

강인 포화 제어기의 LMI 최적 설계를 이용한 구조물의 능동 진동 제어

Active Vibration Control of Structure Using LMI Optimization Design of Robust Saturation Controller

임 채 욱[†] · 박 영 진^{*} · 문 석 준^{**}

Chae-Wook Lim, Youngjin Park and Seok-Jun Moon

(2005년 12월 30일 접수 : 2006년 2월 16일 심사완료)

Key Words : Suboptimal Bang-bang Controller(준최적 뱅뱅 제어기), Robust Saturation Controller(강인 포화 제어기), LMI Optimization Problem(LMI 최적화 문제), Control Performance(제어 성능)

ABSTRACT

In our previous paper, we developed a robust saturation controller for the linear time-invariant (LTI) system involving both actuator's saturation and structured real parameter uncertainties. This controller can only guarantee the closed-loop robust stability of the system in the presence of actuator's saturation. But we cannot analytically make any comment on control performance of this controller. In this paper, we suggest a method to use linear matrix inequality (LMI) optimization problem which can analytically explain control performance of this robust saturation controller only in nominal system. The availability of design method using LMI optimization problem for this robust saturation controller is verified through a numerical example for the building with an active mass damper (AMD) system.

1. 서 론

기계공학, 항공우주공학, 화학공학 등의 분야에서와 같이 토목 및 건축 구조물의 능동 제어에서도 제어입력의 포화 및 파라미터 불확실성 모두를 고려하는 강인 포화 제어 방법이 필요하다. 토목 및 건축 구조물은 대형 구조물이므로 상응하는 능동 장치는 매우 큰 제어력이 요구된다. 요구되는 능동 제어력은 종종 비현실적이어서 구현되기 어려운 경우가 많다. 또한 대부분의 설계 대상 지진은 약진이나 중진이지만,

기대치 않게 큰 강진이 종종 발생한다. 강진의 지반 가속도는 약진이나 중진의 지반 가속도보다 훨씬 크다. 이와 같은 이유로 인해 제어입력의 포화는 토목 및 건축 구조물의 능동 진동 제어에 있어서 반드시 고려되어야 한다⁽¹⁾. 또한 제어 대상 구조물의 강성, 질량, 감쇠 등의 물리적인 파라미터들의 값들은 제어기의 설계 시에 반드시 고려되어야 한다. 건물의 고층화 및 교량의 장대화로 인해 이들의 수학적 모델에서의 질량과 강성 등의 물리적인 파라미터 값들을 정확히 알기가 어려워진다. 이로 인해 제어기의 설계 시에 가정한 수학적 모델과 실제 구조물과는 모델링 오차가 생기게 되고 이때의 오차는 불확실성으로 제어기의 설계 시에 실제적으로 고려되어야 한다⁽²⁾. 그러므로 계의 파라미터 불확실성과 제어입력의 포화를 동시에 고려한 강인 포화 제어 방법이 필요하다. 제어입력의 포화를 고려한 제어 방법 중 가장 대표

[†] 책임저자; 정회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : chwlim@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3076, Fax : (042) 869-8220
^{*} 정회원, 한국과학기술원 기계공학과
^{**} 정회원, 한국기계연구원

적인 방법이 잘 알려진 최적 뱅뱅 제어기(optimal bang-bang controller⁽³⁻⁵⁾)이다. 이 방법은 제어입력이 계의 상태 함수로 표현되지 않기 때문에 실제 적용하기에 어려운 단점이 있다. 이의 단점을 해결하기 위하여 준최적 뱅뱅 제어기(suboptimal bang-bang controller⁽⁶⁾)가 제안되었다. 이 방법은 제어력이 계의 상태 함수로 표현되어 실제 적용하기에 유용한 장점을 가진다. 더 나아가 사각파 형태의 제어력을 내는 뱅뱅 제어의 적용 시에 계의 상태 공간의 원점 근처에서 발생하는 제어 채터링 문제를 해결하기 위하여 사각파의 파형을 유연한 형태의 파형으로 수정하는 수정된 뱅뱅 제어기(modified bang-bang controller^(6,7))가 제안되었다. 앞의 포화 제어 방법들은 단지 공칭계에 대하여 안정성이 보장되고, 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인성에 대하여 해석적으로 어떠한 설명도 할 수 없다. 포화 제어의 강인 안정성을 설명하기 위하여 슬라이딩 모드 제어기(sliding mode controller)의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성을 이용하고자 하는 시도가 있었다⁽⁷⁻⁹⁾. 그러나 이 방법들은 계의 응답의 전체 구간에서의 강인성을 해석적으로 보장하지 못한다.

저자들의 이전 연구에서는 기존의 공칭 선형 시불변계에 대한 준최적 뱅뱅 제어기 설계 방법의 원리를 제어입력의 포화와 구조적 파라미터 불확실성(structured real parameter uncertainty)이 동시에 존재하는 선형 시불변계로 확장하여 강인 안정성이 보장되는 강인 포화 제어기(robust saturation controller)를 해석적으로 다루었고^(10,11), 또한 이 제어기의 강인 안정성을 실험적으로 검증하였다⁽¹²⁾. 이 강인 포화 제어기는 유사 이차 안정성(affine quadratic stability)의 정의와 멀티 볼록폴(multi-convexity)의 개념⁽¹³⁾에 기초를 두어 설계되어졌고, 이 제어기에 대한 LMI 형태의 충분조건들을 제시하였다. 그러나 이 제어기는 제어 성능 면에서는 해석적으로 어떠한 설명도 할 수 없다. 어떠한 경우에는 고려된 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 강인 안정성이 만족되는 제어기의 해가 구해진다 할지라도, 이 해를 이용한 제어기의 제어 성능은 공칭계에서조차도 나쁠 수 있다. 여러 경우의 수치실험을 통하여 능동 질량 감쇠기(AMD; active mass damper)가 설치된 건물은 이와 같은 경우에 해당됨을 확인할 수 있었다. AMD는 건물의 능동 제어에 널리 사용되고 있는 능동 장치

중 하나이다⁽¹⁴⁾. 이처럼 강인 제어 이론에서 강인 안정성 뿐만 아니라 제어 성능도 함께 설명할 수 있는 제어기 설계 방법이 필요하다.

이 논문에서는 이전 연구에서 개발된 강인 포화 제어기의 제어 성능을 해석적으로 설명할 수 있는 제어 방법을 제시하고자 한다. 이 방법은 LMI 최적화 문제⁽¹⁵⁾를 이용한 것으로 공칭계에서의 제어 성능만을 해석적으로 설명할 수 있다. AMD가 설치된 건물에 대한 수치적 예를 통하여 이 LMI 최적화 문제를 이용한 강인 포화 제어기의 설계 방법의 유용성을 검증한다.

2. 준최적 뱅뱅 제어기⁽⁶⁾

먼저 식 (1)의 공칭 선형 시불변계에 대하여 Laypunov 안정성 조건을 이용하여 설계되는 준최적 뱅뱅 제어기를 살펴보자.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

여기서 A_0 는 $n \times n$ 크기의 공칭 시스템 행렬, B 는 $n \times 1$ 크기의 제어입력 벡터, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는 $n \times 1$ 크기를 가지는 상태 벡터이고, 제어입력 $u(t)$ 의 최대값은 u_{\max} 로 식 (2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

$$|u(t)| \leq u_{\max} \quad (2)$$

계의 상태에 대한 2차 함수의 형태인 Lyapunov 함수를 고정한 하나의 값을 가지도록 식 (3)과 같이 정의한다.

$$V(x(t)) = x^T(t)P_n x(t) \quad (3)$$

여기서 P_n 는 양정대칭행렬이다.

식 (4)의 준최적 뱅뱅 제어기는 제어입력 제한조건 하에서 모든 초기치 x_0 에 대하여 $V(x(t)) > 0$ 이고 $dV(x(t))/dt < 0$ 를 만족한다.

$$u(t) = -\text{sign}[B^T P_n x(t)] \quad (4)$$

여기에서 행렬 P_n 은 양정대칭인 가중행렬 Q 를 도입하여 식 (5)의 Lyapunov 행렬 등식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$A_0^T P_n + P_n A_0 + Q = 0 \quad (5)$$

시하고 있다.

3. 강인 포화 제어기^(10,11)

다음으로 불확실한 선형 시불변계에 대하여 여러 Laypunov 강인 안정성 중 유사 이차 안정성(affine quadratic stability)의 정의와 멀티 블록꼴(multi-convexity)⁽¹³⁾의 개념을 이용하여 설계되어진 강인 포화 제어기를 살펴보자. 여기에서는 불확실한 선형 시불변계를 식(6)과 같이 시불변 불확실성 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (6)$$

여기서 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in R^k$ 는 시불변 불확실성 파라미터들의 벡터로 각각의 파라미터들 $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ 는 각각의 끝점값들 사이에 있고, $A(\theta)$ 는 $n \times n$ 크기의 불확실한 시불변 시스템 행렬, B 는 $n \times 1$ 크기의 제어입력 벡터, 제어입력 $u(t)$ 의 최대값은 u_{\max} 로 식(2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

불확실한 시스템 행렬 $A(\theta)$ 는 식(7)과 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현된 구조적 파라미터 불확실성을 갖는 시스템이다.

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \theta_k A_k \quad (7)$$

여기서 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ 는 고정된 값으로 이미 알고 있는 행렬들이다.

Lyapunov 함수를 정의함에 있어서도 불확실한 시스템 행렬 $A(\theta)$ 와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$V(x(t), \theta) = x^T(t)P(\theta)x(t) \quad (8)$$

$$P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k \quad (9)$$

식(6)의 시불변 불확실성을 가지는 선형계가 식(2)의 제어입력 제한조건 하에서 모든 가능한 불확실한 파라미터들의 상하한 내에서와 모든 초기치 x_0 에 대하여 $V(x(t), \theta) > 0$ 이고 $dV(x(t), \theta)/dt < 0$ 를 만족하는 식(8)로 정의되는 Lyapunov 함수와 제어입력 $u(t)$ 가 존재하면 계의 강인 안정성은 보장되는데, Theorem 1은 강인 안정성을 만족하는 제어기를 제

Theorem 1

식(6)의 불확실한 시불변 선형계에 대하여, 만약 식(10)~(12)를 모두 만족하는 $k+1$ 개의 대칭행렬 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 양정대칭행렬 M_a 가 존재하고, 이에서 구해진 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 M_a 에 대하여 식(13)을 만족하는 양의 값 δ 가 존재한다면, 이 불확실한 시불변 선형계는 식(14)의 포화 제어기에 의해서 강인 안정성이 보장된다.

$$A(\omega)^T P(\omega) + P(\omega)A(\omega) + M_a < 0 \quad (10)$$

for all $\omega \in \Theta$

$$P(\omega) > 0 \text{ for all } \omega \in \Theta \quad (11)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, k \quad (12)$$

$$M_a + \delta \{ 2P_0 B B^T P_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i (P_0 B B^T P_i + P_i B B^T P_0) \} > 0 \quad (13)$$

for all $\omega \in \Theta$

$$u(t) = -\text{sat}[\delta B^T P_\theta x(t)], \delta \leq \delta_{\max} \quad (14)$$

Theorem 1에서 M_a 는 제어기 설계 파라미터이고, Θ 는 다음의 식(15)의 불확실성 파라미터 상자의 2^k 개의 정점들의 집합이다.

$$\Theta := \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (15)$$

4. 강인 포화 제어기의 LMI 최적화 문제

Theorem 1의 강인 포화 제어기에서 구해야 하는 해는 유일한 해가 아니다. 즉 식(10)~(12)의 LMI 충분조건들을 만족하는 해는 무수히 많이 존재한다. 그러므로 구해진 해가 어떤 경우에는 설계자가 원하지 않는 해일 수도 있게 된다. 예를 들어, LMI 충분조건들을 만족하는 해는 구해졌지만 그 해를 이용하여 설계한 제어기의 제어 성능이 너무 좋지 않아 사용하기에 유용치 못한 경우가 생길 수도 있다. 왜냐하면 Theorem 1의 강인 포화 제어기는 단지 주어진 파라미터의 불확실성 내에서 강인 안정성만을 해석적으로 보장해 주는 것이지 제어 성능 면에서는 해석

적으로 어떠한 설명도 할 수 없기 때문이다. 따라서 존재하는 무수히 많은 해 중에서 제어기 설계자가 원하는 어떤 조건을 만족하는 해를 얻을 수만 있으면 이와 같은 문제는 해결될 수 있다. 다행히도 LMI를 푸는 문제는 최적화 문제의 형태로 풀 수 있으므로⁽¹⁵⁾, 해를 구할 때 최적화 조건을 줄 수만 있다면 위의 문제를 해결할 수 있다. 이 장에서는 Theorem 1의 강인 포화 제어기의 제어 성능을 해석적으로 설명하기 위하여 이를 LMI 최적화 문제로 푸는 방법을 제시한다.

4.1 Lyapunov 행렬 등식과 LMI 최적화 문제

먼저 Lyapunov 행렬 등식과 LMI 최적화 문제와의 관계에 대하여 살펴보고자 한다. 2장에서 다룬 것처럼 식 (4)의 준최적 뱁뱁 제어기는 Lyapunov 행렬 등식의 해를 이용하여 설계하게 된다. 또한 식 (14)의 강인 포화 제어기를 불확실성이 없는 공칭계에 적용했을 때는 Lyapunov 행렬 부등식의 해를 구하는 것과 동일해진다. 그러므로 Lyapunov 행렬 등식과 LMI 최적화 문제와의 관계는 공칭계에서의 강인 포화 제어기를 설명하기 위한 것이다. 이를 위해 식 (5)의 Lyapunov 행렬 등식과 다음의 식 (16)의 Lyapunov 행렬 부등식과의 관계를 알아보자.

$$A_0^T P_I + P_I A_0 + Q < 0 \quad (16)$$

안정한 행렬 A_0 에 대하여 Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 P_n 은 유일한 해를 가지지만, Lyapunov 행렬 부등식을 만족하는 해인 행렬 P_I 는 무수히 많이 존재한다. Lyapunov 행렬 부등식을 다루기 전에 먼저 Lyapunov 행렬 등식이 의미하는 물리적인 의미를 살펴보고자 하자. 식 (17)의 계가 주어졌을 때 식 (18)의 성능 지수의 값을 구하는 문제를 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (17)$$

$$V_L = \int_0^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt \quad (18)$$

이때 성능 지수의 값은 $V_L = \text{tr}(P_n x_0 x_0^T)$ 로, Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 P_n 으로 표현된다⁽¹⁶⁾. 여기서 tr 은 *trace* 함수로 행렬의 대각 요소의 합을 말한다. 진동계의 경우 계의 질량 행렬(M_i)과 강성 행렬(K_i)을 이용하여 행렬 $Q = \text{diag}(K_i/2, M_i/2)$ 로

두면, 식 (18)의 성능 지수는 전 시간에서의 진동 에너지의 총합을 의미하고 Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 P_n 을 구함으로써 이의 값을 얻을 수 있음을 말해준다. 이를 바탕으로 식 (16)의 Lyapunov 행렬 부등식을 식 (19)의 LMI 최적화 문제를 이용하여 푸는 것을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \min_{P_I} \quad & \text{tr}(P_I x_0 x_0^T) \\ \text{subject to} \quad & A_0^T P_I + P_I A_0 + Q < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)의 LMI 최적화 문제에 의해서 구해진 최적 해인 행렬 P_I 는 Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 보다 항상 크므로($P_n < P_I$), 식 (19)에서 최소화된 목적 함수 $\text{tr}(P_I x_0 x_0^T)$ 의 값은 $\text{tr}(P_n x_0 x_0^T)$ 의 값보다 항상 크다. 그러나 식 (19)의 LMI 최적화 문제의 최적 해인 행렬 P_I 는 Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 P_n 으로 매우 가까이 근접할 수 있으므로, 식 (19)에서 최소화된 목적 함수 $\text{tr}(P_I x_0 x_0^T)$ 의 값과 $\text{tr}(P_n x_0 x_0^T)$ 의 값의 차이는 매우 작아진다. 그러므로 식 (19)의 LMI 최적화 문제로 구해진 최적해인 행렬 P_I 는 Lyapunov 행렬 등식의 해인 행렬 P_n 과 매우 근사한 값을 가지게 되므로, 식 (19)의 Lyapunov 행렬 부등식에서의 행렬 Q 의 물리적인 의미는 식 (5)의 Lyapunov 행렬 등식에서의 행렬 Q 와 같아진다.

4.2 강인 포화 제어기와 LMI 최적화 문제

여기에서는 Theorem 1의 강인 포화 제어기를 LMI 최적화 문제를 이용하여 푸는 것을 다룬다. 앞의 공칭계에서의 Lyapunov 행렬 부등식의 LMI 최적화 문제를 바탕으로, 불확실성이 있는 계의 공칭계에서의 제어 성능을 해석적으로 설명하기 위하여 최소화하고자 하는 목적 함수를 $\text{tr}(P_0 x_c x_c^T)$ 로 둔다. 여기서 x_c 는 물리적으로 계의 초기조건을 의미하는 것으로 설계자가 임의로 지정해 주어야 하는 또 다른 제어기 설계 파라미터이다. 왜냐하면 목적 함수 $\text{tr}(P_0 x_c x_c^T)$ 의 최소치를 수치적으로 구하기 위해서는 x_c 의 값을 미리 지정해야 LMI 최적화 문제를 풀 수 있기 때문이다. Theorem 1에서 $k+1$ 개의 대칭행렬 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 의 해는 식 (10)~(12)를 만족하는 해이다. 따라서 여기에서는 식 (14)의 강인 포화 제어기의 해를 구할 때 다음의 식 (20)의 LMI 최적화

문제를 이용하여 $k+1$ 개의 대칭행렬 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 를 구하는 것을 고려한다.

$$\begin{aligned} & \min_{P_0, P_1, P_2, \dots, P_k} \text{tr}(P_0 x_c x_c^T) \\ & \text{subject to (10), (11), and (12)} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 LMI 최적화 문제를 이용하여 해를 구하게 되면 Theorem 1에서 제시된 강인 포화 제어기의 공칭계에서의 제어 성능을 설명할 수 있고, 또한 제어기 설계 파라미터 행렬 M_a 의 물리적인 의미를 말할 수 있게 된다. 식 (20)은 불확실성이 없는 공칭계에서는 식 (21)과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} & \min_{P_0} \text{tr}(P_0 x_c x_c^T) \\ & \text{subject to } A_0^T P_0 + P_0 A_0 + M_a < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)을 식 (19)와 비교해 보면 행렬 M_a 와 행렬 Q 의 연관성을 알 수 있다. 그러므로 식 (20)의 LMI 최적화 문제에서의 제어기 설계 파라미터 행렬 M_a 는 공칭계에서는 Lyapunov 행렬 등식에서의 행렬 Q 와 같은 물리적인 의미를 가진다. 그러므로 행렬 $M_a = Q$ 로 두었을 때 행렬 P_0 가 행렬 P_n 에 가까이 접근할수록 강인 포화 제어기의 공칭계에서의 제어 성능은 좋아진다. 왜냐하면 행렬 P_n 은 공칭계에서의 최적해이기 때문이다. 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 이용하여 해를 구하게 되면 불확실성의 상하한이 커질수록 행렬 P_0 는 행렬 P_n 과 점점 멀어지게 되지만, 고려된 불확실성 내에서는 행렬 P_n 에 가장 가까운 행렬 P_0 를 구하기 때문에 공칭계에서의 제어 성능을 최대한 보장해 준다. 본 논문에서 행렬 P_0 가 행렬 P_n 과 어느 정도 가까운 가를 수치적인 값으로 나타내기 위하여 식 (22)의 정규 2-놈 지수(normalized 2-norm index) NI 를 정의한다.

$$NI = \|P_0 - P_n\|_2 / \|P_n\|_2 \quad (22)$$

식 (22)에서 NI 의 값이 작을수록 행렬 P_0 가 행렬 P_n 에 가까워짐을 의미한다.

5. 수치 예제

수치 예제로 Fig. 1과 같이 1층 건물에 AMD가 설

치된 경우를 다룬다. AMD는 건물의 능동 제어에 널리 사용되고 있는 능동 장치 중 하나이다⁽¹⁴⁾. 여기에서는 AMD가 설치된 1층 건물에 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 이용하여 Theorem 1에서 제시된 강인 포화 제어기를 설계하여 적용하면, 공칭계에서의 제어 성능 면에서 매우 유용함을 보이고자 한다. 공칭계에서의 각 파라미터들은 참고문헌 (17)에서 제시된 값을 사용하였다. 고려된 건물은 현존하는 일본의 Nagasaki에 있는 100 m 높이의 Huis Ten Bosch 건물의 1차 모드만을 고려한 것이다. 건물의 1차 모드의 고유 진동수 $f_s = 0.625$ Hz, 감쇠비 $\zeta_s = 1\%$ 로, 이에 대한 모드 질량 $m_s = 698,950$ kg, 강성 $k_s = 1.0779e7$ N/m, 감쇠 $c_s = 5.4896e4$ Ns/m 이다. AMD의 질량 $m_a = 6,989.5$ kg, 강성 $k_a = 2.4253e5$ N/m, 감쇠 $c_a = 1.6469e4$ Ns/m 로, AMD의 질량은 건물 질량의 1%, 고유 진동수는 건물의 고유 진동수의 1.5배($f_a = 1.5f_s$), 감쇠비 $\zeta_a = 20\%$ 인 경우를 고려하였다. 최대 제어력 $u_{max} = 50$ kN 인 경우를 고려한다. 외력으로는 지반에 지진입력 x_g 가 들어오는 경우로 El Centro 지진(NS, 1940)을 고려하였다. 건물의 강성에 불확실성(θ_s)이 있는 경우를 고려하면 불확실성을 가지는 건물의 강성은 $k_s(1 + \theta_s)$ 로 들 수 있고, 계의 운동 방정식은 식 (23)과 같다.

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + Bu(t) + Ex_g \quad (23)$$

x_s 는 지반에 대한 건물의 상대 변위로, x_a 는 지반에 대한 가동 질량의 상대 변위로 두면, 상태 벡터 $x = [x_s, x_a, \dot{x}_s, \dot{x}_a]^T$, $A(\theta)$ 는 식 (24)와 같고, 제어입력 벡터 $B = [0 \ 0 \ 1/m_s \ -1/m_a]^T$, 가진입력 벡터 $E = [0 \ 0 \ -1 \ -1]^T$ 이다.

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 \quad (24)$$

여기서

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s + k_a}{m_s} & \frac{k_a}{m_s} & -\frac{c_s + c_a}{m_s} & \frac{c_a}{m_s} \\ \frac{k_a}{m_a} & -\frac{k_a}{m_a} & \frac{c_a}{m_a} & -\frac{c_a}{m_a} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \theta_1 = \theta_s \text{이다.}$$

강성의 불확실성의 상하한은 $|\theta_s| \leq \theta_e$ 로 주어진 경우를 살펴보았는데, 제어기의 해는 상용 프로그램인 MATLAB®에서 제공하는 LMI control toolbox⁽¹⁸⁾를 사용하여 구하였다. 식 (25)의 계의 강성행렬 K_t 와 계의 질량행렬 M_t 를 이용하여 제어기 설계 파라미터 $M_a = \text{diag}(K_t/2, M_t/2)$ 로 두었다. 이는 앞에서 언급한 대로 식 (18)의 성능 지수가 공칭계에서의 건물과 AMD의 총 진동 에너지와 관련되도록 표현하기 위한 것이다. 또한 여러 시행착오를 통하여 M_a 를 이와 같이 두면 제어기의 제어 성능이 좋아짐을 확인할 수 있었다. 그리고 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 적용할 때 $x_c = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ 로 두었다.

$$K_t = \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}, M_t = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \quad (25)$$

AMD가 설치된 건물의 경우 Theorem 1을 적용하여 해를 구할 때 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 사용하지 않으면 구해진 해는 제어 성능이 매우 좋지 않았고, 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 사용하면 좋은 제어 성능을 내는 해를 구할 수 있음을 여러 경우의 수치실험을 통하여 확인할 수 있었다. 여기에서는 제어 성능으로 건물의 최대변위를 비교한다.

먼저, 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 사용하지 않고 Theorem 1을 적용했을 때의 결과를 살펴보자. 불확

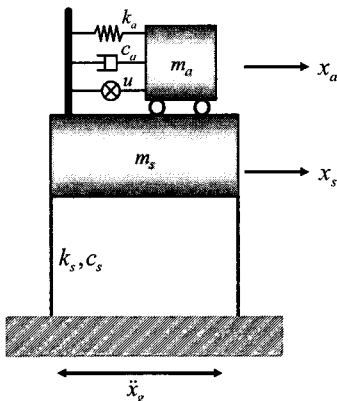


Fig. 1 One story building model with an AMD

실성의 상하한 $\theta_e = 0.1$ 로 주어진 경우에 구해진 해에 대한 $NI = 1.4848e1$ 이고 $\delta_{\max} = 6$ 이었다. 이를 적용했을 때 공칭계에서의 제어력과 건물 변위의 시간이력을 Fig. 2에서 보여 주고 있다. 제어를 하지 않았을 때의 건물 변위의 최대치는 17.77 cm 이었고, 제어를 했을 때의 건물 변위의 최대치는 17.76 cm 이었는데, 최대변위를 약 0.056% 밖에 줄일 수 없었다. 이처럼 제어 성능이 좋지 않은 이유는 제어력 파형을 보면 알 수 있는데, 제어력이 너무 작기 때문이다. 최대 제어력은 50kN 인데, 약 1kN의 제어력 만을 사용하였다. 불확실성의 상하한이 매우 작은 $\theta_e = 0.01$ 인 경우에도 이와 같이 제어 성능이 좋지 않은 해가 구해짐을 확인할 수 있었다.

다음으로 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 사용하여 Theorem 1을 적용했을 때의 결과를 살펴보자. 불확실성의 상하한 $\theta_e = 0.1$ 로 주어진 경우에 구해진 해에 대한 $NI = 1.8137e-1$ 이고 $\delta_{\max} = 4.0732e6$ 이었다. 앞의 경우와 비교할 때 NI 의 값은 매우 작아졌고 δ_{\max} 의 값은 매우 큼을 알 수 있다. 즉 LMI 최적화 문제를 이용하여 해를 구하면 NI 의 값을 작게 할 수 있고, δ_{\max} 의 값을 크게 할 수 있음을 알 수 있다. NI 의 값이 작아진다는 것은 행렬 P_0 가 행렬 P_n 에 가까워짐을 의미한다. Fig. 3은 이 제어기를 적용했을 때 공칭계에서의 제어력과 건물 변위의 시간이력을 보여 주고 있다. 제어를 했을 때의 건물 변위의 최대치는 14.05 cm 이었는데, 건물의 최대변위를 약 20.93%로 줄일 수 있었다. 제어력 파형을 보면 최대의 제어력까지 제어력을 사용함을 알 수 있다.

LMI 최적화 문제를 사용할 때 불확실성의 상하한과 NI 와 δ_{\max} 의 관계를 좀 더 살펴보자. Table 1은 불확실성의 상하한 θ_e 에 따른 NI 와 δ_{\max} 의 값을 보여 주고 있다. θ_e 가 커질수록 δ_{\max} 는 작아지고, NI 의 값은 커짐을 확인할 수 있다. 이는 불확실성의 상하한이 커질수록 제어기의 게인이 작아질 뿐만 아니라, 행렬 P_0 가 행렬 P_n 에서 멀어짐을 의미한다. 이로 인해 불확실성의 상하한이 커질수록 Fig. 4에와 같이 식 (14)의 포화 함수의 기울기는 작아져서 공칭계에서의 제어 성능은 떨어진다. 이와 같은 제어기의 특성은 이 예제에서도 확인할 수 있는데, 이는 공칭계에서 제어력의 파형의 변화를 가져온다. 이를 위해 각 파라미터 불확실성의 상하한에 따른 제어력 파형을 살펴보

았다. Fig. 5와 Table 2는 각각 $\theta_e = 0$, $\theta_e = 0.2$, $\theta_e = 0.4$, $\theta_e = 0.6$ 인 네 가지 경우에 대하여 공칭계에서

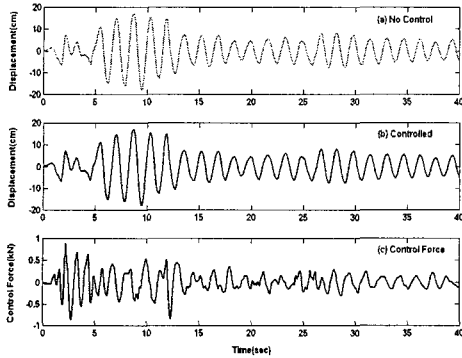


Fig. 2 Displacements without/with control and control force for nominal system applying robust saturation control not using LMI optimization problem

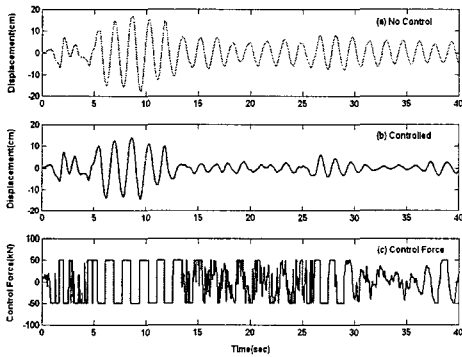


Fig. 3 Displacements without/with control and control force for nominal system applying robust saturation control using LMI optimization problem

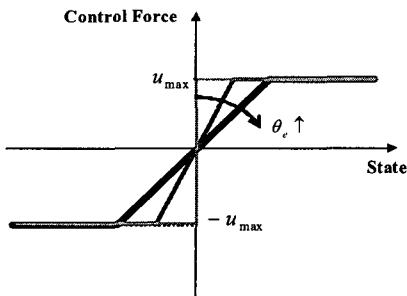


Fig. 4 The slopes of saturation function of the proposed robust saturation controller according to given bounds of parameter uncertainty

서 제어력 파형과 공칭계에서의 건물의 최대변위를 비교하여 보여주고 있다. 불확실성의 상하한이 커질수록 공칭계에서의 제어 성능은 약간 떨어짐을 확인할 수 있는데, 이는 제어기의 게인이 작아져서 제어력 파형이 사각파에서 멀어지기 때문임을 확인할 수 있다.

강인 포화 제어기가 공칭계에서 좋은 성능을 얻기 위해서는 행렬 P_{ii} 에 가까운 행렬 P_0 와 큰 값의 δ_{max}

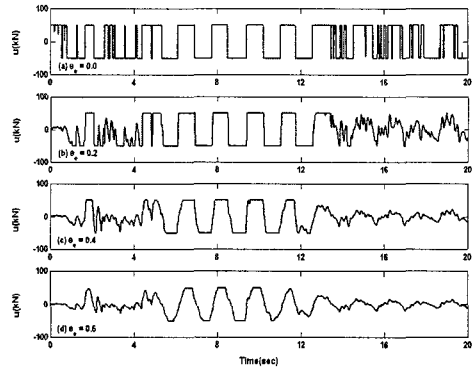


Fig. 5 Comparison of control forces of robust saturation control using LMI optimization problem for nominal system according to given bounds of parameter uncertainty

Table 1 Values of NI and δ_{max} according to θ_e

θ_e	NI	δ_{max}
0.01	2.3813e-2	7.5272e8
0.10	1.8137e-1	4.0732e6
0.20	3.1040e-1	7.0148e5
0.30	3.9930e-1	2.6896e5
0.40	5.0220e-1	1.6023e5
0.50	6.7847e-1	1.1491e5
0.60	9.7790e-1	9.0751e4
0.70	1.4570e+0	7.1516e4
0.80	2.4187e+0	5.3667e4
0.90	5.2720e+0	3.0835e4

Table 2 Maximum displacements of building for nominal system applying robust saturation controller using LMI optimization problem

	No Control	RSC ($\theta_e = 0$)	RSC ($\theta_e = 0.2$)	RSC ($\theta_e = 0.4$)	RSC ($\theta_e = 0.6$)
x_s (cm)	17.77	14.04	14.16	14.69	15.23

를 구할 수 있는 방법이 필요한데, 이 수치 예제에서는 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 사용하면 주어진 불확실성의 상하한 내에서 공칭계에서의 제어 성능을 최대화하는 제어 계인을 찾게 됨을 보여 준다.

6. 결 론

저자들의 이전 논문에서는 제어입력에 포화가 존재하는 선형 시불변계에 대하여 고려된 불확실한 파라미터의 상하한 내에서 강인 안정성이 항상 보장되는 강인 포화 제어기를 제안하였다. 이 논문에서는 이 제안된 강인 포화 제어기의 공칭계에서의 제어 성능을 해석적으로 설명하기 위하여 식 (20)의 LMI 최적화 문제를 제시하였다. 이 LMI 최적화 문제를 통하여 주어진 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 공칭계에서의 제어 성능을 최대화하는 강인 포화 제어기의 계인을 찾을 수 있음을 보였다. 또한 제시된 LMI 최적화 문제를 이용한 강인 포화 제어기의 설계 방법의 유용성을 AMD가 설치된 건물에 대한 수치적 예를 통하여 검증하였다. 제시된 LMI 최적화 문제를 이용하여 설계된 강인 포화 제어기는 공칭계에서의 제어 성능을 향상시킬 수 있음을 수치실험을 통하여 보였고, AMD가 설치된 건물의 능동 진동 제어에 효과적으로 적용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 “중소형 선박용 MD-ARS 설계 기술 개발” 과제, 국가지정연구사업(NRL: M1050000112-05J0000 -1121) 및 두뇌한국 사업(Brain Korea 21)의 지원으로 수행되었다.

참 고 문 헌

(1) Indrawan, B., Kobori, T., Sakamoto, M., Koshika, N. and Ohri, S., 1996, “Experimental Verification of Bounded-force Control Method”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, No. 2, pp. 179~193.

(2) Zhou, K. and Doyle, J.C., 1998, “Essentials of Robust Control”, Prentice-Hall, Inc.

(3) Wonham, W.M. and Johnson, C.D., 1964,

“Optimal Bang-bang Control with Quadratic Performance index”, *Transactions on ASME, Ser. D*, Vol. 86, pp. 107~115.

(4) Friendland, B., 1971, “Limiting Forms of Optimum Stochastic Linear Regulators”, *Journal of Dynamic Systems Measurement Control*, *Transactions on ASME, Ser. G*, Vol. 93, No. 3, pp. 135 ~ 141.

(5) Meirovitch, L., 1990, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York.

(6) Wu, Z. and Soong, T.T., 1996, “Modified Bang-bang Control Law for Structural Control Implementation”, *Journal Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, pp. 771~777.

(7) Cai, G.P., Huang, J.Z., Sun, F. and Wang, C., 2000, “Modified Sliding-mode Bang-bang Control for Seismically Excited Linear Structures”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, pp. 1647~1657.

(8) Yang, J.N., Wu, J.C. and Agrawal, A.K., 1995, “Sliding Mode Control for Nonlinear and Hysteretic Structures”, *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 12, pp. 1330~1339.

(9) Yang, J.N., Wu, J.C. and Agrawal, A.K., 1995, “Sliding Mode Control for Seismically Linear Structures”, *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 12, pp. 1386~1390.

(10) Lim, C.W., Park, Y.J. and Moon, S.J., “Robust Saturation Controller for Linear Time-invariant System with Structured Real Parameter Uncertainties”, *Journal of Sound and Vibration*, (accepted on 15 October 2005).

(11) Lim, C.W., Moon, S.J., Park, Y.J. and Park, Y.S., 2005, “A Robust Saturation Controller Design Method Considering Structured Real Parameter Uncertainties”, 2nd ANCRISST Workshop on Advanced Smart Material and Structures Technology, Gyeong-ju, Korea, July 21 ~24. pp. 367~378.

(12) Lim, C.W., Moon, S.J., Park, Y.J. and Park, Y.S., 2006, “Experimental Study on Stability of Robust Saturation Controller”, *Transactions of*

the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 2, pp.207~213.

(13) Gahinet, P., Apkarian, P. and Chilali, M., 1996, "Affine Parameter-dependent Lyapunov Functions and Real Parameter Uncertainty", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.41, No.3, pp.436~442.

(14) Soong, T. T., 1990, "Active Structural Control : Theory and Practice", Longman Scientific & Technical.

(15) Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V., 1994, "Linear Matrix Inequalities

in System and Control Theory", SIAM, Philadelphia.

(16) Dorato, P., Abdallah, C. and Cerone, V., 1995, "Linear Quadratic Control : an introduction", Prentice Hall, Inc.

(17) Adhikari, R. and Sato, S., 1997, "Sliding Mode Control of Building with ATMD", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 26, pp.409~422.

(18) Gahinet, P. and Nemirovski, A., 1995, "The LMI control toolbox", The MathWorks Inc.