

# 접동 추정 프로세스를 이용한 불확실 시스템에 대한 강인 칼만 필터링 기법

## Robust Kalman Filtering with Perturbation Estimation Process for Uncertain Systems

권 상 주\*  
(SangJoo Kwon)

**Abstract :** A robust Kalman filtering method for uncertain stochastic systems is suggested by adopting a perturbation estimation process which is to reconstruct total uncertainty with respect to the nominal state transition equation. The predictor and corrector of discrete Kalman filter are reformulated with the perturbation estimator. Successively, the state and perturbation estimation error dynamics and the corresponding error covariance propagation equations are derived as well. Finally we have the recursive algorithm of Combined Kalman Filter-Perturbation Estimator (CKF). The proposed combined Kalman filter-perturbation estimator has the property of integrating innovations and the adaptation capability to system uncertainties. A numerical example is shown to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords :** robust Kalman filter, perturbation estimator, discrete-time system

### I. 서론

칼만필터는 제어시스템 설계, 파라미터 식별, 고장진단, 유도항법, 이동로봇 위치추정 등과 같은 다양한 응용 분야에서 광범위하게 적용되고 있다. 프로세스 잡음과 측정 잡음에 대한 백색 가우시안(white Gaussian) 통계치가 주어질 때, 칼만필터는 상태추정 오차의 분산(variance)을 최소화하는 최선의 선형 추정치(best linear estimates)를 산출한다[1,2]. 그러나 칼만필터의 수학적 최적성과 보장된 안정성 여유(stability margin)는 완전한 시스템 모델과 백색 잡음의 가정 하에서만 유효하다. 사실, 대부분의 물리적 시스템에서 모델 파라미터의 불확실성은 존재하기 마련이며 외란 및 측정 잡음을 포함하는 랜덤 노이즈는 0-평균 백색 잡음이라기 보다 바이어스(bias) 값을 포함하는 편향된 잡음(colored noise) 형태를 갖는다. 비록 실제 문제에서 칼만필터의 수학적 최적성은 유지되지 않지만, 많은 응용 분야에서 칼만필터는 실제로 잘 작동한다. 이것은 확정(deterministic) 시스템에 대한 다른 상태 추정기들과 마찬가지로, 칼만필터의 이노베이션(innovation) 피드백 프로세스가 추정오차를 작은 값으로 수렴시키는 것을 근본적으로 가능케 하기 때문이다.

사실 칼만필터의 이노베이션 피드백 프로세스는 필터링 오차 또는 추정오차에 대한 비례제어적인 성격을 갖는다. 제어 관점에서 본다면, 특히 시스템 모델 인자(parameter)에 대한 식별이 부정확하거나 시스템이 심한 접동(perturbation)을 받는 경우, 이노베이션 피드백 만으로는 우수한 필터링 성능을 기대하기에 충분치 않다. 한 예로 프로세스 잡음이 바이어스 값을 갖는 경우, 표준 칼만필터는 바이어스된 출력값을 나타낸다. 따라서 칼만 필터링에 의해 보다 신뢰성 있는 추

정치를 얻기 위해서는 표준적 칼만 필터링 프레임에 시스템의 불확실성을 보상할 수 있는 추가적인 함수를 도입하는 것이 필요하다는 결론을 얻을 수 있다.

사실 편향된 잡음이나 랜덤 바이어스 입력은 백색화 함수(whitening function)를 이용하는 상태변수 첨가 기법(state augmentation technique)[2]을 통해 표준 칼만필터 프레임 내에서도 적절히 처리될 수 있다. 그러나 칼만필터와 같이 모델에 기반한 필터링 문제에서는 실제 시스템에서 일어나는 물리적 현상들을 플랜트 모델에 얼마나 잘 모사해서 반영하느냐에 따라 필터링 성능은 크게 달라지게 된다. 이 문제와 관련하여 시스템 불확실성의 영향을 고려한 다수의강인 칼만필터들이 제안되었다[3-9]. 이들을 다시 분류해 보면, 제한된 놈(bounded norm)을 갖는 불확실성에 대하여 제한된 크기의 추정 오차를 보장하는 필터[3-6], 곱셈형 모델링 오차에 대하여 추정오차의 크기가 제한되는 필터[7], 파라미터 불확실성을 갖는 시변(time-varying) 시스템에 대한 결과[8], 그리고 시간지연 시스템에 대한 결과[9] 등을 포함한다. 또한 확정(deterministic) 시스템에 대한강인 추정 문제에 대한 결과로는, 불확실한 입력에 대하여 상태추정기를 비연성(decoupling)시키는 변환 방법[10,11], 파라미터 접동을 갖는 선형시스템에 대하여 상태추정기의 리아프노프(Lyapunov) 안정성을 보장하는 비선형 함수[12] 등이 제시되었다.

한편, 위의 방법들은 시스템의 불확실성을 어떤 형태로 가정하느냐에 따라 상태추정 필터의 형태가 달라지게 되며, 시스템의 거동 및 프로세스 잡음에 대한 정보가 부분적일 경우에 시스템의 불확실성에 대한 적절한 수학 모델을 유도해야 하는 단점을 지닌다. 이 논문에서는 기존 칼만필터와 같이 시스템 잡음에 대한 가우시안 통계치만을 바탕으로 실제 구현하기에 매우 유리한 형태의 실용적인강인 칼만필터를 제안한다. 그 핵심은 접동추정기[13]를 표준 칼만필터 프레임 내에 도입하는 것이다. 여기서 접동추정기는 공칭 시스템에 대한 불확실성을 실시간으로 추정하며 결과적으로 모델의

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 11. 10., 채택확정 : 2006. 1. 10.

권상주 : 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부(sjkwon@hau.ac.kr)

※ 이 논문은 2005년도 한국항공대학교 교비지원 연구비에 의하여 지원된 연구의 결과임.

동역학과 실제 시스템 거동 사이의 차를 최소화시키는 방향으로 작동하게 된다. 이와 관련하여 우리는 이미 확정 시스템에 대하여 섭동추정기를 연합한 형태의 개인 상태추정기를 제안하였고 마찰력 보상 등에 매우 효과적임을 보였다[14,15]. 이 논문은 그 확률 시스템(stochastic system) 버전이라고 할 수 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서 공정 시스템의 역 모델에 기초한 섭동추정기를 간략히 유도한 후, 3장에서 섭동추정 프로세스에 기반한 개인 칼만필터로서 연합칼만필터(combined Kalman filter)를 제안한다. 여기서 예측자(predictor), 수정자(corrector), 및 섭동추정자(perturbation estimator)로 구성되는 순환 알고리즘과 칼만 개인을 개선하기 위해 요구되는 선추정치(prior estimates), 후추정치(posterior estimates), 및 섭동추정치(perturbation estimates)에 대한 공분산(covariance) 전파 방정식을 차례로 유도한다. 이어 4장에서는 수치예제를 보이며 5장에서 결론을 맺는다.

## II. 섭동 추정기

### 1. 시스템 모델

먼저 다음과 같은 샘플링 시간 동안의 상태 천이(state transition)를 나타내는 비선형 이산시간 시스템(discrete system) 모델을 고려한다.

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (1)$$

단,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  는 확률적(stochastic) 상태벡터,  $u_k \in \mathbb{R}^p$  는 확정적(deterministic) 제어입력,  $w_k \in \mathbb{R}^n$  는 랜덤 프로세스 잡음이다. 그리고 다음 측정 모델에서 측정 잡음은  $v_k \sim N(0, R_k)$  과 같이 백색 가우시안으로 가정한다.

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2)$$

한편, 비선형 시스템 (1), (2)에 대한 확장칼만필터(extended Kalman filter)를 구성하기 위해서는 다음과 같이 공정 궤적(nominal trajectory)  $(\bar{x}_k, \bar{u}_k, \bar{y}_k)$  을 따르는 선형모델이 필요하다.

$$\delta x_k = A_{k-1} \delta x_{k-1} + B_{k-1} \delta u_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.1)$$

$$\delta y_k = H_k \delta x_k + v_k \quad (3.2)$$

위에서 각 변분값들은  $\delta x_k \triangleq x_k - \bar{x}_k$ ,  $\delta u_k \triangleq u_k - \bar{u}_k$ ,  $\delta y_k \triangleq y_k - \bar{y}_k$  로 정의되며,  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  는 프로세스 잡음이 존재하지 않는 공정시스템  $\bar{x}_k = f(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})$ ,  $\bar{y}_k = h(\bar{x}_k)$  의 상태변수와 출력에 해당된다. (3)에서 각 자코비안(Jacobian)은 다음과 같이 정의되며 모든 공정 상태(nominal state)에서 계산되어야 한다.

$$A_k = \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{\substack{x=\bar{x}_k \\ u=\bar{u}_k}}, B_k = \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{\substack{x=\bar{x}_k \\ u=\bar{u}_k}}, H_k = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}_k} \quad (4)$$

### 2. 섭동 추정기(perturbation estimator)

이산 상태 방정식 (1)에서 시스템에 대한 섭동(perturbation), 즉 프로세스 잡음  $w_k$  는 공정 시스템  $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1})$  을 교란하는 모든 불확실성을 의미한다. 비록 칼만필터에서는 백

색 가우시안 잡음을 가정하고 있지만, 실제의 시스템 잡음은 백색 잡음 및 편향된 잡음을 포함하는 확률적 랜덤 오차뿐 아니라 시스템의 각 작동부(effectors) 및 환경으로부터 오는 확정적 랜덤 오차까지도 포함하게 된다. 여기서 섭동추정기는 공정모델을 이용함으로써 확정적 잡음의 크기를 간접적으로 추정하는 기능을 있다고 해석할 수 있다[13-15].

공정 시스템에 대한 섭동을 추정하기 위한 매우 단순하면서 효과적인 방법 중의 하나는 플랜트의 역 모델(inverse model)을 이용하는 것이다. 우선 (1)로부터 얻는 다음 식은 시간영역에서 시스템의 실제 섭동과 동가적인 표현이다.

$$w_{eq,k-1} = x_k - f(x_{k-1}, u_{k-1}) \quad (5)$$

그러면 현재 상태에서 추정할 수 있는 섭동의 양은

$$\hat{w}_k = w_{eq,k-1}(\hat{x}_k) = \hat{x}_k - f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (6)$$

와 같이 상태변수 정보를 이용하여 결정할 수 있다. 이와 같이 역 모델에 기반하여 시스템의 불확실성 추정 방법은 사실 매우 일반적인 범주에 속한다.

한편, 시스템 대역폭(bandwidth)을 넘는 고주파 성분에 의한 부정적 효과를 방지하기 위해서는 (6)에 저역통과필터 연산자  $\Pi$  를 적용시켜야 한다.

$$\hat{w}_k = \Pi \cdot w_{eq,k-1}(\hat{x}_k) = \Pi \cdot (\hat{x}_k - f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1})) \quad (7)$$

여기서 연산자  $\Pi$  는 여러 형태를 가질 수 있으나 알고리즘 설계를 단순화하기 위해서는 다음과 같이 1차 필터를 대각(diagonal) 성분으로 갖는 행렬을 사용하는 것이 바람직하다.

$$\Pi(z) = diag(\kappa_1(z), \kappa_2(z), \dots, \kappa_n(z)) \quad (8)$$

단, 여기서  $\kappa_i(z) = b_i / (1 - a_i z^{-1})$ ,  $(i=1, \dots, n)$ . 다시 (8)을 상태 공간(state-space)에서 확장하면 (7)은

$$\hat{w}_k = F \hat{w}_{k-1} + G(\hat{x}_k - f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1})) \quad (9)$$

와 같이 상태공간 식으로 구현될 수 있으며,  $F$  와  $G$  는 다음과 같이 대각행렬 형태를 갖는다.

$$F = diag(a_1, a_2, \dots, a_n), G = diag(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (10)$$

한편, 섭동추정기의 각 입력 채널에 대한 저역통과필터들은 단위 DC개인을 가져야 한다. 즉,  $\kappa_i(1) = 1$ ,  $(i=1, \dots, n)$ . 이에 따라  $a_i + b_i = 1$  이 되고  $F + G = I$  는 단위행렬이 된다. 예를 들어 각 필터의 절단주파수(cut-off frequency)가 감소하면 (즉,  $a_i \rightarrow 1, b_i \rightarrow 0$ ) 섭동추정기 (9)는 전혀 작동하지 않으며 따라서 출력값을 산출하지 않는다.

## III. 연합 칼만 필터

### 1. 예측자-수정자-섭동추정자

잘 알려진 바와 같이 이산 칼만필터(discrete Kalman filter)는 예측자(predictor)와 수정자(corrector)의 2단계 추정 프로세스를 갖는다. 그러나 이 논문에서 제시되는 연합칼만필터는 그림 1의 도식과 같이 예측자-수정자-섭동추정자의 3단계를 따른다.

첫째, 연합칼만필터에서 상태변수의 선추정(prior estimation)을 위한 예측자(predictor)는 시스템 모델 (1)에 의거하여 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}) + \hat{w}_{k-1} \quad (11)$$

위 식에서 보는 바와 같이 선추정값 계산을 위해서는 한 스텝 전의 후추정값( $\hat{x}_{k-1}^+$ )과 제어입력( $u_{k-1}$ ), 그리고 기존 칼만필터와 달리 섭동추정값( $\hat{w}_{k-1}$ )이 추가적으로 요구된다.

둘째, 후추정(posterior estimation)을 위한 수정자(corrector)는 이노베이션(즉, 측정치  $y_k$  와 예측된 측정치  $h(\hat{x}_k^-)$  사이의 오차)을 피드백하는 측정치 갱신(update) 프로세스로서 기존 칼만필터와 같이 다음 식으로 주어진다..

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h(\hat{x}_k^-)) \quad (12)$$

위 식에서 칼만 게인  $K$ 는 후추정 오차의 분산(variance)을 최소화하는 최적 기중치(optimal weighting)에 해당된다.

셋째, 연합칼만필터 내에서 (9)의 섭동추정자는 다음 형태로 주어진다.

$$\hat{w}_k = F\hat{w}_{k-1} + G(\hat{x}_k^+ - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1})) \quad (13)$$

여기서 후추정치가 사용된 이유는 측정치 갱신 후의 후추정치를 사용할 때 (5)의 등가 섭동이 실제 섭동과 보다 유사하게 되기 때문이다.

## 2. 추정 오차 방정식

연합칼만필터에 대한 칼만 게인과 오차 공분산(error covariance) 전파식들을 유도하기 위해서는 (11)-(13)에 대한 선형화된 근사식과 추정오차 방정식이 요구된다. 먼저, 선형 플랜트 모델 (3)에 의거하여 예측자, 수정자, 및 섭동추정자에 대한 선형 근사식은 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\delta\hat{x}_k^- = A_{k-1}\delta\hat{x}_{k-1}^+ + B_{k-1}\delta u_{k-1} + \hat{w}_{k-1} \quad (14)$$

$$\delta\hat{x}_k^+ = \delta\hat{x}_k^- + K_k (\delta y_k - H_k \delta\hat{x}_k^-) \quad (15)$$

$$\hat{w}_k = F\hat{w}_{k-1} + G(\delta\hat{x}_k^+ - A_{k-1}\delta\hat{x}_{k-1}^+ - B_{k-1}\delta u_{k-1}) \quad (16)$$

이제 (14)~(16)을 근거로 선형 추정오차 방정식을 유도한다. 우선 (3.1)의 양변에서 (14)의 양변을 빼면 선추정 오차 방정식은 다음과 같이 주어지고,

$$\delta\tilde{x}_k^- = A_{k-1}\delta\tilde{x}_{k-1}^+ + \hat{w}_{k-1} \quad (17)$$

(3.2)를 (15)에 대입한 후 양변을 각각  $\delta x_k$ 에서 빼면 후추정 오차 방정식:

$$\delta\tilde{x}_k^+ = (I - K_k H_k) \delta\tilde{x}_k^- - K_k v_k \quad (18)$$

이 유도된다. 위에서 선추정 및 후추정 오차는 각각  $\delta\tilde{x}_k^- \triangleq \delta x_k - \delta\tilde{x}_k^-$ ,  $\delta\tilde{x}_k^+ \triangleq \delta x_k - \delta\tilde{x}_k^+$  와 같이 정의된다.

계속해서 (14)를 (15)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있으며,

$$\delta\tilde{x}_k^+ = A_{k-1}\delta\tilde{x}_{k-1}^+ + B_{k-1}\delta u_{k-1} + \hat{w}_{k-1} + K_k (\delta y_k - H_k \delta\tilde{x}_k^-) \quad (19)$$

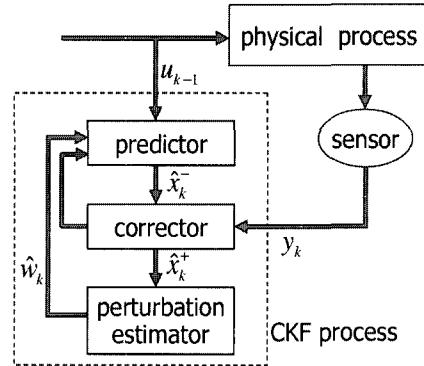


그림 1. 연합칼만필터.

Fig. 1. Combined kalman filter.

위 식에 (3.2)를 대입한 후 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$\delta\tilde{x}_k^+ - A_{k-1}\delta\tilde{x}_{k-1}^+ - B_{k-1}\delta u_{k-1} = \hat{w}_{k-1} + K_k (H_k \delta\tilde{x}_k^- + v_k) \quad (20)$$

위 식을 이용하고 (10)에서  $F + G = I$  임에 주목하면 결과적으로 (16)을 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= (F + G)\hat{w}_{k-1} + GK_k (H_k \delta\tilde{x}_k^- + v_k) \\ &= \hat{w}_{k-1} + GK_k (H_k \delta\tilde{x}_k^- + v_k) \end{aligned} \quad (21)$$

이제 (21)의 양변을  $w_k = w_{k-1} + \hat{w}_k - \hat{w}_{k-1} \triangleq w_{k-1} + \Delta w_k$  의 양변에서 각각 빼면 다음 섭동추정 오차 방정식이 결정된다.

$$\tilde{w}_k = \tilde{w}_{k-1} - GK_k (H_k \delta\tilde{x}_k^- + v_k) + \Delta w_k \quad (22)$$

여기서 (17), (18), 및 (22)는 연합칼만필터의 예측자 (11), 수정자 (12), 및 섭동추정자 (13)에 대한 근사화된 선형 추정오차 방정식으로서 비선형 모델 (1), (2) 대신 선형화된 모델의 궤적 (3), (4)를 따른다는 사실에 유념해야 한다.

## 3. 공분산(covariance) 전파방정식

우선 각 공분산을 다음과 같이 정의한다.

$$P_k^- \triangleq E[\delta\tilde{x}_k^- \delta\tilde{x}_k^{T-}] : \text{선추정 오차의 공분산.}$$

$$P_k^+ \triangleq E[\delta\tilde{x}_k^+ \delta\tilde{x}_k^{T+}] : \text{후추정 오차의 공분산.}$$

$$W_k \triangleq E[\tilde{w}_k \tilde{w}_k^T] : \text{섭동추정 오차의 공분산.}$$

$$X_k \triangleq E[\delta\tilde{x}_k^+ \tilde{w}_k^T] : \text{후추정 오차와 섭동추정 오차 간의 상호 공분산(cross covariance).}$$

선형추정이론에서의 직교 원리(orthogonality principle) 즉, “최적의 선형 추정치에 대한 추정오차는 측정치들로 구성되는 선형 벡터 공간(vector space)에 직교한다[1,2]”를 따르면 다음 식이 성립한다.

$$E[\delta\tilde{x}_k^+ \delta\tilde{y}_k^T] = 0 \quad (23)$$

여기서  $\delta\tilde{y}_k$ 는 예측된 측정 오차(predicted measurement error)로서 다음과 같이 표현되고

$$\begin{aligned} \delta\tilde{y}_k &= \delta y_k - \hat{y}_k = H_k \delta x_k + v_k - H_k \delta\tilde{x}_k^- \\ &= H_k \delta\tilde{x}_k^- + v_k \end{aligned} \quad (24)$$

따라서 (18)과 (24)를 이용하면 (23)으로부터 다음 식을 얻는다.

$$E\left[\{(I - K_k H_k)\delta \tilde{x}_k^- - K_k v_k\}\{H_k \delta \tilde{x}_k^- + v_k\}\right] = 0 \quad (25)$$

우선 상태변수와 측정잡음 사이의 비상관성(uncorrelatedness)을 고려하면서 위 식을 전개하면 표준 칼만필터의 경우와 동일한 형태로 다음 카인(Kalman gain) 방정식이 결정된다.

$$K_k = P_k^- H_k^T \left( H_k P_k^- H_k^T + R_k \right)^{-1} \quad (26)$$

이제, 상태변수, 시스템 잡음, 및 측정 잡음 사이의 상호 비상관성을 고려하면서 각 오차 공분산의 전파식(propagation equation)을 유도한다. 먼저 (17)을 선추정 오차 공분산의 정의에 대입하고 정리하면 다음 선추정 오차 공분산 전파식을 얻을 수 있고

$$P_k^- = A_{k-1} P_{k-1}^+ A_{k-1}^T + W_{k-1} + A_{k-1} X_{k-1} + X_{k-1}^T A_{k-1}^T \quad (27)$$

또한 (18)을 후추정 오차 공분산의 정의에 대입하여 전파식을 유도하고, 다시 (26)의 관계를 적용하여 단순화시키면, 다음 후추정 오차 공분산 전파식이 유도된다.

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (28)$$

한편, (27)에서 보는 바와 같이 선추정 오차 공분산을 계산하기 위해서는  $W_k$  와  $X_k$  값의 실시간 갱신이 요구된다. 이를 위하여 우선 (22)에서 샘플링 시간 동안의 시스템 잡음의 변화량  $\Delta w_k$  을 백색 가우시안으로 가정한다. 즉,

$$\Delta w_k \sim N(0, Q_k) \quad (29)$$

이것은 표준 칼만필터에서의 시스템 잡음에 대한 가정,  $w_k \sim N(0, Q_k)$  과는 차이가 있다. 그리고 (17)을 (18)과 (22)에 각각 대입하면 다음 두 식을 얻는다.

$$\delta \tilde{x}_k^+ = (I - K_k H_k) \left( A_{k-1} \delta \tilde{x}_{k-1}^+ + \tilde{w}_{k-1} \right) - K_k v_k \quad (30)$$

$$\tilde{w}_k = (I - G K_k H_k) \tilde{w}_{k-1} - G K_k H_k A_{k-1} \delta \tilde{x}_{k-1}^+ - G K_k v_k + \Delta w_k \quad (31)$$

위 식들을 앞서 정의한 각 공분산의 정의에 대입하고 상태 추정오차( $\delta \tilde{x}_{k-1}^+$ )와 시스템 잡음( $\Delta w_k$ ) 및 측정 잡음( $v_k$ )과의 비상관성 그리고 섭동추정오차( $\tilde{w}_{k-1}$ )와 시스템 잡음( $\Delta w_k$ ) 및 측정 잡음( $v_k$ )과의 비상관성을 각각 고려하면서 정리하면, 섭동 추정오차 공분산의 전파 방정식:

$$\begin{aligned} W_k &= (I - G K_k H_k) \left( W_{k-1} (I - G K_k H_k)^T - X_{k-1}^T (G K_k H_k A_{k-1})^T \right) \\ &\quad + G K_k H_k A_{k-1} \left( P_{k-1}^+ (G K_k H_k A_{k-1})^T - X_{k-1} (I - G K_k H_k)^T \right) \\ &\quad + G K_k R_k (G K_k)^T + Q_k \end{aligned} \quad (32)$$

및 다음 상호 공분산의 전파 방정식을 각각 유도할 수 있다.

$$X_k = (I - K_k H_k) (A_{k-1} X_{k-1} + W_{k-1}) (I - G K_k H_k)^T$$

$$\begin{aligned} &- (I - K_k H_k) (A_{k-1} P_{k-1}^+ + X_{k-1}^T) (G K_k H_k A_{k-1})^T \\ &+ K_k R_k (G K_k)^T \end{aligned} \quad (33)$$

#### 4. 연합칼만필터 순환 알고리즘

앞 절의 결과들은 표 1과 같은 순환(recursive) 알고리즘으로 정리할 수 있는데, 이것은 섭동추정 프로세스가 포함된 확장 칼만필터에 해당된다. 한편 각 공분산의 계산을 위하여 요구되는 자코비안들은 가장 최신의 상태변수를 사용함으로써 다음과 같이 매 샘플링 시간마다 갱신되어야 한다.

$$A_{k-1} = \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_{k-1}^+, u=u_{k-1}}, H_k = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_k^-} \quad (34)$$

연합칼만필터를 기존의 비선형 시스템에 대한 확장칼만필터와 비교해 보면, 섭동추정 프로세스 (13)이 침가됨으로써 예측자 (11)과 선추정 오차 공분산 전파식 (27)이 수정되었으며 공분산 전파식 (32), (33)은 새롭게 산출된 결과들이다.

표 1에서 연합칼만필터의 성능 조정 인자(tuning parameters)는 프로세스 잡음에 대한 공분산 ( $Q_k, R_k$ ) 및 섭동추정기의 LPF 인자  $\Pi = (F, G)$  이다. 결국, 연합칼만필터 내의 섭동추정자는 필터링 성능을 높일 수 있는 추가적인 자유도를 제공한다고 말할 수 있다.

**관찰(remark)** 1 (저차 연합칼만필터): 공분산 전파식 (27)을 유도함에 있어 만약 섭동추정 오차의 상태변수에 대한 상관관계를(correlation)을 무시하고, 섭동추정 오차를 직접 백색 가우시안 잡음, 즉  $\tilde{w}_k \sim N(0, Q_k)$  이라고 가정하면 표 1에서  $W_k = Q_k, Z_k = 0$  이 되므로 보다 단순한 형태의 연합칼만필터에 대한 저차(reduced-order)의 알고리즘을 얻을 수 있다.

표 1. 연합칼만필터의 순환 알고리즘.

Table 1. Recursion of the combined kalman filter.

시스템 모델: $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$ ,
측정 모델: $y_k = h(x_k) + v_k$
$\Delta w_k (\triangleq w_k - w_{k-1}) \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$
예측자(predictor): $\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}) + \hat{w}_{k-1}$
시스템 자코비안: $A_{k-1} = \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_{k-1}^+, u=u_{k-1}}$
선추정오차 공분산: $P_k^- = A_{k-1} P_{k-1}^+ A_{k-1}^T + W_{k-1} + A_{k-1} X_{k-1} + X_{k-1}^T A_{k-1}^T$
측정 자코비안: $H_k = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}_k^-}$
Kalman gain: $K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$
수정자(predictor): $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h(\hat{x}_k^-))$
후추정오차 공분산: $P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$
섭동추정자: $\hat{w}_k = F \hat{w}_{k-1} + G (\hat{x}_k^+ - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}))$
섭동추정오차 공분산: $W_k$ (32)
상호공분산: $X_k$ (33)

관찰(remark) 2 (성능조정 규칙): 연합칼만필터의 성능은 다음과 같은 방법으로 조정할 수 있다. 먼저 측정잡음에 대한 공분산  $R_k$ 는 센서의 오차 스펙으로부터 정한다. 섭동추정기의 LPF 인자  $\Pi \equiv (F, G)$ 는 각 절단주파수가 시스템의 대역폭 보다 약간 작은 값을 갖도록 결정한 후에 시스템 잡음에 대한 공분산값  $Q_k$ 를 조절함으로써 적절한 성능 포인트를 찾는다.

### 5. 섭동 추정기의 특성

(1)의 양변에서 (11)의 양변을 빼면 다음 식을 얻을 수 있는데

$$\tilde{x}_k^- = f(x_{k-1}, u_{k-1}) - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}) + \tilde{w}_{k-1} \quad (35)$$

이 것은 결국 예측자 (11)에 섭동추정치를 추가함으로써 필터링 오차 동역학에 대한 교란이 실제 섭동  $w_k$ 에서 잔류 섭동  $\tilde{w}_k$ 으로 감소되며, 섭동추정 오차의 놈(norm)이  $\|\tilde{w}_k\| < \|w_k\|$ 을 만족하는 한 선추정치의 정확성이 그만큼 향상될 수 있음을 의미한다.

둘째로 (12)를 (11)에 대입하면 다음 식이 주어지고,

$$\hat{x}_k^+ = f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}) + K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-)) + \hat{w}_{k-1} \quad (36)$$

다시  $\hat{x}_k^+ - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}) = K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-)) + \hat{w}_{k-1}$  을 (13)에 대입하면 다음 식이 유도되는데,

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= (F + G)\hat{w}_{k-1} + GK_k(y_k - h(\hat{x}_k^-)) \\ &= \hat{w}_{k-1} + GK_k(y_k - h(\hat{x}_k^-)) \end{aligned} \quad (37)$$

위 식은 섭동추정기가 칼만필터의 순환 루프 속에서 이노베이션(innovation)을 적분하는 특성을 가지고 있음을 의미한다.

칼만필터는 수정자 (12)의 이노베이션 피드백 항에 기인하여 선형 추정오차의 분산(variance) 값을 최소화시키는 방향으로 출력값을 산출한다. 그러나 이러한 칼만필터의 최적성은 완전한 시스템 모델 및 백색 잡음 가정이 성립하지 않은 한 더 이상 유효하지 않다. 사실 이노베이션 피드백 프로세스는 추정오차에 대한 비례제어 프로세스이며 칼만게인 (26)은 최적의 비례 게인에 해당된다. 피드백 제어시스템에서 물리적 시스템이 큰 모델링 오차와 외란의 영향을 받는 경우, 만족스런 성능을 얻기 위해서는 제어기에 적분 항이 필수적인 것처럼, 모델에 기반한 필터링 문제에서도 시스템의 불확실성이 증가할수록 이노베이션 항 이외에 섭동추정자 (37)과 같이 적분제어 동작을 할 수 있는 부가적인 피드백 루프가 요구된다고 할 수 있다.

관찰(remark) 3: 그림 1에서 섭동추정치 피드백 루프는 피드백 양이 샘플링 시간 동안에 발생한 실제 섭동의 양에 따라 조정되는 적응제어적 성격이 있다고 할 수 있다. 추정 및 필터링 문제의 관점에서 보면 시스템 모델이 실제 시스템의 거동에 근접할수록 보다 신뢰성 있는 추정치를 기대할 수 있는 것은 당연한 것인데, 이 문제와 관련시키면 (13)의 섭동추정치는 예측자 (11)의 출력을 가능한 시스템의 실제 거동에 가깝게 적응(adaptation)시키는 기능을 발휘한다고 해석할 수 있다.

관찰(remark) 4: 섭동추정기를 (9)와 같이 상태공간식으로 구현하기 위해서는 모든 상태 추정치(full-state estimates)가 요구된다. 이 논문에서 제시된 연합칼만필터는 표준 칼만필터와 섭동추정기의 두 프로세스가 상호 연성된 동역학(coupled dynamics)에서 상태 추정치와 섭동추정치가 동시에 산출되는 출력 피드백(output feedback) 섭동추정기라고 볼 수 있다.

### IV. 수치 예제

다음은 양바퀴형 이동로봇의 거동에 대한 비선형 기구학 방정식이다[16].

$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ y_{1,k} \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} \\ y_{1,k-1} \\ \phi_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta s_{k-1} \cos(\phi_{k-1} + \frac{1}{2} \Delta \phi_{k-1}) \\ \Delta s_{k-1} \sin(\phi_{k-1} + \frac{1}{2} \Delta \phi_{k-1}) \\ \Delta \phi_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_{1,k-1}} \\ w_{y_{1,k-1}} \\ w_{\phi_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (38)$$

여기서  $(x_{1,k}, y_{1,k})$ 는 바닥 평면 상의 로봇의 위치, 기준좌표계에 대한  $\phi_k$ 는 방향을 나타낸다.  $\Delta s_k$  와  $\Delta \phi_k$ 는 샘플링 시간 동안의 로봇의 직선 이동거리 및 회전각으로서 양바퀴 주행계(odometry) 출력 값의 평균 및 그 차이를 이용하여 각각 결정될 수 있다. 위 식에서 만일 샘플링 시간 동안 바퀴의 이동거리가 확정적(deterministic)이라면, (1)의 제어입력에 해당하는 입력벡터  $u_k = [\Delta s_k \Delta \phi_k]^T$  또한 확정적이다. 그리고 측정장치가 로봇의 모든 상태를 직접 산출한다면 측정 모델은 다음과 같이 단순하게 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x_{m1,k} \\ y_{m1,k} \\ \phi_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ y_{1,k} \\ \phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x_{1,k}} \\ v_{y_{1,k}} \\ v_{\phi,k} \end{bmatrix} \quad (39)$$

또한, (38), (39)에 대한 선형모델의 자코비안은 (34)에 따라 각각 다음과 같다.

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s_k \sin(\phi_k + \frac{1}{2} \Delta \phi_k^+) \\ 0 & 1 & \Delta s_k \cos(\phi_k + \frac{1}{2} \Delta \phi_k^+) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

이동로봇의 위치추정 문제를 통해 연합칼만필터의 장인성을 시뮬레이션하기 위하여 로봇이 1 m/s의 속도로 직선 주행할 때 미끄러짐 등의 원인에 의해 양 바퀴에 그림 2와 같은 임의의 외란이 인가된다고 가정한다. 이러한 외란들은 왼쪽/오른쪽 바퀴의 오도메트리 이동거리 ( $\Delta s_L, \Delta s_R$ )에 오차를 발생시키고, 결국 로봇의 직선이동거리  $\Delta s_k = (\Delta s_L + \Delta s_R)/2$  및 회전각  $\Delta \phi_k = (\Delta s_R - \Delta s_L)/b$  계산에 오차를 유발하게 된다. (단  $b$ 는 양바퀴 사이의 수직거리임). 한편, 측정오차의 표준 편차는  $\sigma_{v,x} = \sigma_{v,y} = 5mm$ ,  $\sigma_{v,\phi} = \pi/180$ , 로봇 주행계의 출력과 측정치의 업데이트 주기는 10 ms로 가정한다.

그림 3, 4의 결과는 칼만필터(KF)와 연합칼만필터(CKF)의 위치추정 성능을 비교한다. 그림에서 보는 바와 같이 시스템에 큰 외란이 발생했을 때 표준 칼만필터는 상당한 추정오차를 발생시킬 수 밖에 없다. 그러나 연합칼만필터의 경우에는, 섭동추정기의 작동에 의해 외란이 실시간으로 추정되고 예

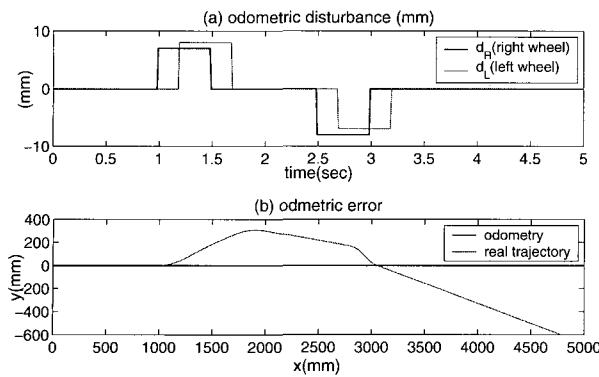


그림 2. (a) 로봇 양 바퀴에 작용하는 외란, (b) 로봇의 주행 궤적.

Fig. 2. (a) odometric disturbances, (b) robot trajectory.

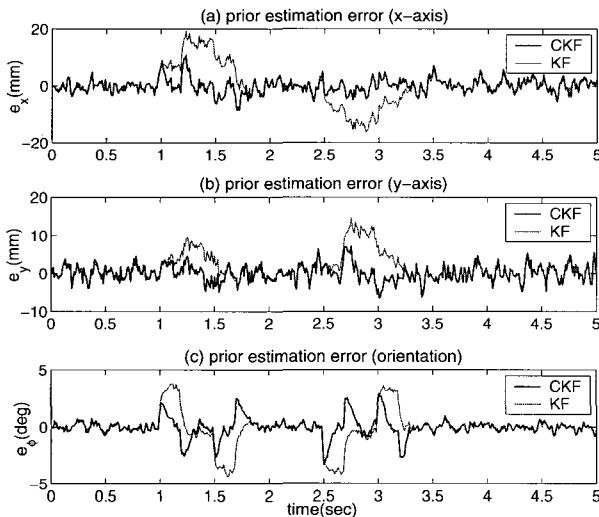


그림 3. 선추정 오차 비교(KF: 칼만필터, CKF: 연합칼만필터).

Fig. 3. Comparison of prior state estimation errors.

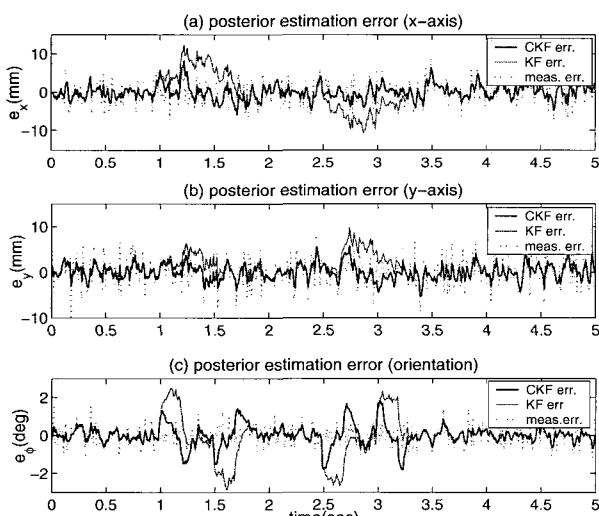


그림 4. 후추정 오차 비교(KF: 칼만필터, CKF: 연합칼만필터, meas. err.: 측정 오차).

Fig. 4. Comparison of posterior state estimation errors.

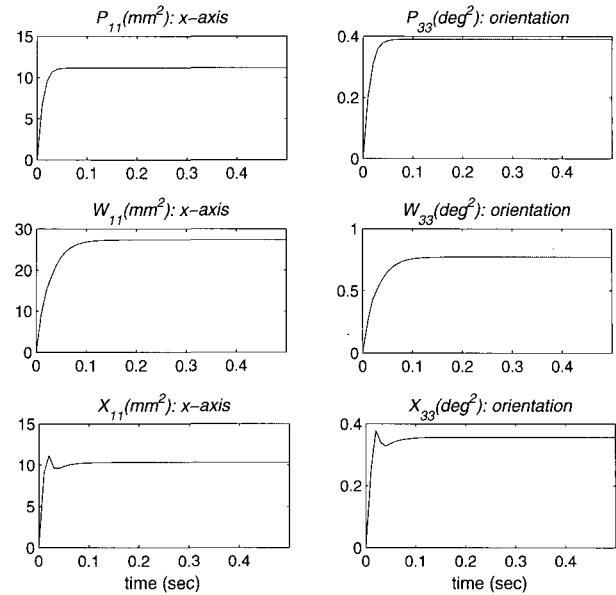


그림 5. 오차 공분산의 전파(propagation): 후추정 오차 공분산, 섭동추정 오차 공분산, 및 상호 오차 공분산 행렬의 대각 성분.

Fig. 5. Propagation of error covariances(diagonal entries).

측자(predictor)에 더해짐으로써 시스템의 실제 거동과 모델의 거동 사이의 편차가 최소화됨으로써 결과적으로 외란에 매우 강인한 성능을 보이고 있다.

그림 3, 4에서 후추정 오차가 선추정 오차보다 작은 값을 보이는 것은 칼만필터의 기본적인 특성이며, 그림 5는 각 오차 공분산 값이 신속히 수렴하고 있음을 보여준다. 한편, 시뮬레이션에 사용된 CKF 인자들은 다음과 같다.

- 측정잡음 공분산:  $R_k = \text{diag}(\sigma_{v,x}^2, \sigma_{v,y}^2, \sigma_{v,\phi}^2)$
  - LPF 인자:  $F = \text{diag}(0.8, 0.8, 0.8)$ ,  $G = \text{diag}(0.2, 0.2, 0.2)$
  - 시스템 잡음 공분산:  $R_k = \text{diag}(\sigma_{w,x}^2, \sigma_{w,y}^2, \sigma_{w,\phi}^2)$
- 단,  $\sigma_{w,x} = \sigma_{w,y} = 3\text{mm}$ ,  $\sigma_{w,\phi} = \pi/360$

## V. 결론

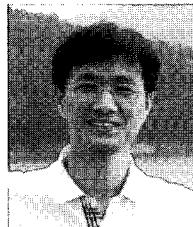
본 논문에서 제시된 연합칼만필터는 큰 모델링 오차와 프로세스 잡음이 존재하는 불확실 환경에 대하여 신뢰성 높은 추정치를 얻을 수 있으며, 표준적인 칼만필터에 비하여 매우 강인한 성능을 보이는 실제적인 필터링 기법이라고 할 수 있다. 기존 칼만필터와 비교할 때 연합칼만필터는 섭동추정기에 의해 이노베이션을 적분제어하는 성질과 시간에 따라 변화하는 섭동에 적응적으로 반응하는 특성을 나타내며, 시스템의 섭동이 큰 경우 일수록 그 효과는 더 분명해진다.

한편 연합칼만필터가 실제 시스템에서 보다 성공적으로 적용될 수 있기 위해서는 섭동추정기가 시스템 모델의 거동에서 벗어나는 섭동의 변화를 감지하기에 충분할 정도의 측정치 업데이트가 요구된다. 결론적으로 연합칼만필터는 표준 칼만필터 프레임 내에 섭동추정자라는 새로운 함수를 추가함으로써 강인한 필터링 성능을 구현한다.

## 참고문헌

- [1] F. L. Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall, 1992.
- [2] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice*, Prentice-Hall, 1993.
- [3] U. Shaked and C. E. de Souza, "Robust minimum variance filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, no. 11, pp. 2474-2483, Nov. 1995.
- [4] I. R. Petersen and D. C. McFarlane, "Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1971-1977, Sep., 1994.
- [5] M. Fu, C. E. de Souza, and Z.-Q. Luo, "Finite-horizon robust kalman filter design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 9, pp. 2103-2111, Sep. 2001.
- [6] U. Shaked, L. Xie, and Y. C. Soh, "New approaches to robust minimum variance filter design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2620-2629, Nov. 2001.
- [7] F. Yang, Z. Wang, and Y. S. Hung, "Robust kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 47, no. 7, pp. 1179-1183, Jul. 2002.
- [8] F. Wang and V. Balakrishnan, "Robust kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, no. 4, pp. 803-813, Apr. 2002.
- [9] M. S. Mahmoud and P. Shi, "Robust kalman filtering for continuous time-lag systems with markovian jump parameters," *IEEE Trans. On Circuits and Systems.I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 1, pp. 98-105, Jan. 2003.
- [10] C.-C. Tsui, "A new design approach to unknown input observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 464-468, Mar. 1996.
- [11] M. Hou, A. C. Pugh, and P. C. Muller, "Disturbance decoupled functional observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, pp. 382-386, Feb. 1999.
- [12] D. W. Gu and F. W. Poon, "A robust state observer scheme," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1958-1963, Dec. 2001.
- [13] S. J. Kwon and W. K. Chung, "A discrete-time design and analysis of perturbation observer for motion control applications," *IEEE Trans. on Control Systems Tech.*, vol. 11, no. 3, pp. 399-407, May 2003.
- [14] S. J. Kwon and W. K. Chung, "Combined synthesis of state estimator and perturbation observer," *ASME J. Dyn. Syst., Meas. and Contr.*, vol. 125, pp. 19-26, Mar. 2003.
- [15] 권상주, "접동관측기를 연합한 장인 상태추정기 설계 및 해석," 제어·자동화·시스템공학 논문지 제11권, 제6호 2005. 6.
- [16] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robot*, The MIT Press, 2004.

## 권상주



1966년 5월 28일생. 1989년 서울대학교 조선공학과(공학사). 1991년 POSTECH(포항공대) 기계공학과(공학석사). 1991년~1997년 국방과학연구소 연구원. 2002년 POSTECH(포항공대) 기계공학과(공학박사). 2003년~2004년 한국과학기술연구원, 한국생산기술연구원 선임연구원. 2004년 9월~현재 한국항공대학교 항공우주기계공학부 전임강사. 관심분야는 강연제어 및 추정이론, 지능형로봇, 비행로봇, 초정밀로봇, 마이크로/나노 메카트로닉스.