

< 논문 >

# 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용한 탄성 지반상의 열림 균열을 가진 Euler-Bernoulli 보의 진동 해석

신영재\* · 황기섭\* · 윤증학\*\*  
(2005년 7월 21 접수, 2006년 2월 2일 심사완료)

## Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beam with Open Cracks on Elastic Foundations Using Differential Transformation Method and Generalized Differential Quadrature Method

Young-Jae Shin, Ki-Sup Hwang and Jong-Hak Yun

**Key Words:** Differential Transformation Method(미분변환법), Generalized Differential Quadrature Method(일반화 미분구적법), Elastic Foundation(탄성지반)

### Abstract

The main purpose of this paper is to apply differential transformation method(DTM) and generalized differential quadrature method(GDQM) to vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with open cracks on elastic foundation. In this paper the concepts of DTM and GDQM were briefly introduced. The governing equation of motion of the beam with open cracks on elastic foundation is derived. The cracks are modeled by massless substitute spring. The effects of the crack location, size and the foundation constants, on the natural frequencies of the beam, are investigated. Numerical calculations are carried out and compared with previous published results.

### 1. 서론

탄성 지반상의 보에 대한 동적 거동 해석은 공학의 많은 분야에서 관심을 가져왔다. 또한 보에 내재하는 균열의 영향을 측정하는 방법에 대해 많은 연구자들의 제안이 있었다.

탄성 지반상에서의 보에 대한 해석은 기저의 반력이 빔의 변형량에 비례한다는 가정하에 발전되었다. 이러한 가정은 E. Winkler에 의해 처음 소개되었다.<sup>(1)</sup> Pasternak은 Winkler 지반에 전단력에 의한 상호작용을 포함시킨 지반 모델을 제안하였다.<sup>(2)</sup> 이러한 가정의 기계적 연관성은 지지물이 수직방향으로 병렬로 배열되어 있는 선형 스프링의 조합으로 대체될 수 있음을 나타낸다.

Pasternak의 지반이 Winkler 지반 모델과 다른 점은 끝부분이 전단력에 의해서만 변형이 이루어지고 압축되지 않는 수직 요소로 이루어진 빔과 같이 전단층으로 연결되어 있다는 것이다.

가장 간단한 모델인 Winkler 지반 모델에 대하여 이미 동적거동, 안정성, 근사해 및 정해에 대해서 선행 연구자들에 의해 연구되었다.<sup>(3-5)</sup> Farghaly 등은 이심된 집중 질량과 축방향 힘이 자유 진동에 미치는 영향을 연구하였다.<sup>(4)</sup> Razaqpur 등은 Winkler 지반 모델하에서 Euler-Bernoulli 보에 대한 해석을 유한요소를 사용하여 수행하였다.<sup>(6)</sup> Valsangkar 등에 의해서 Pasternak 지반상에서의 Euler-Bernoulli 보에 대한 해석이 연구되어 졌다.<sup>(7)</sup>

구조물에 내재하는 균열의 영향을 조사하기 위해서 몇몇의 연구에서는 균열이 있는 부분에서 강성이 감소는 것으로 수학적 모델을 구성하여 균열에 대한 연구를 수행하였다.<sup>(8,9)</sup> 그리고 실제

† 책임저자, 회원, 안동대학교 기계공학부 기계설계 전공  
TEL : (054)820-5435 FAX : (054)820-5167

\* 안동대학교 대학원 기계공학부

\*\* 안동대학교 대학원 기계공학부

균열이 존재함으로 인해 발생하는 동적 특성의 변화를 연구하기 위해 몇몇 논문에서는 하나 혹은 두개의 균열에 의해 발생하는 외팔보의 고유진동수의 변화를 측정하였다.<sup>(10-12)</sup> Christides 등은 미분 방정식을 유도하여 균열이 있는 Euler-Bernoulli 보 이론을 작성하였다. 그리고 하나 혹은 두개의 균열이 대칭으로 존재하는 균일보에 대한 경계조건을 제시하였다. 고유치문제에서 균열의 영향을 다루기 위해 몇 개의 논문에서는 보를 균열이 있는 점을 기준으로 보를 나누어서 고려하였다. 그리고 나누어지는 부분은 질량을 고려하지 않은 회전 스프링으로 연결되는 것으로 나타내었다.<sup>(10,13)</sup>

연속모델은 편미분방정식형태로 표현되어지므로 해석이 매우 어렵다. 특히 동적 거동을 하는 시스템의 운동방정식은 초기값 문제와 경계값 문제로 나타나며, 대부분의 경우 해석적 해를 구할 수 없다. 보에 관한 수치해석법에는 일반적으로 유한차분법과 유한요소법 등을 사용하였으나 이러한 수치해석 방법은 복잡한 수식을 사용하고, 정확한 해를 구하기 위해 많은 계산 시간을 필요로 한다.

따라서 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치해석 방법의 요구에 부응하여 새로운 수치해석 방법으로 미분변환법(Differential Transformation Method)과 일반화 미분구적법(Generalized Differential Quadrature Method)이 개발되었다.

미분변환법은 Zhou에 의해 제안된 수치 해석법으로 선형, 비선형 문제에서 수렴이 빠르고 간단한 연산과 순환관계에 의한 수치해석으로 복잡한 수식을 필요로 하지 않는다.<sup>(14)</sup> 미분변환법을 적용하여 Malik 등은 연속시스템에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였으며,<sup>(15)</sup> Chen 등은 비선형 스프링시스템의 진동해석을 통해 비선형 진동해석에 미분변환법을 적용하였고,<sup>(16)</sup> Chen은 축하중을 받는 티모센코 보의 진동해석을 하였다.<sup>(17)</sup> Ho 등은 비균질 탄성지반(non-homogeneous elastic foundation)위의 가변단면보에 대한 진동해석을 통해 미분변환법의 수렴성 및 타당성을 검증하였다.<sup>(18)</sup> 상기와 같이 미분변환법은 많은 학자들에 다양한 공학문제에 활발히 적용 및 연구되고 있는 수치해석방법이다.<sup>(19,20)</sup>

일반화 미분구적법은 Shu<sup>(21)</sup>가 미분구적법<sup>(22)</sup>의 결점을 보완한 것으로서, 초기값 문제나 경계값

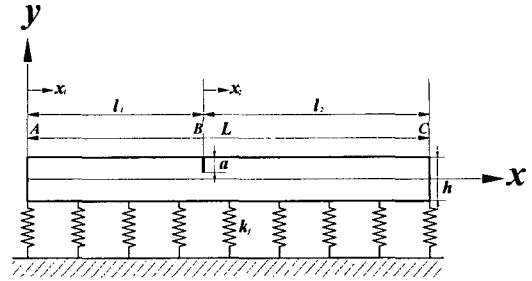


Fig. 1 Structural system of study

문제를 가지는 상미분이나 편미분 방정식의 해를 구하는데 유용한 수치해석 방법이다. 특히 일반화 미분구적법은 적은 격자(Grid)로도 정확한 해를 구할 수 있는 수치해석 방법이다. Du 등은 일반화 미분구적법을 이용하여 보와 판의 진동을 해석하여 효율성과 정확성을 증명하였고,<sup>(23)</sup> Shu는 일반화 미분구적법을 4가지 경계조건하에서 얇은 복합 원주형 셸(shell)의 자유진동해석에 적용하여 효과적인 수치해석법임을 증명하였다.<sup>(24)</sup> 또한 최근에는 구조해석 문제 및 유체 역학 문제 등의 수치해석 방법으로 일반화 미분구적법이 다양한 분야로 확장되고 있다.

본 연구는 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용하여 탄성 지반상의 열림균열을 가지는 보의 고유진동해석이 연구목적이다. Winkler 지반과 Pasternak 지반상에서 Euler-Bernoulli 보에 대하여 기존의 수치해석결과와 비교하였고, 미분변환법과 일반화 미분구적법의 타당성을 검증하였다.

## 2. 동적 해석

### 2.1 Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보

Fig. 1에서와 같이  $x_1$ 이  $l_1$ 의 위치에 균열이 존재하는 Winkler 지반상의 보를 가정한다. 균열이 위치한 지점이 질량이 없는 스프링으로 분리되는 두 개의 보를 연결한다고 하면 균일 사각 단면보의 지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + k_f y_i = 0 \quad (1)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad i = 1, 2 \quad (x_0 = 0, x_2 = L)$$

상기 식에서  $E$ ,  $I$ ,  $\rho$ ,  $A$  및  $k_f$ 는 각각 보의 종탄성계수(Young's modulus), 단면에 대한 관성

모멘트(moment of inertia), 밀도, 보의 단면적 그리고 Winkler 지반계수(modulus of Winkler foundation)이다.

식 (1)의 정상 상태 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$y_i(x, t) = Y_i(x)e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 넣어  $e^{j\omega t}$ 를 소거하면 식 (3)과 같이 된다.

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi^4} - (\lambda^4 - K)Y_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

여기서  $\xi = \frac{x}{L}$  (4)

$$\lambda^4 = \rho A \frac{L^4 \omega^2}{EI}, \quad K = \frac{k_f L^4}{EI} \quad (5,6)$$

### 2.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보

Pasternak 지반상에서의 보는 Winkler 지반상에 전단력을 고려하여야 한다. 이때의 운동의 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + k_f y_i - G_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad i = 1, 2 \quad (x_0 = 0, x_2 = L)$$

여기서  $G_0$ 는 Pasternak 지반의 횡탄성계수(shear modulus of foundation)이다.

2.1 절에서와 같이 식 (7)의 정상상태 해를 식 (2)와 같이 가정하고, 식 (2)를 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi^4} - s^2 \frac{d^2 Y_i}{d\xi^2} - (\lambda^4 - K)Y_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

여기서  $s^2 = \frac{G_0 L^2}{EI}$  (9)

### 2.3 균열에 대한 해석

균열은 질량을 고려하지 않은 스프링으로 연결된 것으로 간주하여 두 부분으로 나누어 고려하였다. 이 경우 균열이 있는 부분에서 보의 변위, 모멘트 그리고 전단력이 연속적이어야 하며, 회전 변위와 모멘트 간의 적합 관계식이 존재하게 된다.

$$Y_1(l_1) = Y_2(l_1) \quad (10)$$

$$Y_1''(l_1) = Y_2''(l_1) \quad (11)$$

$$Y_1'''(l_1) = Y_2'''(l_1) \quad (12)$$

$$Y_1'(l_1) + cY_1''(l_1) = Y_2'(l_1) \quad (13)$$

여기서  $l_1 = \frac{x_1}{L}$ 이며,  $c$ 는 스프링의 탄성계수로서 열림균열일 경우 다음식과 같은 식으로 표현된다.<sup>(11)</sup>

$$c = 5.346hf(\xi) \quad (14)$$

여기서

$$f(\xi) = 1.8624\xi^2 - 3.95\xi^3 + 16.375\xi^4 - 37.226\xi^5 + 76.81\xi^6 - 126.9\xi^7 + 172\xi^8 + 143.9\xi^9 + 66.56\xi^{10} \quad (15)$$

여기서  $\xi$ 는  $a/h$ 이고,  $a$ 는 균열의 깊이,  $h$ 는 보의 높이이다.

### 2.4 경계조건의 적용

보의 경계조건은 고정단, 자유단, 단순지지의 세 가지의 경계조건은 다음과 같으며, 본 연구에는 고정단 경계조건이 사용되어 졌다.

고정 :  $Y = 0, Y' = 0$  (16,17)

자유 :  $Y'' = 0, Y''' = 0$  (18,19)

단순지지 :  $Y = 0, Y'' = 0$  (20,21)

## 3. 미분변환법과 일반화 미분구적법

### 3.1 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두었으며, 기본연산에 의한 변환 관계식으로부터 순환관계식을 유도하여 해를 구하며, 선형과 비선형 문제의 해를 구하는데 유용한 방법이다.<sup>(14-18)</sup>

임의의 원함수(original function)에 대한 미분 변환은 식 (22)과 같이 정의 된다.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (22)$$

여기서  $Y(k)$ 를  $T$ -function이라 한다.

$Y$ 의 미분역변환(Inverse Differential Transformation)은 식 (23)와 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (23)$$

Table 1 Basic operations of the differential transformation

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$z(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$Z(k) = (k+1) Y(k+1)$
$z(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$	$Z(k) = (k+1)(k+2) Y(k+2)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m)$ at $\begin{matrix} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{matrix}$

여기서 미분변환의 정의 식 (22)를 미분역변환 식 (23)에 대입하여 다시 쓰면 원함수  $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (24)$$

상기식 (24)에서 미분변환은 테일러 시리즈에서 유래되었다는 것을 알 수 있다.

상기의 정의로부터 다음과 같은 미분 변환에 관한 기본적인 연산을 구할 수 있다.

실제의 적용에 있어서는  $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려한 식 (25)와 같이 표시된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (25)$$

여기서  $n$ 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정되어진다.

### 3.2 일반화 미분구적법

일반화 미분구적법은 주어진 이산점에서 공간 변수에 관한 상미분방정식 또는 편미분방정식이 공간영역에서 모든 이산점에 대한 함수 값을 가중 선형 합으로서 표현할 수 있는 것에 기초한다.

격자의  $i$ 번째 이산점에서 함수  $Y(x, t)$ 의  $x$ 에 관한 미분은 전형적인 integral quadrature의 개념에 따라, Bellman 등이 식 (26)와 같이 근사화시켰다.<sup>(22)</sup>

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} [Y_x(x_i, t)] = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(n)} Y(x_j, t) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

여기서  $Y_x(x_j, t)$ 는  $x_j$ 점에서  $x$ 에 관한  $Y(x, t)$ 의  $n$ 차 미분이며,  $N$ 은 이산 격자의 개수이다.

$c_{ij}^{(n)}$ 은 가중계수(weighting factor)이다.

일반화 미분구적방법에서 1차 미분에 대한 가중계수는 다음 식과 같다.

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{but } i \neq j \quad (27)$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{for } i = j \quad (28)$$

여기서  $M^{(1)}(x_i) = \sum_{i=1, i \neq j}^N (x_i - x_j)$ 이다.

2차 또는 고차 미분함수의 가중 계수는 식 (29) 및 식 (30)에 나타난  $Y_x^{(m)}(x_j, t)$ 에서  $m$ 차 가중계수  $c_{ij}^{(m)}$ 의 순환관계식에 의해서 구할 수 있다.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left\{ c_{ii}^{(m-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right\} \quad (29)$$

for  $i \neq j$ .  $m = 2, 3, \dots, N-1$ .  $i, j = 1, 2, \dots, N$

$$c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(m)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

본 장에서 설명한 것과 같이 일반화 미분구적법의 가중계수 결정 식들은 매우 간결하고 단순하며, 그것의 순환특성 때문에 공식화하고 적용하기가 쉽다는 것을 알 수 있다.

## 4. 미분변환법과 일반화 미분구적법의 적용

### 4.1 Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분변환법의 적용

Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 무차원 운동 방정식 (3)에 미분변환의 기본 연산을 적용하면 다음과 같이 표현 된다.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}_i(k+4) - (\lambda^4 - K)\bar{Y}_i(k) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

여기서  $\bar{Y}_i$ 은 원함수  $Y_i$ 의 T-function이다.

보의 경계조건에 대한 미분변환식은 다음과 같이 표현된다.

$Y_1$ 에서 미분변환은 식 (22)을 이용하면 고정단과 고정단에서의 경계조건식 식 (16,17)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{Y}_1(0) = 0, \bar{Y}_1(1) = 0 \quad (32,33)$$

$Y_2$ 에서 미분변환은 식 (25)을 이용하면 고정단과 고정단에서의 경계조건식 식 (16,17)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^n \bar{Y}_2(k) = 0, \sum_{k=0}^n k \times \bar{Y}_2(k) = 0 \quad (34,35)$$

#### 4.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분변환법의 적용

Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 무차원 운동 방정식 (3)에 미분변환의 기본 연산을 적용하면 다음과 같이 표현 된다.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}_i(k+4) - s^2(k+1)(k+2)\bar{Y}_i(k+2) - (\lambda^4 - K)\bar{Y}_i(k) = 0 \quad (36)$$

$i = 1, 2$

보의 경계조건에 대한 differential transformation 변환식은 다음과 같이 표현된다.

#### 4.3 Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분구적법의 적용

Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 무차원 운동 방정식 (3)에 일반화 미분구적법을 적용하면 다음과 같이 표현 된다.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} Y_j - (\lambda^4 - K) Y_j = 0 \quad (37)$$

보의 경계조건에 대한 일반화 미분구적법은 다음과 같이 변환된다.

$Y_1$ 에서 일반화 미분구적법은 고정단과 고정단에서 경계조건 식 (16,17)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_1 = 0, \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} Y_j = 0 \quad (38)$$

$Y_2$ 에서 일반화 미분구적법은 고정단과 고정단에서의 경계조건식 식 (16,17)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_N = 0, \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} Y_j = 0 \quad (39)$$

#### 4.4 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분구적법의 적용

Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 무차원 운동 방정식 (3)에 일반화 미분구적법을 적용하면 다음과 같이 표현 된다.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(4)} Y_j - s^2 \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)} Y_j - (\lambda^4 - K) Y_j = 0 \quad (40)$$

### 5. 수치해석 결과 및 고찰

미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용하여 Winkler 지반상에서의 Euler-Bernoulli 보와 Pasternak 지반상에서의 Euler-Bernoulli 보에 대하여 경계조건이 양단 고정단인 경우와 균열의 개수가 하나 일 때에 대해 수치해석을 수행하였다. 본 연구에서 사용된 물성치는 길이  $L=10m$ , 보의 종탄성계수(Young's modulus)  $E=206.8(Gpa)$ , 밀도  $\rho =7850(kg/m^3)$ , 전단면의 폭  $b=0.25m$ , 전단면의 높이  $h=0.25m$  이다.

Differential transformation와 Generalized differential Quadrature에 의한 수치해석 결과 값은 성경윤에 의해 해가 네 개의 독립적인 함수의 합에 의해 표현되는 해석적으로 연구한 논문 (25)의 결과 값과 비교 고찰하였다.

#### 5.1 Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli보

Winkler 지반상에서 Euler-Bernoulli보에 관하여 보의 1/8, 1/4, 1/2의 지점과 균열의 0.02, 0.04, 0.2의 위치에서 수치해석 결과 값을 Table 2, Table 3, Table 4에서 참고 논문 (25)의 결과 값과 비교하여 나타냈으며, 그 결과는 미분변환법과 일반화 미분구적법방법은 모두 그 결과 값이 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 5.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli보

Pasternak 지반상에서 Euler-Bernoulli보에 관하여 보의 1/8, 1/4, 1/2의 지점과 균열의 0.02, 0.04, 0.2의 위치에서 수치해석 결과 값을 Table 5, Table 6, Table 7에서 참고 논문 (25)의 결과 값과 비교

**Table 2** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Winkler foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/8$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	83.6699	83.6699	83.6699	228.745	228.745	228.745	447.938	447.938	447.938
0.04	83.5904	83.5904	83.5904	228.742	228.742	228.742	447.766	447.766	447.766
0.2	81.7961	81.7961	81.7961	228.676	228.676	228.676	443.708	443.708	443.708

**Table 3** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Winkler foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/4$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	83.6964	83.6964	83.6964	228.597	228.597	228.597	447.670	447.670	447.670
0.04	83.6920	83.6920	83.6920	228.174	228.174	228.174	446.742	446.742	446.742
0.2	83.5809	83.5809	83.5809	218.004	218.004	218.004	427.287	427.287	427.287

**Table 4** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Winkler foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/2$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	83.6401	83.6401	83.6401	228.746	228.746	228.746	447.567	447.567	447.567
0.04	83.4755	83.4755	83.4755	228.746	228.746	228.746	446.346	446.346	446.346
0.2	79.4647	79.4647	79.4647	228.746	228.746	228.746	419.413	419.413	419.413

**Table 5** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/8$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	105.669	105.669	105.669	260.847	260.847	260.847	484.259	483.892	484.260
0.04	105.641	105.641	105.641	260.849	260.849	260.849	484.011	483.636	484.012
0.2	105.001	105.001	105.001	260.911	260.911	260.911	478.022	477.470	478.022

**Table 6** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/4$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	105.669	105.669	105.669	260.650	260.650	260.650	483.983	483.997	483.983
0.04	105.638	105.638	105.638	260.092	260.092	260.092	482.960	482.972	482.960
0.2	104.843	104.843	104.843	246.551	246.551	246.551	461.673	461.667	461.673

**Table 7** A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation(fixed-fixed) for  $X_1 = 1/2$ 

a/h	1st			2nd			3rd		
	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ	Ref.(25)	DT	GDQ
0.02	105.578	105.578	105.578	260.846	260.846	260.846	483.874	483.874	483.874
0.04	105.292	105.292	105.292	260.846	260.846	260.846	482.539	482.539	482.539
0.2	98.1936	98.1936	98.1936	260.846	260.846	260.846	453.034	453.034	453.034

하여 나타냈으며, 그 결과는 미분변환법과 일반화 미분구적법은 모두 그 결과 값이 잘 일치함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구는 탄성 지반상에서 균열을 가지는 Euler-Bernoulli보에 대하여 운동방정식을 유도하였

고, 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용하여 수치해석을 수행하여 기존의 해석적인 결과와 비교 연구하여 얻은 결과는 다음과 같다.

(1) 미분변환법과 미분 구적법에 의해 얻은 결과와 해석적인 결과인 참고문헌 (22)의 결과는 잘 일치한다.

(2) 미분변환법과 일반화 미분구적법의 이용한 본 해석의 타당성을 기존의 결과와 비교하여 검증하였다.

(3) 미분변환법 및 미분구적법은 유한요소법, 유한차분법 등의 수치해석법에 대하여 추가적으로 미분방정식을 풀기 위한 또 다른 방법으로 사용할 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Hetenyi, M., 1946, "Beams on Elastic Foundation," (The University of Michigan Press, Michigan)
- (2) Rades, M., 1970, "Steady-State Response of a Finite Beam on a Pasternak-type Foundation," *International Journal of Solids Structures*, Vol. 6, pp. 739~756.
- (3) De Rosa, M. A., 1989, "Stability and Dynamics of Beams on Winkler Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 377~388.
- (4) Farghaly, S. H. and Zeid, K. M., 1995, "An Exact Frequency Equation for an Axially Loaded Beam-Mass-Spring System Resting on a Winkler Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 185, No. 2, 357~363.
- (5) Maurizi, M. J., Rosales, M. and Belles, P., 1988 "A Further Note on the Free Vibrations of Beams Resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, No. 1, pp. 191~193.
- (6) Razaqpur, A. G. and Shah, K. R., 1991, "Exact Analysis of Beams on Two-Parameter Elastic Foundations," *International Journal of Solids Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 435~454.
- (7) Valsangkar, A. J. and Pradhanang, R., 1988, "Vibrations of Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 217~225.
- (8) Yuen, M. M. F., 1985, "A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 103, No. 3, pp. 301~310.
- (9) Joshi, A. and Madhusudhan, B. S., 1991, "A Unified Approach to Free Vibration of Locally Damaged Beams Having Various Homogeneous Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 147, No. 3, pp. 475~488.
- (10) Rizos, P. F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A. D., 1990, "Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3, pp. 381~388.
- (11) Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S., 1990, "The Dynamic Behavior and Crack Detection of a Beam with a Crack," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 2, pp. 233~243.
- (12) Narkis, Y., 1994, "Identification of Crack Location in Vibration Simply Supported Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 4, pp. 549~558.
- (13) Ostachowicz, W. M. and Krawczuk, M., 1991, 1991, "Analysis of the Effect of Cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, No. 2, pp. 191~201.
- (14) ZHOU, J. K., 1986, "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits," Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese).
- (15) Malik, M. and Dang, H. H., 1998, "Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 96, pp 17~26.
- (16) CHEN, C. J. and WU, W. J., 1994, "Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System," *Computer and Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 631~639.
- (17) CHEN, C. K. and HO, S. H., 1999, "Transverse Vibration of a Rotating Twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 1339~1356.
- (18) HO, S. H. and CHEN, C. K., 1998, "Analysis of

- General Elastically End Restrained Non-Uniform Beams using Differential Transform," *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 22, pp. 219~234.
- (19) Shin, Y. C. and Shin, Y. J., 2001, "Longitudinal Vibration of Rods with Non-Uniform Cross-Section by Differential Transformation," *2001 Spring the Korea Society of Ocean Engineers Conference*, pp. 229~233.
- (20) Kwon, K. M., Shin, Y. J. and Lu, Y. S., 2001, "Vibration Analysis of Non-Uniform Beam by Differential Transformation," *2001 Fall The Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference*, pp. 617~621.
- (21) SHU, C., 2000, "Differential Quadrature and its Application in Engineering," Springer, Inc.
- (22) BELLMAN, R., KASHEF, B. G. and CASTI, J., 1972, "Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 40~52.
- (23) SHU, C. and DU, H., 1997, "Implementation of Clamped and Simply Supported Boundary Condition in the Generalized Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Beams and Plate," *International Journal of Solids Structure*, Vol. 34, No. 7, pp. 819~835.
- (24) SHU, C., 1996, "Free Vibration Analysis of Composite Laminated Conical Shells by Generalized Differential Quadrature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 4, pp. 587~604.
- (25) Seong, K. Y., 2001, "Natural frequencies of beam with open cracks on elastic foundations", The Degree of Master of Engineering, Thesis, University of Kyung-pook National University, Daegu, Korea.