

I/Q 위상 불균형을 고려한 Uniform M-PSK의 일반화된 BER 성능 분석

정회원 이재윤*, 윤동원*, 현광민**, 박상규*

Generalized BER Performance Analysis for Uniform M-PSK with I/Q Phase Unbalance

Jaeyoon Lee*, Dongweon Yoon*, Kwangmin Hyun**, SangKyu Park* *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 2차원 결합 가우시안 Q-함수(Two-dimensional joint Gaussian Q-function)를 이용하여 AWGN(Additive White Gaussian Noise) 환경에서 M-PSK(M-ary Phase Shift Keying) 신호의 I/Q 위상 불균형(Phase unbalance) 존재 시 수치 적분이 필요 없는 정확하고 일반화된 closed-form 형태의 비트 오류율(Bit Error Rate) 표현을 유도한다. 새롭게 유도된 표현은 평균 BER 뿐만 아니라 k-번째 비트의 BER에 대하여도 일반화된 식으로 되어 있어 다양한 환경으로의 적용이 용이하여 M-PSK를 적용하는 많은 디지털 통신 시스템에서 복조 시 발생할 수 있는 I/Q 위상 불균형에 의한 시스템 성능 변화에 대하여 정확한 이론적 성능 기준을 제공할 것으로 기대된다.

Key Words : M-PSK, I/Q Phase Unbalance, BER

ABSTRACT

I/Q phase unbalance caused by non-ideal circuit components is inevitable physical phenomena and leads to performance degradation when we implement a practical coherent M-ary phase shift keying(M-PSK) demodulator. In this paper, we present an exact and general expression involving two-dimensional Gaussian Q-functions for the bit error rate(BER) of uniform M-PSK with I/Q phase unbalance over an additive white Gaussian noise(AWGN) channel. First we derive a BER expression for the k-th bit of 8, 16-PSK signal constellations when Gray code bit mapping is employed. Then, from the derived k-th bit BER expression, we present the exact and general average BER expression for M-PSK with I/Q phase unbalance. This result can readily be applied to numerical evaluation for various cases of practical interest in an I/Q unbalanced M-PSK system, because the one- and two-dimensional Gaussian Q-functions can be easily and directly computed using commonly available mathematical software tools.

1. 서론

동기 M-PSK 시스템의 수신 성능은 기본적으로 AWGN(Additive White Gaussian Noise)에 의하여 감쇠된다. 그러나 실제 시스템에서는 부정확한 위상

천이기(phase shifter)로 인한, 즉, 정확히 90도를 천이시키지 못하여 발생하는 I/Q 위상 불균형과 I와 Q축에서의 서로 다른 필드 삽입 손실(insertion loss)로 인한 진폭 불균형, 수신된 반송파와 반송파 추적 루프에 의하여 발생한 반송파 간의 차이인 위상 오

* 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 (dwyoony@hanyang.ac.kr),
논문번호 : KICS2005-10-404, 접수일자 : 2005년 10월 4일, 최종논문접수일자 : 2006년 3월 16일

** 원주대학 정보통신과 (kamihyun@korea.com)

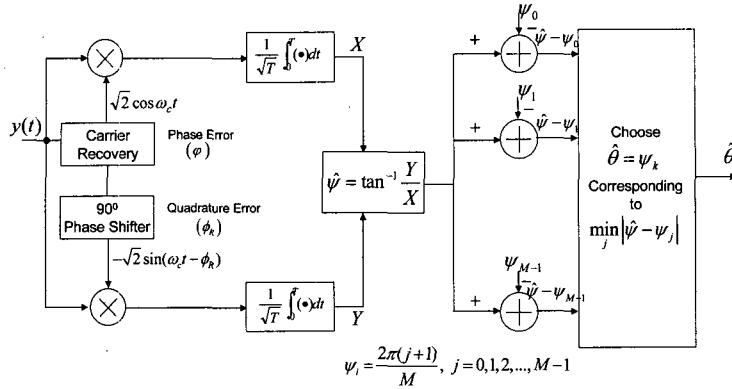


그림 1. M-PSK 최적 수신기

류, 그리고 페이딩(fading) 등 다양한 요소로 인하여 성능 저하가 발생한다. 이러한 성능 저하 요인을 고려한 시스템의 심볼 오류율(Symbol Error Rate : SER)과 비트 오류율(Bit Error Rate : BER)에 대한 이론적 분석 연구는 실제 시스템 구현 시 정확한 성능 기준 제공하기 위하여 필요하다.

디지털 통신 시스템에서 시스템 성능 측정 도구로써 가장 기본적으로 사용되는 SER과 BER에 대한 연구가 많이 진행되어 왔으나^{[1]-[6]}, AWGN 채널 상에서 I축과 Q축을 사용하는 2차원 변조 기법 중 몇몇 방식(M-PSK, circular QAM)들의 SER과 BER에 대한 closed-form 표현은 아직까지 도출되지 않고 있다. 그 중 MPSK 계열의 BER 성능에 대한 많은 연구 결과들이 근래 들어 발표되었는데, Lassing는 uniform한 MPSK의 정확한 BER을^[5], Alouini는 non-uniform한 M-PSK의 정확한 BER을 유도하여 나타내었다^[6]. 그러나 이러한 BER 표현의 문제점은 결과를 얻기 위하여 수치적분을 필요로 하기 때문에 closed-form으로 표현될 수 없거나^[6], 각 비트별로의 오류 확률을 제공하지 못한다는 문제점을 나타낸다^[5].

최근 두 축 간의 상관관계를 직접 정량적으로 해석하여 한 신호 점에서의 오류 확률 분석을 2차원 결합 가우시안 Q-함수(2-dimensional joint Gaussian Q-function)의 표현으로 간편히 할 수 있는 방안이 도출되어^[7], 수치적분이 필요 없는 closed-form 표현을 유도할 수 있고 수신 시스템의 불완전한 요소가 수신 성능에 미치는 영향을 분석하는데 보다 적용이 용이한 방안이 제시되었다. 이러한 2차원 결합 가우시안 Q-함수를 [5]에 적용할 경우 보다 간단하게 평균 BER 성능을 구할 수 있으나, 앞에서 언급한 것과 같이 각 비트별 오류 확률 특성에 대한 분

석은 하지 못한다. 또한 이는 각 비트 간의 성능 분석이 중요시되는 non-uniform한 MPSK의 BER에 적용할 때 BER 성능 분석이 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 2차원 결합 가우시안 Q-함수를 이용하여, I-Q 위상 불균형이 동기 M-PSK 시스템에 존재할 경우의 BER 성능을 구하기 위하여 각각의 비트에 대한 오류 식을 유도하고, 최종적으로 수치적분이 필요 없는 정확하고 일반화된 closed-form 표현의 BER 식을 유도하며, 이 결과를 컴퓨터 모의 실험을 통한 검증을 수행한다. 또한 유도한 식의 결과를 분석하여 본 논문에서 고려한 성능 감소 요인이 디지털 통신 시스템의 BER 성능에 미치는 영향에 대하여 알아본다.

II. 동기 M-PSK 시스템 모델

본 논문에서는 그림 1과 같이 I/Q 위상 불균형을 갖는 동기 M-PSK 시스템을 고려한다. 이 경우, 수신된 심볼 S_j 에 대한 I와 Q축 상에 수신된 신호 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} I &= S_I + n_I \\ Q &= S_Q + n_Q \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $S_I = \sqrt{E_s} \cos \psi_j$, $S_Q = \sqrt{E_s} \sin(\psi_j + \phi_R)$ 이고, E_s 는 심볼 에너지, ψ_j 는 전송된 신호의 위상이다. 이때 $\psi_j = \frac{(2j+1)\pi}{M}$, $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 이다. 또한, ϕ_R 은 I축과 Q축 사이의 위상 불균형의 정도를 나타낸다. n_I, n_Q 는 I, Q축 상의 AWGN의 성분으로써, 영 평균과 σ^2 의 분산, 그리고 $E[n_I n_Q] = \rho_{IQ} \sigma^2$ 를 갖는 결합 가우시안 분포를 따른다. 따라서 I축

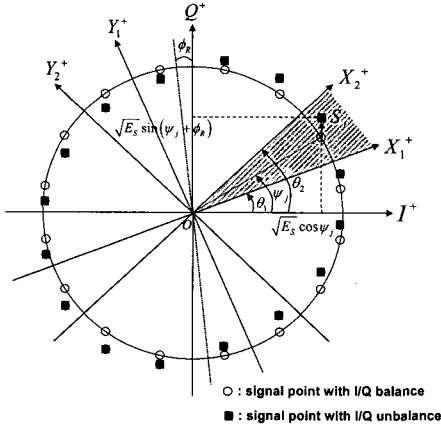


그림 2. IQ 위상 불균형 존재 시 16-PSK의 한 신호점에 대한 두 위상각 사이의 영역과 변형된 정상도

과 Q축의 평균은 $E[I] = \sqrt{E_s} \cos \psi_j$ 와 $E[Q] = \sqrt{E_s} \sin(\psi_j + \phi_R)$ 이므로 $Var[I] = \sigma^2$, $Var[Q] = \sigma^2$ 와 $COV[IQ] = \rho_{IQ}\sigma^2$ 를 갖는 결합 가우시안 분포를 따른다. 여기서 $\rho_{IQ} = \sin \phi_R$ 는 I축과 Q축간 상관계수를 나타낸다. 그림 2는 16-PSK의 특정 한 신호점에 대하여 I-Q 위상 불균형 존재 시 두 위상각 사이의 영역과 변형된 정상도를 보여주고 있다.

신호점 S_j 가 그림 2의 빗금친 영역에 들어갈 확률, 즉, $P_{r-j}\{\theta_1 \leq \Omega \leq \theta_2\}$ 를 구하기 위하여 다음과 같이 I축, Q축을 회전시킨다^[7].

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (2)$$

식 (2)에 의하여 회전 변환 후, Y_1, Y_2 는 다음과 같은 통계적인 값들을 갖는 결합 가우시안 분포를 따르게 된다.

$$\begin{cases} E[Y_i] = \sqrt{E_s} (\cos \theta_i \sin(\psi_j + \phi_R) - \sin \theta_i \cos \psi_j), & i = 1, 2, j = 0, \dots, M-1 \\ Var[Y_i] = \sigma^2 (1 - \sin^2 \phi_R \sin^2 \theta_i), & i = 1, 2 \\ COV[Y_1 Y_2] \\ \rho_{Y_1 Y_2} = \frac{\sqrt{Var[Y_1]} \sqrt{Var[Y_2]}}{\cos(\theta_2 - \theta_1) - \sin \phi_R \sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1) - \sin \phi_R \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi_R \sin^2 \theta_1} \sqrt{1 - \sin^2 \phi_R \sin^2 \theta_2}} \end{cases} \quad (3)$$

여기서, $Var[Y_i] = \sigma^2_{Y_i}$ 는 Y_i 의 분산이고, $\rho_{Y_1 Y_2}$ 와 $COV[Y_1 Y_2]$ 는 Y_1 과 Y_2 의 상관 계수와 공분산이다.

위에서 구한 식 (3)의 값들을 이용하여 확률 $P_{r-j}\{\theta_1 \leq \Omega \leq \theta_2\}$ 를 구하면 다음과 같다^[7].

$$\begin{aligned} P_{r-j}\{\theta_1 \leq \Omega \leq \theta_2\} &= P_{r-j}\{\angle X_1^+ O X_2^+\} \\ &= P_{r-j}\{Y_1 \geq 0, Y_2 \leq 0\} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 f(y_1, y_2, \rho_{Y_1 Y_2}) dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{Var[Y_1]}}}^\infty \int_{-\infty}^{-\frac{E[Y_2]}{\sqrt{Var[Y_2]}}} \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{Y_1 Y_2}^2}} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u^2 - 2\rho_{Y_1 Y_2} uv + v^2}{1 - \rho_{Y_1 Y_2}^2} \right)\right] dudv \\ &= Q\left(\frac{-E[Y_1]}{\sqrt{Var[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{Var[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2}\right) \quad (4) \end{aligned}$$

여기서, $f(y_1, y_2, \rho_{Y_1 Y_2})$ 는 Y_1 과 Y_2 의 결합 가우시안 확률 밀도 함수이고, $Q(a, b; \rho)$ 는 2차원 결합 가우시안 Q 함수이다^{[8],[9]}.

III. 일반화된 M-PSK의 BER

본 논문에서는 IQ 위상 불균형이 존재할 경우의 일반화된 MPSK의 BER 표현을 유도하기 위하여 우선 8, 16-PSK에 대하여 각 비트의 오류 확률을 구한 후, 이 결과들을 통합하여 각 파라메타들을 일반화시켜 일반화된 BER 표현을 유도한다.

3.1 8-PSK BER

그림 3에서 빗금 친 영역은 비트 0을 기준으로 하였을 경우에 대한 8-PSK의 각 비트 별 오류 영역을 나타낸다. 한 신호점에 대하여 하나의 빗금 친 영역에 들어갈 확률은 하나의 2차원 가우시안 Q-함수로 표현할 수 있다. 따라서 8-PSK의 모든 신호점에

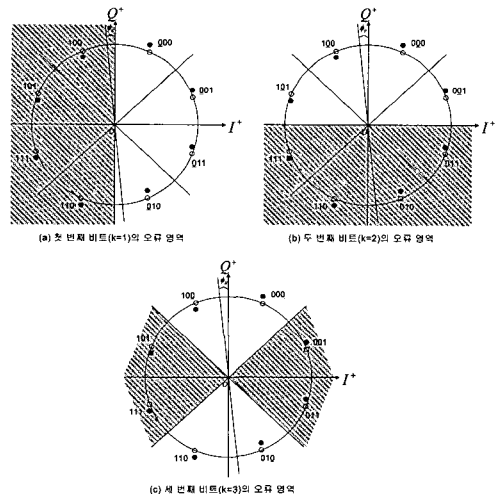


그림 3. 8-PSK의 각 비트별 오류 영역(비트 0 기준)

대하여 첫 번째 비트와 두 번째 비트에 대한 오류 확률은 각각 하나의 2차원 가우시안 Q-함수로 표현 될 수 있고, 세 번째 비트는 두 개의 Q-함수로 표현 될 수 있다. 본 논문에서는 각각의 비트 순서를 k 로 나타내고(가장 왼쪽의 비트가 MSB(Most Significant Bit), 즉 $k=1$), 또한 각 신호점 마다 계산되는 2 차원 가우시안 Q-함수의 수를 l 로 나타낸다.

3.1.1 8-PSK 심볼의 첫 번째 비트($b_k, k=1$)에 대한 BER

8-PSK에 대한 첫 번째 비트의 오류 확률을 구하기 위하여는 모든 신호점의 첫 번째 비트에 대한 I 축으로부터 회전시키는 위상 값($\theta_i, i=1,2$)의 변화를 관찰하여야 한다. 따라서 모든 신호점의 첫 번째 비트에 대하여 회전시키는 위상 값을 구하면 다음과 같이 첫 번째 비트 값에 따라 일정한 값을 갖는다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi/2, 3\pi/2], \text{ for } b_1 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [3\pi/2, 5\pi/2], \text{ for } b_1 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

위 식 (5)를 식 (3)에 대입하면, 회전 변환 후 θ_1, θ_2 에 따라 변하는 Y_1, Y_2 의 통계적인 값을 구할 수 있고, 이를 식 (4)에 대입하면 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재할 경우의 모든 신호점의 첫 번째 비트에 대한 오류 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_b(1) = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 \sum_{n=0}^{l-1} Q \left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2} \right) \quad (6)$$

여기서 각 신호점의 첫 번째 비트에 대한 오류 확률은 하나의 Q-함수로써 표현되므로 $l=1$ 이다.

3.1.2 8-PSK 심볼의 두 번째 비트($b_k, k=2$)에 대한 BER

8-PSK에 대한 두 번째 비트의 오류 확률도 마찬가지로 각 비트에 대한 I축으로부터 회전시키는 위상 값($\theta_i, i=1,2$)의 변화를 관찰하여야 한다. 따라서 모든 신호점의 두 번째 비트에 대하여 회전시키는 위상 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi, 2\pi], \text{ for } b_2 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [2\pi, 3\pi], \text{ for } b_2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

그 다음 식 (3)과 식 (4)에 식 (7)의 위상 값을 대입하면 불완전한 시스템 요소가 존재할 경우의

두 번째 비트에 대한 오류 확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_b(2) = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 \sum_{n=0}^{l-1} Q \left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2} \right) \quad (8)$$

여기서도 각 신호점의 두 번째 비트에 대한 오류 확률은 하나의 Q-함수로써 표현되므로 $l=1$ 이다.

3.1.3 8-PSK 심볼의 세 번째 비트($b_k, k=3$)에 대한 BER

$k=3$, 즉 세 번째 비트에 대하여도 식 (2), (3), (4)를 이용하여 각 비트의 오류 확률을 구하면, I축으로부터 회전시키는 위상 값($\theta_i, i=1,2$)은 각 심볼에서 세 번째 비트 값에 따라 다음과 같은 값을 갖게 된다. 이 때 각 신호점마다 세 번째 비트는 오류 영역을 각각 두 개씩 가지므로 두 개의 Q-함수로 표현된다. 따라서 $l=2$ 가 되므로 n 은 0, 1의 값을 갖는다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [(4n+1)\pi/4, (4n+3)\pi/4], \text{ for } b_3 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [(4n+3)\pi/4, (4n+5)\pi/4], \text{ for } b_3 = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$, n=0, 1$

따라서 식 (9)를 식 (3)의 각 통계치들에 대입하여 $k=3$ 일 때의 비트 오류 확률 식을 구하면,

$$P_b(3) = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 \sum_{n=0}^{l-1} Q \left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho \right) \quad (10)$$

이다.

3.2 16-PSK BER

그림 4에서도 위 그림 3에서의 마찬가지로 빗금 친 영역은 비트 0을 기준으로 하였을 경우에 대한 16-PSK의 각 비트별 오류 영역을 나타낸다. 위에서 언급하였듯이 한 신호점에 대하여 하나의 빗금 친 영역에 들어갈 확률은 하나의 2차원 가우시안 Q-함수로 표현할 수 있기 때문에 16-PSK의 첫 번째 비트와 두 번째 비트에 대한 오류 확률은 하나의 2차원 가우시안 Q-함수로 표현될 수 있고, 세 번째 비트는 두 개의 Q-함수로, 네 번째 비트는 네 개의 Q-함수로 표현될 수 있다.

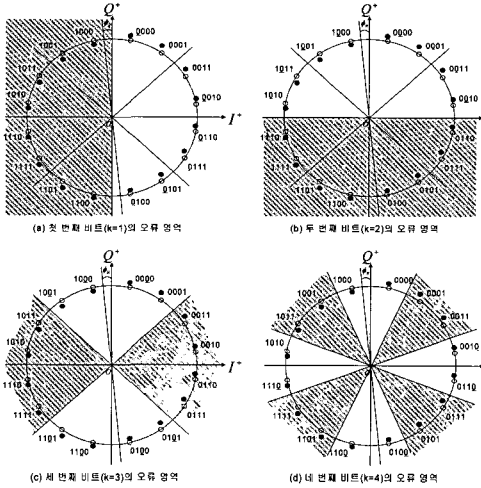


그림 4. 16-PSK의 각 비트별 오류 영역(비트 0 기준)

3.2.1 16-PSK 심볼의 첫 번째 비트($b_k, k=1$)에 대한 BER

16-PSK에 대한 BER은 8-PSK와 동일한 방법으로 구할 수 있다. 우선, 첫 번째 비트($k=1$)의 오류 확률을 구하기 위하여 모든 신호점의 첫 번째 비트에 대하여 I축으로부터 회전시키는 위상 값 ($\theta_i, i=1,2$)의 변화를 관찰 후, 그 값을 구하면 다음과 같이 첫 번째 비트 값에 따라 일정한 값을 갖는다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi/2, 3\pi/2], & \text{for } b_1 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [3\pi/2, 5\pi/2], & \text{for } b_1 = 1 \end{cases} \quad (11)$$

그 다음, 위 값을 식 (3)에 대입하면, 회전 변환 후 θ_1, θ_2 에 따라 변하는 Y_1, Y_2 의 통계적인 값을 구할 수 있고 이를 식 (4)에 대입하면 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재할 경우의 모든 신호점의 첫 번째 비트에 대한 오류 확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_b(1) = \frac{1}{16} \sum_{j=0n=0}^{15} \sum_{l=1}^{l-1} Q\left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{Var[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{Var[Y_2]}}; -\rho_{Y_1, Y_2}\right) \quad (12)$$

여기서 각 신호점의 첫 번째 비트에 대한 오류 확률은 하나의 Q-함수로써 표현되므로 $l = 1$ 이다.

3.2.2 16-PSK 심볼의 두 번째 비트($b_k, k=2$)에 대한 BER

16-PSK에 대한 두 번째 비트($k=2$)의 오류 확률도 마찬가지로 각 비트에 대해 회전시키는 위상

값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi, 2\pi], & \text{for } b_2 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [2\pi, 3\pi], & \text{for } b_2 = 1 \end{cases} \quad (13)$$

또한, 이를 식 (3), (4)에 대입하면 다음과 같은 식으로 비트 오류 확률을 구할 수 있다.

$$P_b(2) = \frac{1}{16} \sum_{j=0n=0}^{15} \sum_{l=1}^{l-1} Q\left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{Var[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{Var[Y_2]}}; -\rho_{Y_1, Y_2}\right) \quad (14)$$

여기서도 각 신호점의 두 번째 비트에 대한 오류 확률은 하나의 Q-함수로써 표현되므로 $l = 1$ 이다.

3.2.3 16-PSK 심볼의 세 번째 비트($b_k, k=3$)에 대한 BER

$k=3$ 일 때도 8-PSK와 마찬가지로 먼저 각 신호점마다 I축으로부터의 회전하는 위상 값을 구하여 일반화 시키면 다음과 같다. 이 때 각 신호점마다 세 번째 비트는 오류 영역을 각각 두 개씩 가지므로 두 개의 Q-함수로 표현된다. 따라서 $l=2$ 가 되므로 n 은 0, 1의 값을 갖는다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [(4n+1)\pi/4, (4n+3)\pi/4], & \text{for } b_3 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [(4n+3)\pi/4, (4n+5)\pi/4], & \text{for } b_3 = 1 \end{cases} \quad (15)$$

$, n=0, 1$

그 다음 식 (9)를 식 (3)의 각 통계치들에 대입하여 $k=3$ 일 때의 BER 식을 구하면,

$$P_b(3) = \frac{1}{16} \sum_{j=0n=0}^{15} \sum_{l=1}^{l-1} Q\left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{Var[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{Var[Y_2]}}; -\rho_{Y_1, Y_2}\right) \quad (16)$$

이다.

3.2.4 16-PSK 심볼의 네 번째 비트($b_k, k=4$)에 대한 BER

$k=4$ 일 때도 같은 방법으로 구하는데, 이 때 각 신호점마다 네 번째 비트는 오류 영역을 각각 네 개씩 가지므로 두 개의 Q-함수로 표현된다. 따라서 $l=4$ 가 되므로 n 은 0, 1, 2, 3의 값을 갖는다.

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [(4n+1)\pi/8, (4n+3)\pi/8], & \text{for } b_4 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [(4n+3)\pi/8, (4n+5)\pi/8], & \text{for } b_4 = 1 \end{cases} \quad (17)$$

$, n=0, 1, 2, 3$

따라서 식 (9)를 식 (3)의 각 통계치들에 대입하여 $k=4$ 일 때의 BER 식을 구하면,

$$P_b(k) = \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{15} \sum_{m=0}^3 Q \left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2} \right) \quad (18)$$

이다.

3.3 일반화된 M-PSK의 BER

3.3.1 2차원 Q-함수의 수(l)의 일반화

각 신호점의 비트별 오류 확률을 구하기 위하여 사용되는 2차원 Q-함수의 수는 변조 레벨에 따라, 비트 순서(k)에 따라 다르다. 따라서 이를 일반화시키면 다음 표 1과 같다.

표 1. 변조 레벨과 비트 순서(k)에 따른 2차원 가우시안 Q-함수의 수(l)

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	...
8-PSK	1	1	2			
16-PSK	1	1	2	4		
32-PSK	1	1	2	4	8	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M-PSK	1	1	2	4	8	⋮ $2^{k-2+\lfloor \frac{1}{k} \rfloor}$

3.3.2 M-PSK의 각 비트별 오류 확률 표현의 일반화

I/Q 위상 불균형을 고려한 M-PSK에 대한 일반화된 BER 표현은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$P(e) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m P_b(k) \quad (19)$$

여기서 $m = \log_2 M$ 이고, $P_b(k)$ 는 다음과 같다.

$$P_b(k) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{l-1} Q \left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2} \right) \quad (20)$$

여기서 각 비트에 대한 l축으로부터 회전시키는 위상 값은 다음과 같다.

1) 첫 번째 비트(k=1) 일 때,

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi/2, 3\pi/2], \text{ for } b_1 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [3\pi/2, 5\pi/2], \text{ for } b_1 = 1 \end{cases} \quad (21)$$

2) 두 번째 비트(k=2) 일 때,

$$\begin{cases} [\theta_1, \theta_2] = [\pi, 2\pi], \text{ for } b_2 = 0 \\ [\theta_1, \theta_2] = [2\pi, 3\pi], \text{ for } b_2 = 1 \end{cases} \quad (22)$$

3) 세 번째 이상의 비트(k ≥ 3) 일 때,

$$\begin{cases} \theta_1 = (4n+1)\pi/2^{k-1}, \theta_2 = (4n+3)\pi/2^{k-1}, \text{ for } b_k = 0 \\ \theta_1 = (4n+3)\pi/2^{k-1}, \theta_2 = (4n+5)\pi/2^{k-1}, \text{ for } b_k = 1 \end{cases} \quad (23)$$

식 (20)은 2차원 결합 가우시안 Q-함수의 합으로 표현되는데, 2차원 결합 가우시안 Q-함수는 이미 일반 소프트웨어 틀에서 내장 함수로 제공되고 있어 직접 쉽게 연산이 가능하다^[10].

만약, 수신된 반송파와 반송파 추적 루프에 의하여 발생한 반송파 간의 차이인 위상 오차 오차(φ)가 수신단에 존재한다면, 식 (2)에서 θ_i 대신 $\theta_i + \varphi$ 를 삽입하면 된다.

IV. 수치적 결과

본 논문에서는 먼저 위에서 구한 식 (20)의 결과와 다른 논문에서의 결과를 비교하여 본 논문의 결과가 참조한 다른 논문의 결과와 같음을 보이고, 그 후 I/Q 불균형이 각 비트의 오류 성능에 얼마나 영향을 미치는지 살펴본다.

그림 5는 식 (20)의 결과와 [5], [6]번 논문들의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 비트별 오류 성능을 구할 수 없는 [5]의 평균 BER 결과와 식 (20)의 결과를 비교하여 보면 거의 같음을 볼 수 있을 뿐만 아니라, 일반화된 closed 형태로의

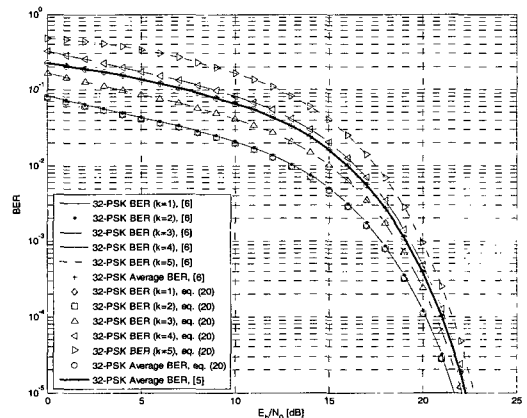


그림 5. 32-PSK의 각 비트별 오류 성능 비교

표현이 불가능한 [6]에서의 비트별 오류 확률과 평균 BER을 식 (20)의 결과와 비교하여 보면 거의 같음을 확인할 수 있다.

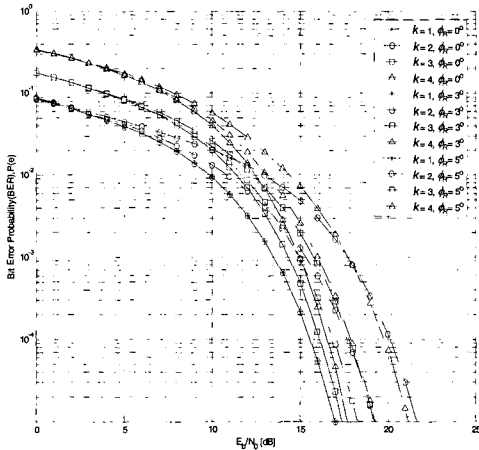


그림 6. I/Q 위상 불균형 존재 시 16-PSK의 각 비트별 오류 성능

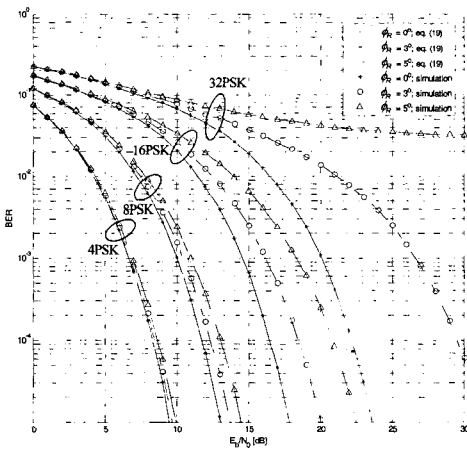


그림 7. I/Q 위상 불균형이 존재할 경우 MPSK의 평균 비트 오류 확률 성능

본 논문에서는 I/Q 위상 불균형이 M-PSK의 BER 성능에 미치는 영향을 알아보기 위하여, ϕ_R 값을 $0, \pi/60, \pi/36$ 로 하여 각각에 대한 성능을 구하였다. 우선 그림 6에서는 $\phi_R = 0, \pi/60, \pi/36$ 일 때 16-PSK의 각 비트별 오류 성능을 나타내었다. $\phi_R = \pi/60$ 일 때, 즉 I축 Q축이 90° 위상차를 갖는 것이 아니라 $90^\circ + (\pi/60)$ 의 위상차를 가질 때 10^{-3} 의 BER을 기준으로 두 번째 비트는 약 2dB 정도, 세 번째 비트는 약 0.8dB 정도, 네 번째 비트는 약 1dB 정도의 전력 손실을 갖는다. 또한 $\phi_R =$

$\pi/36$ 일 때는 각각 약 4.5dB, 1.7dB, 2.8dB 정도의 전력 손실을 갖는다. 따라서 그림 6을 통하여 위상 불균형이 증가 할수록 첫 번째 비트에 대한 오류 성능은 변화가 없고, 두 번째 비트의 성능 감쇄가 가장 크며 세 번째 비트의 성능 감쇄가 가장 작게 나타남을 알 수 있다. 여기서 첫 번째 비트에 대한 오류 성능이 변화가 없는 이유는 시스템 모델에서 I/Q 위상 불균형으로 발생한 위상 차이 값 ϕ_R 을 동상(inphase) 축에만 적용시켜 신호점 형태가 상하로만 변형되기 때문이다. 그림 7에는 $\phi_R = 0, \pi/60, \pi/36$ 일 때 M-PSK의 평균 BER 성능을 나타낸 것으로 식 (20)의 결과와 컴퓨터 모의실험 결과가 정확히 일치하는 것을 볼 수 있을 뿐만 아니라, M-PSK 평균 BER 성능은 점점 고차 레벨의 변조 방식일수록 I/Q 위상 불균형에 상당히 민감하다는 것을 알 수 있다.

V. 결론

최근 연구에서, 결정 변수가 어느 특정 영역에 분포할 확률이 두 축 간의 상관관계가 정량적으로 규명됨으로써 2차원 결합 가우시안 Q-함수 형태로 표현되었다. 본 논문에서는 이러한 2차원 결합 가우시안 Q-함수를 이용하여, 동기 M-PSK 시스템의 복조 시 I/Q 위상 불균형을 고려한 BER을 구하기 위하여 각 비트별의 오류 확률 뿐만 아니라 평균 BER을 정확하고 일반화된 closed-form 표현으로 유도하였으며, 기존에 제시되지 못한 AWGN 채널 상에서의 I/Q 불균형 존재 시 각 비트에 대한 오류 성능을 제시하였다. 또한 제시된 결과는 기존 다른 논문의 결과와 거의 정확하게 일치함을 보였다. 따라서 새롭게 유도된 BER 표현과 수치적 결과는 M-PSK를 적용하는 시스템의 여러 성능 감쇄 요인에 대한 성능 분석 시 정확한 수치적 성능 기준을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

- [1] R. F. Pawula, S. O. Rice and J.H. Roberts, "Distribution of the phase angle between two vectors perturbed by Gaussian noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30, pp. 1828-1841, Aug. 1982.
- [2] J. W. Craig, "A new, simple and exact result for calculating the probability of error for two-dimensional signal constellations," in *IEEE*

