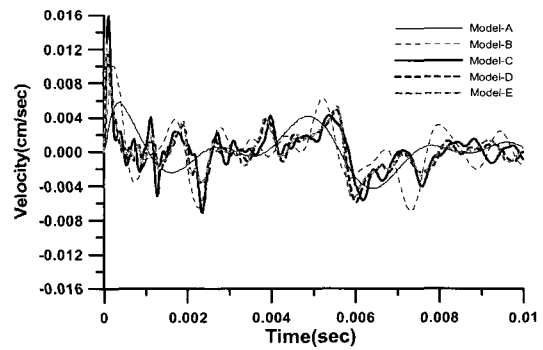
### 4. 건축물 바닥판에 적합한 유한요소

#### 4.1 두꺼운 판요소의 필요성

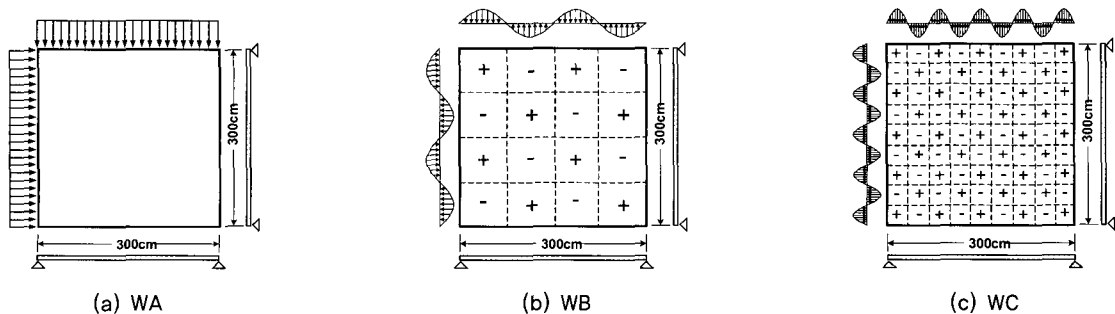
건축물 바닥판은 일반적으로 지지간격이 그 두께에 비하여 대단히 큰 경우가 많다. 따라서 기존에는 얇은 판요소를 사용하여도 큰 오차가 없어 구조해석과정에서 많이 쓰이고 있다. 그러나 높은 진동수 대역을 가지는 동적하중이 가해질 경우에 대하여 충분한 정확성을 가지기 위해서는 동적하중의 진동수 대역을 포함하는 많은 수의 진동모드를 고려해야한다. 3.2절의 그림 6에서 살펴본 바와 같이 바닥판의 진동모드는 높아질수록 복잡한 거동형상을 나타내는 것을 알 수 있다. 이러한 영향이 미치는 효과를 살펴보기 위하여 그림 14와 같은 세 종류의 정적하중을 3m×3m×15cm의 단순 지지바닥판에 가하였다. 그림 13(a) WA 하중은 바닥판에 등분포하중이 작용하는 경우이고, WB와 WC는 각각 그림 6의 20차모드와 115차모드를 모사한 하중이다. 이러한 하



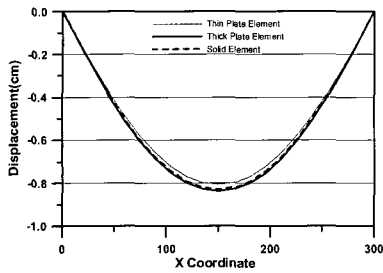
〈그림 11〉 중량충격하중을 받는 예제구조물의 응답



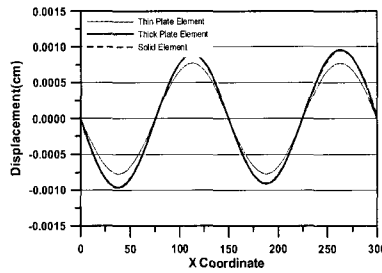
〈그림 12〉 경량충격하중을 받는 예제구조물의 응답



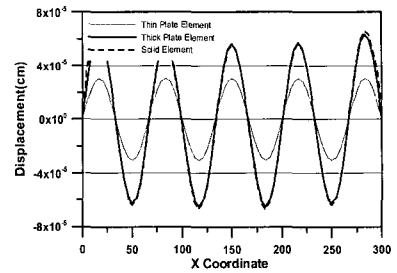
〈그림 13〉 등분포하중



(a) 하중 WA에 대한 처짐



(b) 하중 WB에 대한 처짐



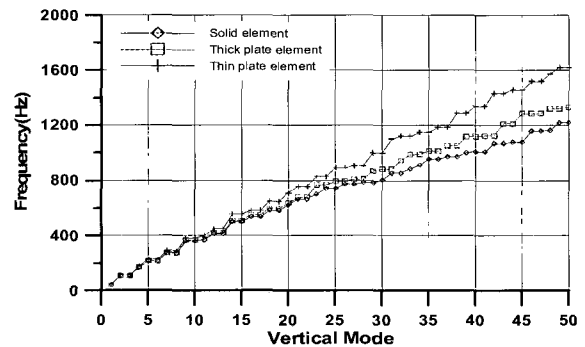
(c) 하중 WC에 대한 처짐

〈그림 14〉 단순지지 바닥판의 처짐

중을 가한 이유는 하중의 형태에 따라서 얇은 판요소와 두꺼운 판요소가 나타내는 응답을 확인하기 위해서이다. 해석 모델의 요소분할은 72×72분할하였으며 솔리드 모델의 경우에 두께방향으로는 2개층으로 분할하였다.

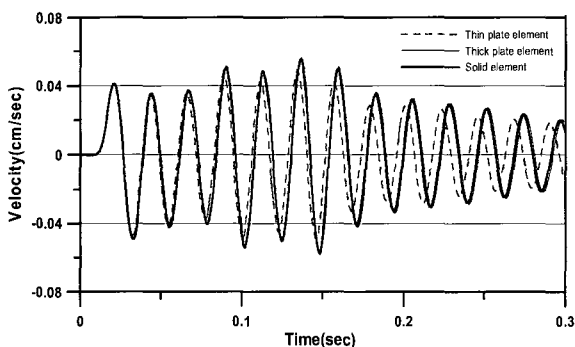
세 종류의 하중에 대하여 예제 구조물의 정적처짐을 나타낸 것이 그림 14이다. 두꺼운 판요소를 사용한 경우에는 솔리드 요소를 사용한 경우와 거의 일치하는 결과를 나타내었다. 얇은 판의 경우에는 바닥판 전체에 균등한 하중이 가해지는 하중 WA를 적용하여 얻은 최대 처짐은 솔리드 요소의 최대 처짐과는 약 3%의 오차를 가진 것으로 나타났으며 이는 알려진 바와 같이 사용하는데 큰 오차는 없는 것으로 보인다. 그러나 하중 WB와 WC를 적용하여 구한 최대처짐은 그 오차가 각각 약 10%, 30%정도로 하중이 복잡할수록 오차 또한 큰 것으로 나타났다.

사용한 유한요소에 따른 연직진동모드별 고유진동수를 그림 15에 나타내었다. 솔리드 요소를 사용한 경우를 기준으로 볼 때 두꺼운 판요소를 사용한 경우는 600Hz 부근의 연직방향 모드들까지 고유진동수가 3%이내의 오차로 매우 근접한 결과를 나타내주었다. 얇은 판요소를 사용한 경우에도 모드의 순서는 크게 다르지 않지만 1차모드의 오차도 2.6%정도이며 모드가 높아질수록 오차가 커져서 1000Hz 이상에서는 30%이상의 오차를 가진 것으로 나타났다. 두꺼

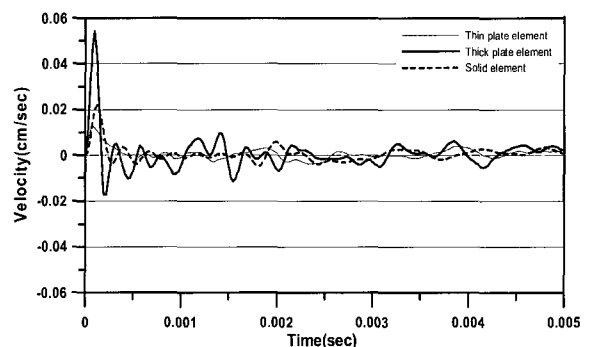


〈그림 15〉 예제구조물의 진동모드별 고유진동수 비교

운 판요소의 경우도 이 진동수 대역에서는 10%정도의 오차를 가지고 있는 것으로 나타나 두꺼운 판요소를 사용하는 것이 얇은 판요소를 사용하는 것보다는 좋지만 경량충격하중과 같은 높은 진동수대역의 하중을 고려하기 위해서는 추가적인 연구가 필요할 것으로 보인다. 이것은 동적하중을 가하였을 경우에도 비슷한 것을 알 수 있는데 그림 15는 그림 8(d)의 요소분할 모형을 이용하여 그림 1의 중량충격하중을 가한 경우에 대한 속도응답으로 솔리드 모델의 변위응답과 두꺼운 판요소를 사용하여 얻은 응답은 비슷하지만 얇은 판요소를 사용한 경우에는 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 그림 2의 경량충격하중을 가한 경우에는 두 바닥판 요소 모두 솔리드 모델의 응답과 차이를 보이는 것으로 나타났다.



(a) 중량충격하중을 가한 경우



(b) 경량충격하중을 가한 경우

〈그림 16〉 예제구조물의 속도응답

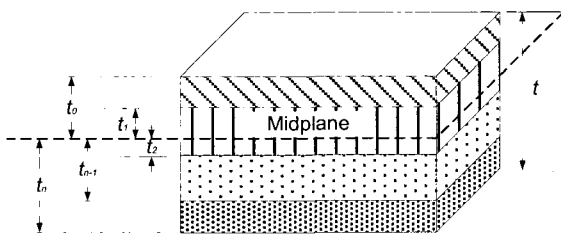


전단변형을 고려할 수 있는 두꺼운 판요소의 사용은 중량 충격하중의 진동수 범위(500Hz이내)에서는 효율적일 것으로 판단되고 그 이상의 진동수 대역에서는 유한요소의 개선이 가능하다면 제시한 방법을 통하여 충분히 정확한 응답을 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

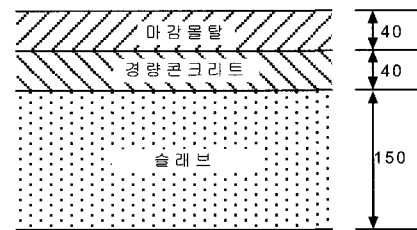
### 4.2 적층판의 모형화

건축물 바닥판은 구조체인 슬래브와 건물의 용도에 따라 다양한 마감층을 가지고 있다. 바닥판에 작용하는 하중이 클 경우에는 마감층에 균열이 발생하는 등의 문제로 구조체에 추가되는 질량으로만 고려하였으나 바닥판에 작용하는 하중이 작을 경우에는 마감층과 슬래브가 일체로 거동하여 마감층에 대한 고려가 반드시 필요하다. 마감층을 정확하게 고려하기 위해서는 솔리드 요소를 사용하여 모델링해야 하지만 건축물 전체를 모형화하기에는 너무 많은 자유도를 필요로 하게 되어 해석이 어려운 문제점이 있다. 그래서 많은 연구자들이 적층바닥판을 등가의 단일바닥판으로 치환하는 연구를 수행하여 왔으며 본 연구에서는 A.C. Ugural<sup>(19)</sup>이 제시한 방법을 사용하였다. 그는 그림 17과 같은 적층판이 식 (5)와 같은 모멘트-변위 관계를 가지고 있으며 모든 층의 거동이 동일하다고 가정할 경우에 대하여 등가의 휨강성을 제시하였다.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$



〈그림 17〉 n개로 구성된 적층판



〈그림 18〉 바닥판 단면형상

여기서  $D_{ij} = \frac{1}{3}(D_{ij}^*)_n (t_k^3 - t_{k-1}^3)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )이고 k는 임의의 층을 나타내며  $(D_{ij}^*)_k$ 는 k층의 판에 대한 휨강성을 의미한다.

본 연구에서는 그림 18과 같은 바닥판 형상을 가지는 3m×3m 단순지지 바닥판에 대하여 등가로 치환된 모형의 적절성을 판단하고자 한다. 적층판을 솔리드요소로 모형화한 경우(Model-SM)와 등가의 단일판(모든자유도를 고려한 경우를 Model-EPA, 연직 자유도만을 고려한 경우를 Model-EPB)으로 치환한 경우에 대하여 그림 8(d)과 동일하게 요소분할을 하였다. 두 모델 모두 전단변형을 고려한 두꺼운 판요소를 적용하였다. 적층바닥판의 물성치는 표 2와 같으며 포아송비는 모두 0.167로 하였다. 이 예제 구조물에 대하여 고유치 해석을 수행한 결과는 그림 18에 나타내었고 고차모드로 갈수록 오차가 커지는 경향이 있는 것으로 나타났다. Model-SM에 대하여 Model-EPA와 EPB는 적용한 하중의 범위(150Hz 이내)에서는 3%이내의 오차로 근접한 결과를 보였으며 1000Hz 근처의 모드에서는 5%~15%정도의 오차를 보이는 것으로 나타났다. 오차는 800Hz 부근에서부터 점차 늘어나는 것으로 관찰되었다. 그러나 그림 1의 중량충격하중을 가하여 속도응답을 나타낸 것이 그림 20인데 시간이력을 관찰해보면 다소 차이가 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 Model-SM과 Model-EPA, EPB의 1차 모드의 진동수가 각각 80.8, 78.0, 78.0Hz로서 솔리드 해석모델의 진동수가 다소 높아서 생긴 현상으로 판단된다. 다른 진동수 대역의 응답을 분석하기 위하여 시간이력응답을 FFT(Fast Fourier Transform)하였으며 전체적인 진동수 성분을 유사하지만 400Hz부근과 700Hz이상에서는 Model-SM과 Model-EPA, EPB가 차이가 나는 것을 확인할 수 있다. 그래서 적층판을 등가의 단일판으로

〈표 2〉 적층바닥판의 물성치

바닥판 조건	두께(mm)	바닥판 구조		등가바닥판	
		중량	탄성계수	중량	탄성계수
마감물탈	40	2.00tf/m <sup>3</sup>	2.40×10 <sup>5</sup> kgf/cm <sup>2</sup>	2.23tf/m <sup>3</sup>	2.216×10 <sup>5</sup> kgf/cm <sup>2</sup>
경량콘크리트	40	1.70tf/m <sup>3</sup>	1.75×10 <sup>5</sup> kgf/cm <sup>2</sup>		
슬래브	180	2.40tf/m <sup>3</sup>	2.40×10 <sup>5</sup> kgf/cm <sup>2</sup>		

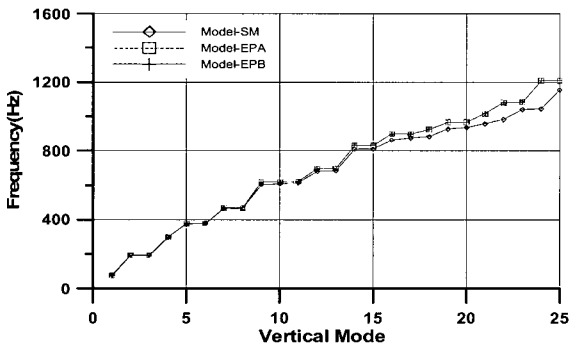
단순화하는 것은 정확한 응답을 기대하기는 어렵지만 옥타브 대역별로 RMS응답 등을 구하여 본 결과(표 3) 중심 주파수 250Hz이하의 대역에서는 충분히 정확한 결과를 주는 것으로 판단된다. 그러나 앞서 4.1절에서 살펴본 바와 같이 500Hz이상의 진동수 성분은 충분히 표현하지 못하는 것을 알 수 있다.

표 4는 솔리드 요소를 사용한 경우와 등가의 바닥판 요소를 적용하였을 경우에 모든 자유도를 고려한 것과 연직자유도만을 고려하였을 경우의 계산시간을 나타낸 것으로 Model-SM에 비하여 Model-EPA가 72%정도 계산시간이 줄었으며, Model-EPB의 경우는 솔리드 모델을 해석하는 데 필요한 시간에 비하여 불과 2%정도밖에 들지 않았다. 솔리드 해석 모델의 경우는 상용해석프로그램<sup>(20)</sup>을 사용한 것이며 바닥판모델의 경우에는 본 연구팀이 제작한 프로그램을 이용한 것이어서 직접적인 비교는 어렵지만 이 표를 통하여 등가의

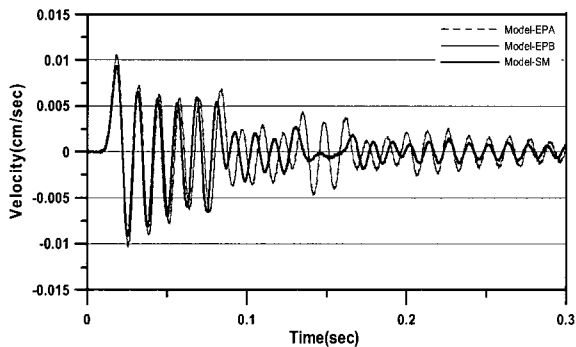
바닥판 요소를 사용하고 자유도 선택을 통하여 동적해석을 수행하는 것이 충분히 효율적임을 확인할 수 있었다.

5. 예제해석

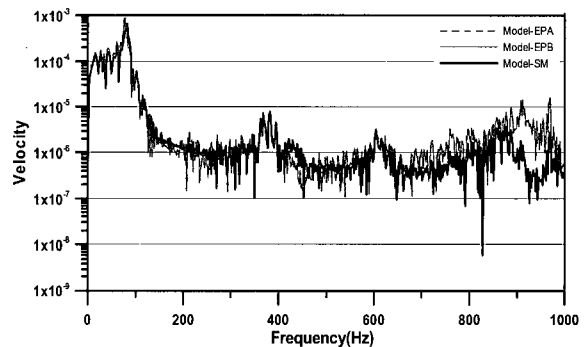
지금까지 높은 진동수 대역을 가지는 동적하중에 대하여 효율적으로 바닥판을 해석할 수 있는 방법에 대하여 알아보았다. 예제 구조물은 그림 21과 같은 기둥-바닥판 구조물이며 바닥판의 물성치는 표 2의 등가바닥판(두께: 26cm)의 물성치를 사용하였고 기둥(크기: 50cm×50cm)과 보(크기: 50cm×50cm)의 물성치는 탄성계수:  $2.40 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$ , 중량:  $2.40 \text{tf/m}^3$ , 포아송비: 0.167으로 하였다. 감쇠는 Rayleigh 감쇠를 적용하였으며 1, 2차모드의 감쇠율은 2%로 하였다. 동적하중은 그림 1의 중량충격하중을 가하였고 하중의 진동수 성분을 중심으로 120Hz를 한계진동수( $f_c$ )로 설정하여 그림 22와 같이 예제 구조물을 세 종류로 요소분할 하였다. 각각 반파장의 sin곡선을 그리기 위해서 필요한 최소한의 판길이( $l_n$ )는 각각 240cm로 나타났으며 이보다 정확한 모델의  $l_n$ 는 120cm, 부정확한 모델의 경우는 390cm로 정하였다. 그리고 이를 각각 4등분하여 최소요소분할의 크기를 30cm, 60cm, 90cm로 결정하였다. 이에 따른 각 모델의 층별 요소분할 형태는 그림 23에 나타내었다. 솔리드 요소를 사용한 모델을 사용하지 않은 것은 FS 1과 같은 요소분할을 할 경우에 필요한 자유도의 수가 10만여 개에 이르러 사실상 해석이 어려운 점이 있어 FS 1과 같이 많은 요소분할을 한 예제를 기



〈그림 19〉 모드별 고유진동수 비교



(a) 시간이력



(b) 진동수성분

〈그림 20〉 중량충격하중을 가한 경우에 대한 속도응답

〈표 3〉 진동수 대역별 RMS 응답

(단위: dB)

	중심 진동수(기준응답: $10^{-6} \text{ cm/sec}$ )			
	63Hz	125Hz	250Hz	500Hz
Model-SM	45.8	42.2	5.7	2.6
Model-EPA	47.5	43.9	5.8	9.0
Model-EPB	47.5	43.9	5.8	9.0

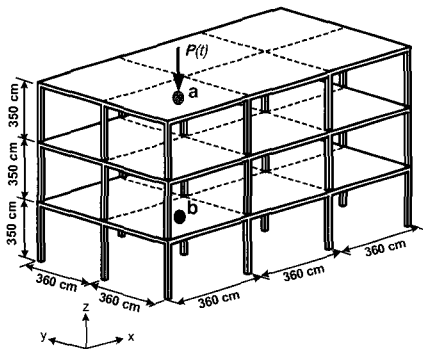
준으로 제안한 방법의 효율성을 검토하였다. 모델 FS2의 경우는 해석을 효율성을 검토하기 위하여 다시 세 가지 경우로 구분하였다. “F”는 모든 자유도를 고려한다는 의미이며 “C”는 그림 24와 같은 부분구조기법을 이용하여 연직 자유도만을 고려한 것이고 “A”와 “B”는 두꺼운 판요소를 사용한

한 경우와 얇은 판요소를 사용한 경우를 말한다.

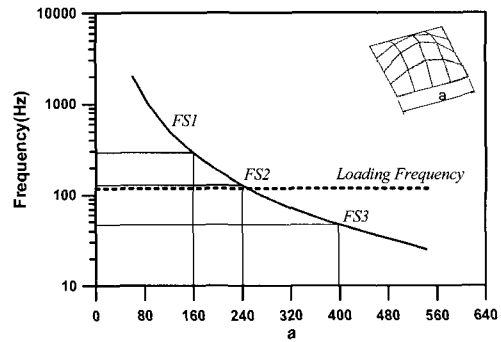
행렬응축을 하는 FS2-CA모델의 모델링 과정은 그림 24에 나타내었다. 이러한 과정을 거치는 이유는 제거되는 자유도가 많으면 많을수록 응축에 걸리는 시간이 길어지기 때문이다. 이를 해결하기 위하여 Lee 등이 제안한 방법<sup>(13)</sup>을 사용하였다. 건축물의 특성상 바닥판 등의 요소는 반복되는 경향이 많기 때문에 기동간격으로 구획된 바닥판을 슈퍼 엘리먼트(superlement)로 구성하고 다시 한 층의 바닥판을 부분 구조물로 만드는 것이다. 이 방법의 장점은 만들어진 슈퍼엘리먼트나 부분구조물은 동일한 크기와 물성치를 가

〈표 4〉 예제구조물의 모델별 자유도 및 해석시간 비교

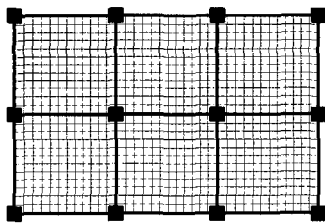
	Model-SM	Model-EPA	Model-EPB
DOF(개)	16992	3168	480
해석시간(초)	6589	1217	138



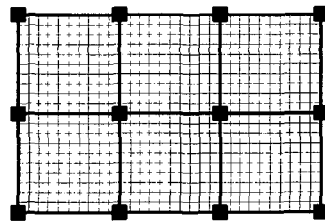
〈그림 21〉 예제구조물



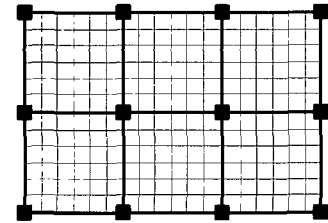
〈그림 22〉 예제 구조물의 요소분할



(a) FS1: 864개의 요소분할

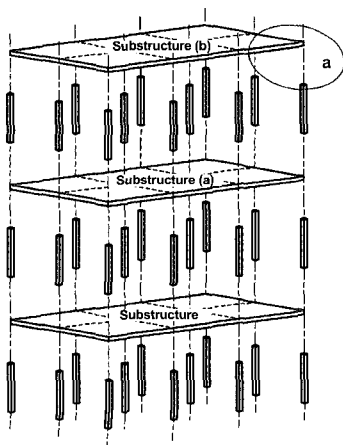


(b) FS3: 216개의 요소분할

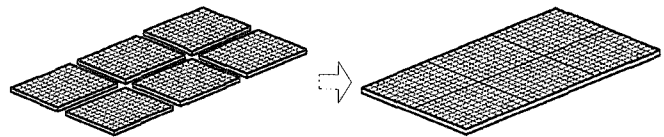


(c) FS3: 96개의 요소분할

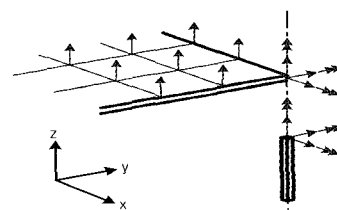
〈그림 23〉 모델별 바닥판의 요소분할



(a) 부분구조물로 분리된 FS2-CA



(b) 부분구조물의 구성

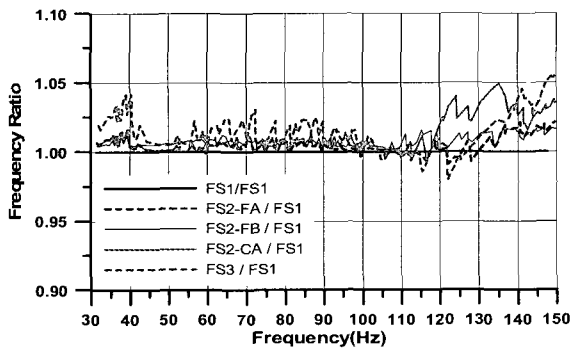


(c) 부분 a에서의 주자유도 선택

〈그림 24〉 모델 FS2-CA의 모형화 과정

지는 위치에 그대로 적용할 수 있다는 것이다. 이 모델의 경우에는 그림 24(a)에서 볼 수 있듯이 substructure를 하나 구성하고 반복되는 상위 2개층의 바닥판의 응축된 강성 및 질량행렬을 그대로 복사하여 사용하고 있다.

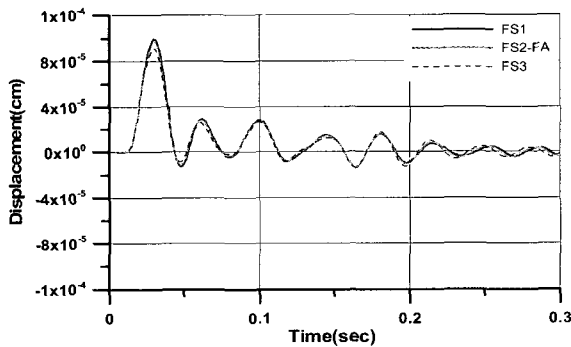
이 예제 구조물에 대하여 고유치해석을 수행하였으며 하중과 구조물의 모드들이 중복되는 30~150Hz구간에 대하여 FS1을 기준으로 하여 그림 25에 나타내었다. 이 진동수 구간에 연직모드들만 190개 정도가 나타날 정도로 많은 모드들이 발생하였으며 120Hz 범위까지는 모델 FS3를 제외한 나머지 모델들은 3%이내의 정확성을 유지하였다. 중량



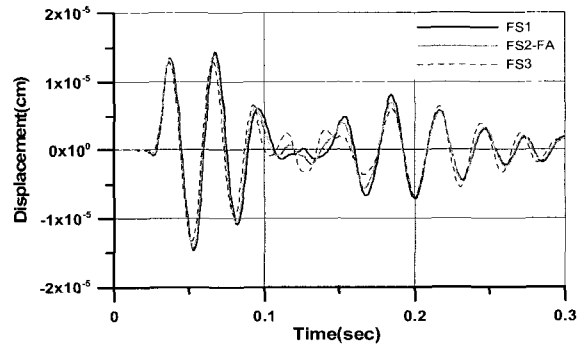
〈그림 25〉 연직모드의 고유진동수별 진동수비 비교

충격하중을 가하여 변위응답을 그림 26에 나타내었으며 수진점 B의 경우에는 FS1과 FS2모델의 결과와 FS3의 결과가 약간 상이함을 확인할 수 있다. 이에 따라서 제시한 요소분할 방법이 적절했음을 알 수 있다. 그리고 그림 27에서 확인할 수 있듯이 FS1, FS2-FA, 및 FS2-CA모델의 응답차이는 거의 없는 것으로 나타났으며 연직방향 자유도만 고려하여도 충분히 정확한 응답을 얻을 수 있음을 다시 한번 확인하였다. 바닥판의 전단변형 고려여부에 따른 응답의 정확성을 비교한 그림 28은 앞 장의 바닥판 예제의 해석결과와 다르게 나타났다. FS1, FS2-FA, FS2-FB사이의 응답이 거의 차이를 보이지 않는 것을 확인할 수 있으며 이것은 기동과 보로 이루어진 바닥판의 경계부가 미치는 영향이 크지 않기 때문으로 생각된다.

표 5는 각각의 해석모델들의 계산시간을 나타낸 것으로 FS2-CA모델이 가장 효율적임을 확인할 수 있다. 이는 다른 모델에 비하여 행렬응축에 계산시간이 더 들어가지만 나머지 계산에서의 절감효과로 전체적인 해석시간은 4%정도에 불과하였다. 이와 비슷한 자유도수를 가지는 FS3의 경우는 계산시간은 제안모델인 FS2-CA보다 짧지만 응답이 부정확한 것으로 나타났다.

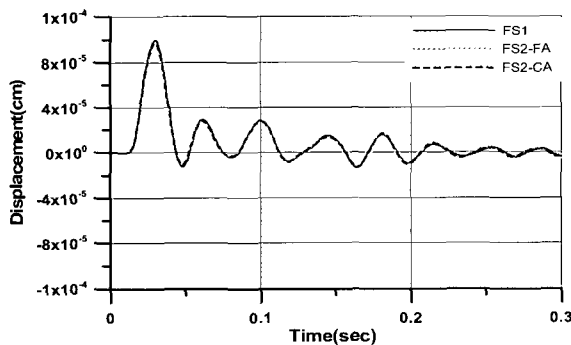


(a) 점 "a"에서의 변위응답

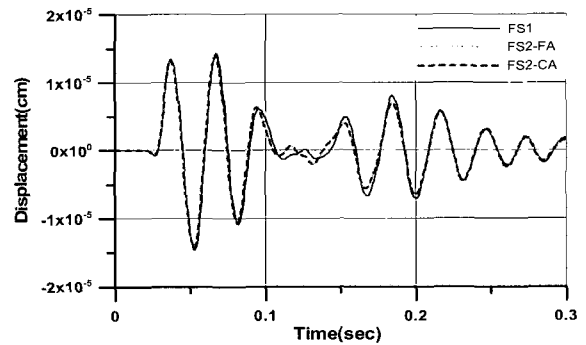


(b) 점 "b"에서의 변위응답

〈그림 26〉 중량충격하중에 대한 모델별 변위응답(요소분할)

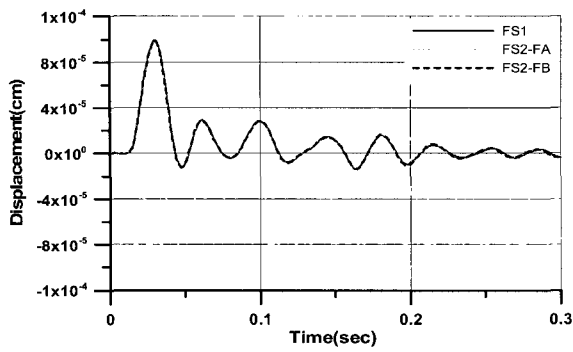


(a) 점 "a"에서의 변위응답

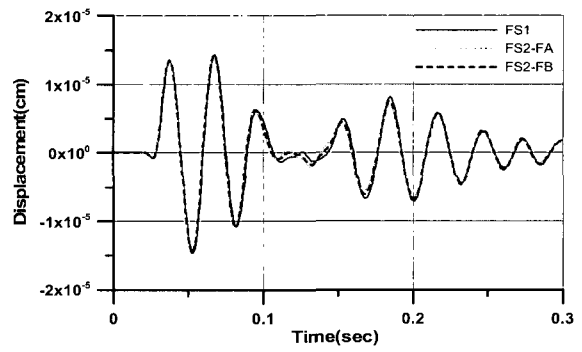


(b) 점 "b"에서의 변위응답

〈그림 27〉 중량충격하중에 대한 모델별 변위응답(자유도 선택)



(a) 점 "a"에서의 변위응답



(b) 점 "b"에서의 변위응답

〈그림 28〉 중량충격하중에 대한 모델별 속도응답(전단변형의 고려여부)

〈표 5〉 예제구조물의 모델별 자유도 및 해석시간 비교

(단위:초)

	DOF	강성/질량행렬구성	고유치해석	시간이력해석	합계
FS1	17946	36.6	15396.4	111.6	15544.6
FS2-FA	5742	7.7	2406.1	36.3	2450.1
FS2-CA	2217	10.4	563.1	14.0	587.5
FS3	3402	3.9	894.4	22.1	920.4

## 6. 결론 및 추후연구과제

본 논문에서는 높은 진동수 대역을 가지는 동적하중을 받는 건축물 바닥판의 효율적인 동적해석법에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 고차진동하중을 받는 건축물의 바닥판에 적절한 요소분할 방법과 이에 따른 과도한 자유도를 줄이기 위한 자유도 선택방법에 대하여 연구하였다. 그리고 일반적으로 건축물의 바닥판의 경우에는 두께에 비하여 바닥판의 길이가 길기 때문에 전단변형을 고려하지 않은 판요소를 바닥판의 모형화에 많이 사용하는데 이에 대해서도 그 적절성을 검증하였다. 그리고 여러 개의 층으로 이루어진 건축물 바닥판을 기존의 방법을 이용하여 등가의 바닥판으로 치환하였으며 이 방법의 가능성과 한계를 검토하였으며 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 건축물 바닥판의 고차 진동모드의 형상들은 더 작은 바닥판 크기를 가지는 1차 진동모드형상의 조합으로 나타낼 수 있다. 이러한 사실을 기초로 높은 진동수 대역을 포함한 동적하중에 대한 응답을 효율적으로 나타낼 수 있는 요소분할 방법을 제시하였다. 이 방법은 동적하중의 진동수 성분과 단순지지바닥판의 1차모드 계산식을 이용한 것으로 실무 엔지니어들도 간편하게 사용할 수 있을 것으로 기대한다.
- (2) 높은 진동수 대역을 포함한 동적하중을 받는 바닥판 구조물의 응답을 해석하기 위해서는 많은 수의 요소분할이

- 필요한 것으로 나타났으며 이를 위해서는 반드시 자유도 선택기술이 필요한 것으로 판단된다. 본 연구에서는 바닥판에 연직방향의 자유도만을 고려하여도 구조물의 전체 응답을 충분히 잘 표현할 수 있다는 결론을 얻었다.
- (3) 전단변형을 고려한 바닥판요소를 사용해야만 고차의 진동모드를 포함한 바닥판 구조물의 응답을 비교적 정확하게 얻을 수 있었다. 그러나 1000Hz 이상의 모드를 고려하고자 할 경우에는 전단변형을 고려한 바닥판요소를 사용하여도 구조물의 응답을 정확하게 얻을 수 없었으며 이를 개선하기 위한 추가적인 연구가 필요하다고 생각된다. 그리고 예제해석에서 얻은 결과와 같이 구조물의 경계조건에 따른 추가적인 연구도 필요할 것으로 생각된다.
  - (4) 건축물의 바닥판은 슬래브와 마감층으로 구성되는 경우가 많으며 이를 효율적으로 고려하기 위해서는 등가의 단일판으로 모형화하는 것이 필요하다. 검증결과 구조물의 응답을 전체적으로 잘 표현하는 것으로 나타났으나 중심주파수 500Hz이상의 옥타브 대역에 속하는 모드를 고려하고자 할 경우에는 등가 바닥판요소를 사용하는 것이 적절하지 않으며 이에 대한 연구도 필요하다고 생각된다.

## 감사의 글

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-041-D00759).

## 참 고 문 헌

1. El-Dardiry, E. and Ji, T., "Modelling of the dynamic behaviour of profiled composite floors," *Engineering Structures*, Vol. 28, 2006, pp. 567-579.
2. Ebrahimpour, A. and Sack, R. L., "A review of vibration serviceability criteria for floor structures," *Computer and Structures*, Vol. 83, 2005, pp. 2488-2494.
3. Pavic, A. and Reynolds, P., "Modal testing and dynamic FE model correlation and updating of a prototype high-strength concrete floor," *Cement and Concrete Composites*, Vol. 25, 2003, pp. 787-799.
4. da Silva, J. G. S., da S. Vellasco, P. C. G., de Andrade, S. A. L., da C. P. Soeiro, F. J. and Werneck, R. N., "An evaluation of the dynamical performance of composite slabs," *Computer and Structures*, Vol. 81, 2003, pp. 1905-1913.
5. Howard, C. Q. and Hansen, C. H., "Vibration analysis of waffle floors," *Computer and Structures*, Vol. 81, 2003, pp. 15-26.
6. Pavic, A., Reynolds, P., Waldron, P. and Bennett, K., "Dynamic modelling of post-tensioned concrete floors using finite element analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 37, 2001, pp. 305-323.
7. Weaver, W. and Johnston, P. R., *FINITE ELEMENTS FOR STRUCTURAL ANALYSIS*, Prentice-Hall, Inc., 1984, pp. 77-82, 205-209.
8. Kwon, Y. W. and Bang, H. C., *THE FINITE ELEMENT METHOD Using MATLAB*, CRC Press, 2000, pp. 77-82, 370-401.
9. Bachmann, H. and Ammann, W., *Vibration in Structures*, IABSE, 1987.
10. ISO 140-7, *Field measurements of impact sound insulation of floors*. International Organization for Standardization, 1998.
11. Lee, D. G., Ahn, S. K. and Kim, J. K., "An Efficient Modeling Technique for Floor Vibration in Multi-story Buildings," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 10, No. 6, 2000, pp. 603-619.
12. Ramsden, J. N. and Stocker, J. R., "Mass Condensation a Semi- Automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 1, 1969, pp. 333-349.
13. Levy, R., *Guyan Reduction Solutions Recycled for Improved Accuracy*, NASTRAN Users Experiences, NASA, 1971, pp. 201-220.
14. Shah, V. N. and Raymund, M., "Analytical Selection of Masters for Reduced Eigenvalue Problems," *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, Vol. 18, 1982, pp. 89-98.
15. Down, B., "Accurate Reduction of Stiffness and Mass Matrices for Vibration Analysis and a Rational for Selecting Master Degrees of Freedom," *J. Mech. Design*, ASME, 1980, p. 102.
16. Weaver, W. and Johnston, P. R., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, Inc., 1987, pp. 282-283.
17. de Faria, A. R. and Oguamanam, D. C. D., "Finite element analysis of the dynamic response of plates under traversing loads using adaptive meshes," *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, 2004, pp. 1481-1493.
18. Thompson, L. L., "On optimal stabilized MITC4 plate bending elements for accurate frequency response analysis," *Computers & Structures*, Vol. 91, 2004, pp. 995-1008.
19. Ugural, A. C., *STRESSES IN PLATES AND SHELLS*, McGraw-Hill, 1999, pp. 253-280.
20. Lee, H. W. and Park, I. G., *MIDAS/GEN-General structure design system for windows*, MIDAS Information Technology, 2001.