〈 논문 〉

원형 외팔보의 일대일 공진에서의 비평면 비선형 진동현상

김명구† · 박철희* · 조종두**

(2005 년 9 월 21 일 접수, 2005 년 12 월 29 일 심사완료)

Non-Planar Non-Linear Vibration Phenomenon on the One to One Resonance of the Circular Cantilever Beam

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak and Chongdu Cho

Key Words : Non-Planar(비평면), One-to-One Resonance(일대일 공진), Primary Resonance(주공진), Base Harmonic Excitation(기초조화가진), Non-Linear Inertia(비선형 관성)

Abstract

Experimental and theoretical study of the non-planar response motions of a circular cantilever beam subject to base harmonic excitation has been presented in this paper work. Theoretical research is conducted using two non-linear coupled integral-differential equations of motion. These equations contain cubic linearities due do curvature term and inertial term. A combination of the Galerkin procedure and the method of multiple scales are used to construct a first-order uniform expansion for the case of one-to-one resonance. The results show that the non-linear geometric terms are very important for the low-frequency modes of the first and second mode. The non-linear inertia terms are also important for the high-frequency modes. We present the quantitative and qualitative results for non-planar motions of the dynamic behavior.

1. 서 론

가늘고 긴 외팔보의 동적특성은 매우 크게 움직이며 복잡한 비선형 응답특성을 보인다. 이 현상은 헬리콥터의 회전날개 우주비행선의 안테나, 유연성을 가진 거대한 우주구조물, 그리고 그 외의 여러 시스템에서 비선형 응답특성이 나타나고 있다. 선형화 된 보의 응답특성은 두 개의 주평면 운동이 서로 독립적으로 나타나고 있다. 따라서 한쪽의 주평면의 강제운동은 항상 그 평면에서 안정된 운동을 한다. 그러나 강제진동으로 보의 진폭이 매우 커지게 되면, 보의 운동에 영향을 주는 전단변형, 뒤틀림, 회전관성 중력 등의 요소들이 중요해지며 이 요소들의 영향으로 여러 가지 비선형 현상들이 나타난다. 보의 운동에 영향을 주는 모든 효과를 포함하는 비선형 운동방정식을 유도하는 것은 이론적으로 거의 불가능하다. 이전의 논문에서는 종종 특정효과가 특정한 형태의 응답특성을 보인다고 소개되고 있으며, 그 외 다른 여러 가지 비선형 효과들은 연구자들의 판단에 의해 임의적으로 무시되었다.

주축 방향의 기초조화가진을 받는 가는 막대의 비선형 현상에 대한 연구의 경우, 처음으로 Haigh and King[1]이 연구를 하였으며, 그들은 비선형 관성항들에 대한 비선형 효과에 대하여 연구하였다. 그들은 가는 막대에서 발생하는 비평면 운동에 대한 정량적이 결과는 얻지 못하였지만 평면 응답곡선 내에서 불안정한 영역이 존재함을 밝혀냈다. 이는 매개변수적으로 가진 된 비평면 운동으로 나타났다. 실험 연구로부터 비평면 운동은 정상상태에서의 선회운동이라고 결론을 내렸다. Ho, Scott and Easley[2]는 단순지지 상태에서 축 방향으로 구속된 보의 큰 진폭의 선회운동에 대하여 연구하였다. 일부 매개변수 영역 내에서 평면 및 비평면 운동이 일어난다는 것을 보여주었다. Bolotim 와

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과
E-mail: mgkim21@hotmail.com
TEL: (032)860-7321 FAX: (032)868-1716
* 회원, 인하대학교 기계공학과 명예교수
** 회원, 인하대학교 기계공학과

Moody[3]는 가는 막대의 진동에 비선형 관성의 효과가 비선형 탄성효과보다 훨씬 중요하다는 것을 보여주었다. Crespo da Silva[5]는 가능한 모든 비선형성을 포함하는 고차의 비선형성을 갖는 운동 방정식을 유도하여 헬리콥터의 회전날개의 운동해석에 이용을 하였다. 본 연구에서는 원형 외팔보를 이용하여 보의 비선형 현상인 도약현상을 분석하였고, 원형 외팔보의 1 차 모드에서 일대일 공진의 존재를 실험적으로 증명하였다. 실험에서 계산된 변수들을 이용하여 Nayfeh[6]가 유도한 이론적인 식에 넣어서 비선형 현상을 이론적으로 분석하였다. 그리고 이론적인 결과와 실험적인 결과를 상호 비교하였다.

2. 비선형 운동방정식

외팔보의 강제진동을 이론적으로 분석하기 위하여 Crespo da Silva and Glynn 이 유도한 미분-적분 방정식을 사용하였다. 문제를 단순화시키기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다. (a) 보의 단면은 일정하고 보의 재료특성은 균일하다. (b) 보에 분포하고 있는 비틀림 관성모멘트는 무시할 수 있다. (c) 내부마찰과 공기저항과 고정시스템 간의 상대적 운동에 의한 에너지손실은 점성감쇠 c 와 가상일 $-c(\dot{v}dv+wdw)$ 로 나타낸다. (d) 기초부의 가진력은 $\omega(s,t)=\bar{\omega}(s,t)+F\cos\Omega t$ 로 표현한다. 모든 변수는 보의 길이 L 과 특정시간 $L^2\sqrt{m/D_\eta}$ 을 이용하여 무차원화 시킨다. 무차원화 된 운동방정식은 다음과 같다.[7]

$$\ddot{v}+c\dot{v}+\beta_y v''''=(1-\beta_y)\left[w'\int_s^1 \dot{v}'w'ds-w''\int_0^s \dot{v}'w'ds\right]$$

$$-\frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\left[w'\int_0^1\int_0^s \dot{v}'w'dsds\right]-\beta_y\left[v'\left(\dot{v}'v'+\dot{w}'w'\right)'\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left\{v'\int_s^1\left[\int_0^1\left(v'^2+w'^2\right)ds\right]ds\right\}'+\left[v'(s-1)+v''\right]\frac{L^3}{D_\eta}mg \quad (1a)$$

$$\ddot{w}+c\dot{w}+w''''=-(1-\beta_y)\left[v'\int_s^1 \dot{v}'w'ds-v''\int_0^s \dot{w}'v'ds\right]$$

$$-\frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\left[v'\int_0^1\int_0^s \dot{v}'w'dsds\right]-\left[w'\left(w'\dot{w}'+v'\dot{v}'\right)'\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left\{w'\int_s^1\left[\int_0^1\left(v'^2+w'^2\right)ds\right]ds\right\}'+\left[w'(s-1)+w''\right]\frac{L^3}{D_\eta}mg \quad (1b)$$

$$+F\Omega^2\cos(\Omega t)+cF\Omega^2\sin(\Omega t)$$

보의 경계조건은 다음과 같다.

$$v=w=v'=w'=0 \quad \text{at} \quad s=0 \quad (2a)$$

$$v''=w''=\dot{v}'=\dot{w}'=0 \quad \text{at} \quad s=1. \quad (2b)$$

여기서 가진력과 중력으로 인하여 발생하는 항은 d'Alembert 의 원리를 이용하여 계산하였다. 방정식 (1a) 와 (1b)에서 첫번째와 두 번째의 [ ]안의 항들은 비틀림과 축 방향 진동의 연성관계를 나타낸다. 세 번째 [ ] 안에 있는 두 번째 항은 y 방향의 축 방향 진동과 z 방향의 축 방향 진동의 연성관계를 보여주고 있다. { }안의 항은 비서형 관성항이고 마지막 [ ] 안의 항은 중력항과 비신장성의 제약조건을 나타낸다. $F\Omega^2\cos\Omega t$ 는 기초부의 가진주파수이다. 모든 비선형 항들은 3 차 항까지 포함하고 있다. 그리고 만일 $\beta_y=1$ 이면, 비틀림과 축 방향 사이의 운동에 대한 연성효과는 사라지게 된다.

3. 비선형 운동방정식의 해

비선형 미분-적분 운동방정식 (1a)와 (1b)를 분석하기 위하여 다축적법(method of multiple scales)을 사용하였다. 그리고 섭동분석을 하기 위하여 작은 매개변수 ε 을 사용하였다. 따라서 $v(s,t)$ 와 $\omega(s,t)$ 의 근사해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v(s,T_0,T_2;\varepsilon)=\varepsilon v_1(s,T_0,T_2,\ldots)+\varepsilon^3 v_3(s,T_0,T_2,\ldots)+\ldots \quad (3)$$

$$w(s,T_0,T_2;\varepsilon)=\varepsilon w_1(s,T_0,T_2,\ldots)+\varepsilon^3 w_3(s,T_0,T_2,\ldots)+\ldots \quad (4)$$

여기서 $T_0=t$ 는 Ω 와 고유 주파수 ω_{mn} 을 가진 빠른 척도 이고 $T_2=\varepsilon^2 t$ 는 진폭과 위상변조의 특징을 결정하는 느린 척도이다. 그리고 $c=\varepsilon^2\mu$ 이고 $F=\varepsilon^3 f$, $\beta_y=1+\delta_0+\varepsilon^2\delta_2$ 이라고 놓는다. 식 (3) 과 식 (4) 를 식 (1a) (1b)에 대입하고 ε 차수에 대하여 정리하면 다음과 같다.[6,15]

Order ε :

$$D_0^2 v_1+(1+\delta_0)v_1''''=0 \quad (5a)$$

$$D_0^2 w_1+w_1''''=0 \quad (5b)$$

$$v_1 = w_1 = v_1' = w_1' = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \tag{6a}$$

$$v_1' = w_1' = v_1'' = w_1'' = 0 \quad \text{at} \quad s = 1 \tag{6b}$$

Order ε^3 :

$$D_0^2 v_3 + (1+\delta_0) v_3''$$

$$= -2D_0 D_2 v_1 - \mu D_0 v_1 - \frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\left[w_1' \int_0^s \int_0^s v_1' w_1' ds ds \right]'$$

$$-\delta_2 v_1'''' + (1-\beta_y)\left[w_1' \int_0^s v_1' w_1' ds - w_1' \int_0^s v_1' w_1' ds \right]'$$

$$-\beta_y \left[v_1' \left(v_1 v_1' + w_1 w_1' \right) \right]' - \left\{ \frac{v_1'}{2} \int_0^s \left[\int_0^s \left(v_1'^2 + w_1'^2 \right) ds \right]' ds \right\}'$$

$$+ \left[v_1' (s-1) + v_1' \right] g_0 \tag{7a}$$

$$D_0^2 w_3 + w_3''$$

$$= -2D_0 D_2 w_1 - \mu D_0 w_1 - (1-\beta_y)\left[v_1' \int_0^s v_1' w_1' ds - v_1' \int_0^s w_1' v_1' ds \right]$$

$$-\frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\left[v_1' \int_0^s \int_0^s v_1' w_1' ds ds \right]' - \left\{ \frac{w_1'}{2} \int_0^s \left[\int_0^s \left(v_1'^2 + w_1'^2 \right) ds \right]' ds \right\}'$$

$$-\left[w_1' \left(v_1 v_1' + w_1 w_1' \right) \right]' + \left[w_1' (s-1) + w_1' \right] g_0 + b\Omega^2 \cos(\Omega T_0) \tag{7b}$$

$$v_3 = w_3 = v_3' = w_3' = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \tag{8a}$$

$$v_3' = w_3' = v_3'' = w_3'' = 0 \quad \text{at} \quad s = 1 \tag{8b}$$

여기에서 $D_n = \partial / \partial T_n$ 이고 $g_0 = L^3 mg/(D_\eta \varepsilon^2)$ 이다. 본 논문에서는 n 번째 모드와 같은 Z 방향의 어느 한 모드의 주 매개변수 가진을 다루고 있다. 이 가진은 일대일 내부공진, 즉 매개변수 공진을 통해 m 번째 모드와 같은 y 방향의 어느 한 모드를 가진시킨다. 따라서 앞의 모드는 매개변수 공진에 의해 직접 가진 되며, 뒤에 있는 모드는 매개변수 공진을 통해서 간접적으로 가진 된다.

$$v_1(s, T_0, T_2, \ldots) = \Phi_m(s) A_1(T_2) e^{i\omega_{1m} T_0} + cc \tag{9a}$$

$$w_1(s, T_0, T_2, \ldots) = \Phi_n(s) A_2(T_2) e^{i\omega_{2n} T_0} + cc \tag{9b}$$

여기에서 cc 는 complex conjugate 을 의미한다.

$$\omega_{1m} = z_m^2 \sqrt{1+\delta_0}, \quad \omega_{2n} = z_n^2,$$

$$\Phi_i(s) = \cosh z_i s - \cos z_i s + \frac{\cos z_i + \cosh z_i}{\sin z_i + \sinh z_i}(\sin z_i s - \sinh z_i s)$$

여기서 Zi 는 $1 + \cos z \cdot \cosh z = 0$ 인 근이다. 이 식의 세 개의 근은 1.8751, 4.6941, 7.8548 이다. 고유함수 Φ_i 는 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\int_0^1 \Phi_i^2(s) ds = 1$$

ω_{2n} 은 Z 방향의 n 번째 진동모드의 선형화 된 고유주파수 이고, ω_{1m} 은 근사적으로 y 방향의 m 번째 진동모드의 선형화 된 고유주파수와 같다. 후자의 실제의 주파수는 $Z^2{}_m \sqrt{1+\delta_0+\varepsilon^2\delta_2}$ 이다. 위의 식 (7) 과 (8)의 방정식을 Galerkin 방법을 사용하여 상미분방정식으로 변환시키면 다음과 같다.

식 (7a)와 식 (7b)에서 각각 $\Phi_m(s)$ 와 $\Phi_n(s)$ 을 곱한 다음 s 의 영역에서 적분을 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D_0^2 v_{3t} + \omega_{1m}^2 v_{3t} = -2D_0 D_2 v_{1t} - \mu D_0 v_{1t} - \delta_2 z^4 v_{1t}$$

$$+(1-\beta_y)\alpha_1 v_{1t} w_{1t}^2 - \frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\alpha_2 v_{1t} w_{1t}^2 - \beta_y \alpha_3 v_{1t} w_{1t}^2 - \beta_y \alpha_4 v_{1t}^3$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_5 v_{1t} D_0^2 v_{1t}^2 - \frac{1}{2}\alpha_6 v_{1t} D_0^2 w_{1t}^2 + \alpha_7 g_0 v_{1t} \tag{10}$$

$$D_0^2 w_{3t} + \omega_{2n}^2 w_{3t} = -2D_0 D_2 w_{1t} - \mu D_0 w_{1t}$$

$$-(1-\beta_y)\beta_1 v_{1t}^2 w_{1t} - \frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y}\beta_2 v_{1t}^2 w_{1t} - \beta_3 v_{1t}^2 w_{1t} - \beta_4 w_{1t}^3$$

$$-\frac{1}{2}\beta_5 w_{1t} D_0^2 w_{1t}^2 - \frac{1}{2}\beta_6 w_{1t} D_0^2 v_{1t}^2 + \beta_7 g_0 w_{1t} + \beta_8 f \Omega^2 \cos \Omega T_0 \tag{11}$$

여기에서 α_i 와 β_i 는 참고문헌[6](부록 A)에 의해 정의되어 있다. 보의 1 차 모드의 고유주파수와 같은 주파수로 가진을 받는 시스템의 응답특성을 분석하기 위하여 detuning 매개변수 $\hat{\sigma}$ 을 도입하였고 $\omega_{1m} = \omega_{2n}$ 어로 정의한다.

$$\Omega = \omega_{2n}(1 + \varepsilon^2 \hat{\sigma}) \tag{12}$$

식 (10) 과 식 (11)에 대입에서 영구항을 발생시키는 항을 제거하면 다음과 같은 해의 조건을 얻을 수 있다.

$$-i(2\omega_{1m} A_1' + \mu\omega_{1m} A_1) - \delta_2 z^4 A_1 - \left[\delta_0 \alpha_1 + \frac{\delta_0^2}{\beta_y}\alpha_2 + (1+\delta_0)\alpha_3 \right]\left(2A_1 A_2 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2^2 \right)$$

$$-3(1+\delta_0)\alpha_4 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_5 \omega_{1m}^2 \bar{A}_1 A_1^2 + 2\alpha_6 \omega_{2n}^2 \bar{A}_1 A_2^2 + \alpha_7 g_0 A_1 = 0 \tag{13a}$$

$$-i\left(2\omega_{2n}\dot{A}_2+\mu\omega_{2n}A_2\right)-\left(\delta_0\beta_1-\frac{\delta_0^2}{\beta_y}\beta_2-\beta_3\right)\left(2A_2A_1\bar{A}_1+\bar{A}_2A_1^2\right)-3\beta_4A_2^2\bar{A}_2$$
$$+2\beta_5\omega_{2n}^2\bar{A}_2A_2^2+2\beta_6\omega_{1m}^2\bar{A}_2A_1^2+\beta_7g_0A_2+\frac{1}{2}\beta_8f\omega_{2n}^2e^{i\omega_{2n}\hat{\sigma}T_2}=0 \quad (13b)$$

위의 식을 극 좌표의 형태로 변환을 시키면

$$A_1=\frac{1}{2}a_1(T_2)e^{i\theta_1(T_2)} \quad \text{and} \quad A_2=\frac{1}{2}a_2(T_2)e^{i\theta_2(T_2)}$$

위의 변수를 식 (13)에 대입하고 실수부와 허수부를 분리하면 다음과 같은 변조 방정식을 유도할 수 있다.

$$2\omega_{1m}a_1'+\left[R_1+R_2a_2^2\sin 2(\gamma_1-\gamma_2)\right]a_1=0 \quad (14)$$
$$\left[2\omega_{1m}\gamma_1'-R_3-R_4a_1^2+R_5a_2^2+R_2a_2^2\cos 2(\gamma_1-\gamma_2)\right]a_1=0 \quad (15)$$
$$2\omega_{2n}a_2'+\left[E_1+E_2a_1^2\sin 2(\gamma_1-\gamma_2)\right]a_2-\beta_8f\omega_{2n}^2\sin\gamma_2=0 \quad (16)$$
$$\left[2\omega_{2n}\gamma_2'-E_3-E_4a_2^2-E_5a_1^2-E_2a_1^2\cos 2(\gamma_1-\gamma_2)\right]a_2 -\beta_8f\omega_{2n}^2\cos\gamma_2=0 \quad (17)$$

여기서 R_i와 E_i는 참고문헌[6](부록 B)에 정의되어 있다.

$$\gamma_1=\omega_{2n}\hat{\sigma}T_2-\theta_1, \quad \gamma_2=\omega_{2n}\hat{\sigma}T_2-\theta_2 \quad (18)$$

보의 주기해 (periodic solution)은 식 (14)-(18)의 고정점에서의 해를 의미하고, 이 고정점은 $a_1'=a_2'=\gamma_1'=\gamma_2'=0$ 에 해당한다. 식 (18)로부터 $\theta_1'=\omega_{2n}\hat{\sigma}$, $\theta_2'=\omega_{2n}\hat{\sigma}$ 이다.

식 (14)-(18)의 대수방정식은 수치해석적인 방법으로 문제를 해석한다. 보의 응답에 대한 1 차 근사식은 다음과 같이 주어진다.

$$v(s,t)=\varepsilon\Phi_m(s)a_1\left(\varepsilon^2t\right)\cos\left(\Omega t-\gamma_1\right)+\ldots \quad (19)$$
$$w(s,t)=\varepsilon\Phi_n(s)a_2\left(\varepsilon^2t\right)\cos\left(\Omega t-\gamma_2\right)+\ldots \quad (20)$$

고정점에서 시스템의 안정성을 결정하기 위하여

$$p_i=a_i\cos\gamma_i \quad \text{and} \quad q_i=a_i\sin\gamma_i \quad (21)$$

식 (14)-(18)을 식 (24)에 대입을 하면,

$$-2\omega_{1m}p_1'=R_3q_1+R_4\left(p_1^2+q_1^2\right)q_1-R_5\left(p_2^2+q_2^2\right)q_1+R_1p_1 +R_2\left[-2q_2p_2p_1+q_1\left(p_2^2-q_2^2\right)\right] \quad (22)$$
$$-2\omega_{1m}q_1'=-R_3p_1-R_4\left(p_1^2+q_1^2\right)p_1+R_5\left(p_2^2+q_2^2\right)p_1+R_1q_1 +R_2\left[\left(p_2^2-q_2^2\right)p_1+2q_1p_2q_2\right] \quad (23)$$
$$-2\omega_{2n}p_2'=E_3q_2+E_4\left(p_2^2+q_2^2\right)q_2+E_5\left(p_1^2+q_1^2\right)q_2+E_1p_2 +E_2\left[q_2\left(q_1^2-p_1^2\right)+2p_2p_1q_1\right] \quad (24)$$
$$-2\omega_{2n}q_2'=-E_3p_2-E_4\left(p_2^2+q_2^2\right)p_2-E_5\left(p_1^2+q_1^2\right)p_2+E_1q_2 -E_2\left[p_2\left(p_1^2-q_1^2\right)+2q_2p_1q_1\right]-\beta_8f\omega_{2n}^2 \quad (25)$$

방정식 (22)-(25)는 1 차의 상미분방정식이므로 $\exp(\lambda T_2)$ 에 비례하는 미소 교란에 대한 특정 고정점에서의 안정성 해석을 한다. 자코비안 행렬의 고유치 해석을 통하여 계의 안정성을 해석한다. 주어진 고정점에서 모든 고유치의 실수부가 0 보다 작거나 같아야지만 계는 안정성을 갖는다. 참고문헌[6](부록 B)의 R_3, E_3에 대한 식으로부터 중력에 의한 효과도 발생하는 $v(s,t)$와 $\omega(s,t)$의 고유주파수가 각각 매우 작은 $\alpha_ng_0/(200\omega_{1n}\omega_{2n})\%$ 와 $\beta_ng_0/(200\omega^2{}_{2n})\%$ 만큼 감소하고 있다.

기초조화가진을 받는 외팔보의 두개의 다른 평면에 응답특성을 해석한다. 모든 경우에서 보가 균일하고 재료는 등방성이며, 포아송 비는 $\nu=0.33$ 이고 교차단면은 원형이라고 가정한다. 따라서 원형 단면의 반지름을 r 이라고 하면, h=b 은 모두 r 이 된다.

$$\beta_y=D_\zeta/D_\eta\approx 1+\delta_0$$
$$\beta_\gamma=D_\xi/D_\eta=\frac{k_1}{\pi(1+\nu)} \quad (26)$$

여기에서 원형 외팔보의 비틀림에 의한 강성계수는 $D_\xi=k_1r^4E/2(1+\nu)$ 이고 k_1 은 참고문헌[7]을 이용하여 계산할 수 있다. E 는 재료의 탄성계수 이고 G는 재료의 강성계수 이다. 재료역학에서 $G=E/2(1+\nu)$ 관계를 갖고 있다. 식 (13)으로부터 y 와 z 방향의 유효 비선형 스프링계수 α_e, β_e는 다음과 같다.

$$\alpha_e=(1+\delta_0)\alpha_4-\frac{2}{3}\alpha_5\omega_{1m}^2 \quad \text{and} \quad \beta_e=\beta_4-\frac{2}{3}\beta_5\omega_{2n}^2 \quad (27)$$

외팔보의 단면이 원형 단면인 경우에 $\delta_0=0.00$ 이고, $\beta_\gamma=0.7518$ 이며 $\mu=0.0415$ 로 설정하였다. Detuning δ_2를 0.0 에서 -0.01 로 감소시키면서 평면운동과 비평면 운동의 응답특성을 이론적으로 해석하였다. 평면운동의 응답곡선에서 보의 불안정한 주파수 범위는 Fig. 1 과 Fig. 3 의 x`y`영역에 나타나고 있다. 또한 이 주파수 영역에서 비평면 운동이 발생하고 있음을 알 수 있다. 그리고 평면운동의 진동에너지가 감소를 하고 비평면 운동의 진동에너지가 증가하는 것을 볼 수 있다. 비선형

현상에 의해서 평면운동의 진동에너지가 일대일 공진현상에 의해서 비평면으로 이동을 하여 비평면에서 응답특성이 나타나고 있다. 방정식 (16)과 (17)로부터 δ_2가 변화할 때 평면응답 진폭 a_2의 크기는 δ_2가 계수 R_3에 표현식에서만 나타나고 있는 그 이유는 D_η에 대하여 모든 변수들의 특성을 정규화 하였기 때문이다. Fig. 2는 $\delta_2-\sigma$ 평면에서 비평면 응답의 존재영역을 보여주고 있다. 고유주파수에서 δ_2가 0 인 지점을 통과하여 양의 임계값을 넘어 증가하거나 음의 임계값 아래로 감소하면 비평면 운동은 없어진다. 즉 δ_2가 0 보다 큰 영역에서 보는 동적으로 불안정성을 갖게 되며, 이 영역에서 일대일 공진현상으로 비평면 운동이 발생함을 수치 해석적으로 알 수 있다.

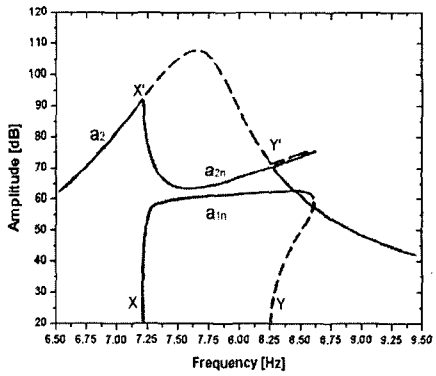

Fig. 1 Frequency resonance curves of the first mode, a_2=planar response amplitude; a_{1n}, a_{2n}=non-planar amplitudes; (——) stable, (----) unstable with at least one eigenvalue being positive

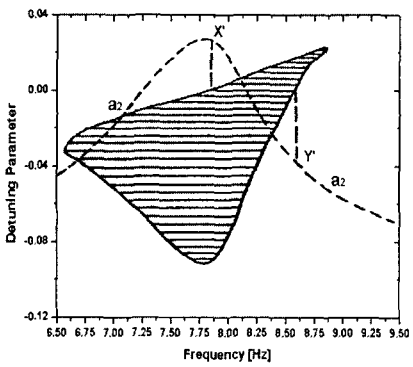

Fig. 2 Variation of the unstable frequency range of planar responses with the natural frequency bias δ_2: b/h=1.0, a_2=planar response amplitude

4. 실험 방법

원형 외팔보는 균일한 탄성재료인 알루미늄 합금(AL)을 사용하였고, AL의 물성치는 탄성계수 E=72GPa, 강성계수 G=27GPa, 포아송 비 $\nu=0.33$ 원형 외팔보의 단위길이당 질량 m=0.0528kg/m 이며, 외팔보의 형상은 단면이 원형 (지름 $\phi=5mm$, 길이 $L=675mm$)이다. 또한 유연한 알루미늄 합금은 연성재료 이므로 약간의 구조감쇠를 갖고 있다. 외팔보의 가진방법은 기초의 고정부를 기초조화가진으로 일정한 진폭의 크기를 갖는 사인파 가진을 하였다.

실험적으로 원형 외팔보의 고유주파수를 측정하기 위하여 가진기를 사용하였고, 가진함수는 Pseudo Random 신호를 선택하여 가진기에 전기신호로 공급을 하였다. 외팔보를 기초가진을 한 다음에 FRF 방법을 이용하여 외팔보의 고유주파수를 실험적으로 측정하였다. 외팔보의 선형적인 보의 이론적인 고유주파수는 Table 1 에 표시되어 있다. 보의 감쇠계수는 FRF 에서 -3dB 방법을 이용하여 각각의 모두에서 감쇠계수를 계산하였다.[18,19]

가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진주파수를 증가하거나 감소시키는 방법을 이용하여 보의 응답특성을 측정하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분이 가진주파수의 변화에 상관없이 일정한 크기의 진폭값을 갖게 된다. 가진주파수의 증가와 감소는 sine sweeping 의 형태이고 주파수 변화속도는 0.030Hz/s 이다. 가진기에서 발생하는 가속도 진폭의 크기는 1 차 모드에서 $14.50m/s^2$ 이다. 이 값을 변위값으로 환산을

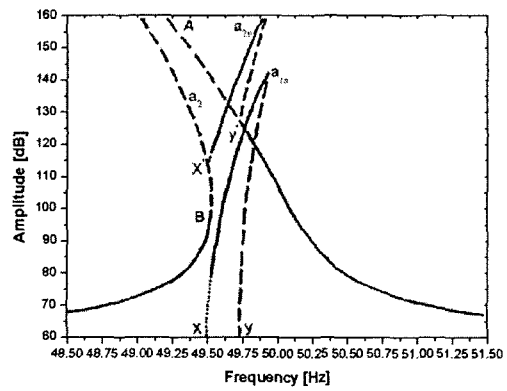

Fig. 3 Frequency resonance curves of the second mode, a_2=planar response amplitude; a_{1n}, a_{2n}=non-planar amplitudes; (——) stable, (----) unstable with at least one eigenvalue being positive

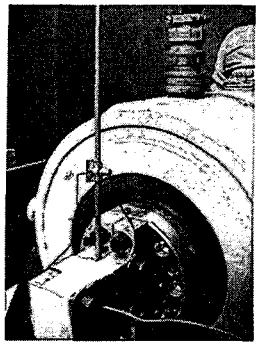

Fig. 4 *Accelerometer position on the circular cantilever beam*

Fig. 5 One to one resonance of the circular cantilever beam on the first mode

하면, e=5.7389mm 의 변위진폭을 갖는다. 이 진폭은 가진기의 아마추어 표면에 가속도계를 별도로 부착하여 가진기에 발생하는 진동의 가속도를 측정하였다.

외팔보의 응답특성을 측정하기 위하여 외팔보의 평면 방향(x-axis)와 비평면 방향(y-axis)에 각각 B&K4374 가속도계를 부착하였다. 가속도계의 질량은 각각 0.65gram 이고 측정가능 주파수 범위는 1-25kHz 이다. 가속도계의 부착위치는 고정부에서 s=125mm 높이에 순간접착제를 이용하여 보의 표면에 평면 방향과 비평면 방향에 각각 고정을 시켰다.

가속도계에서 발생한 신호는 charge amp(B&K 2635)을 통해서 전압신호로 변환이 되어 SONY DAT 에 전압신호로 동시에 평면운동의 성분과 비평면운동의 성분을 각각 저장을 하였다. 저장된 신호는 다시 레벨레코더(B&K 2307)에 보내져서 응답신호의 레벨을 기록지에 기록을 하게 된다. 레벨레코더의 설정 조건은 펜의 속도는 25mm/sec 이고, 페이퍼의 이송속도는 1mm/sec 로 설정을 하였다 이 기록지에 기록된 데이터를 이용하여 원형 외팔보의 1 차와 2 차 모드의 비선형 진동특성을 해석하였다.

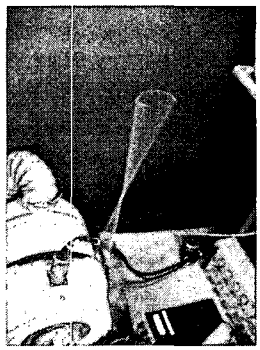

Fig. 6 One to one resonance of the circular cantilever beam on the second mode

Table 1 Measured natural frequency and damping coefficient of the circular beam

Mode	λ	Theory(Hz)	Meas.(Hz)	Damping
1	1.8751	7.94	8.00	0.0415
2	4.6941	49.78	49.63	0.0625
3	7.8548	139.40	135.13	0.2500

5. 실험결과 및 고찰

유연한 원형 외팔보의 1 차 모드에서 일대일 공진현상에 의해서 평면운동과 비평면운동이 발생하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5 는 일대일 공진에 의해서 발생하는 평면운동과 비평면운동을 보여주고 있다. Fig. 7 에서 위에 있는 그래프는 가진 주파수가 증가하였을 때 x 축 방향의 가속도계가 측정한 데이터로 평면운동에 대한 응답특성을 보여주고 있다. 아래에 있는 그래프는 y 축 방향의 가속도계가 측정한 데이터로 일대일 공진에 의한 비선형 진동현상의 의해 보의 비평면 응답특성을 보여주고 있다. 외팔보의 평면운동에서 비선형현상에 의해서 일대일 공진이 발생하면 보의 안정성이 없어지면 평면운동에서 발생하는 진동에너지가 일대일 공진에 의해서 비평면으로 전달이 되어서 비평면 운동이 발생하고 있음을 알 수 있다. 보에서 비평면 운동이 발생하면 동시에 평면운동의 응답진폭이 감소하는 것을 볼 수 있다.[14,17]

Fig. 8 에서는 가진주파수가 9.50Hz 에서 6.50Hz 으로 일정한 속도로 감소하는 경우에서 발생하는 보의 응답특성을 그린 그래프이다. 가진주파수가 감소하는 경우에는 주파수 응답특성 증가하는 경우의 주파수 응답특성에 비하여 비평면운동이 잘 일어나지 않음을 알 수 있다. 그러나 주파수가

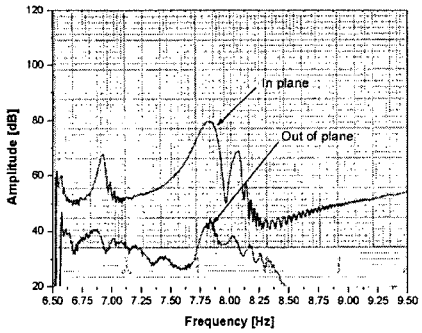

Fig. 7 Frequency response curve for forward direction on the first mode (in-plane and out of plane)

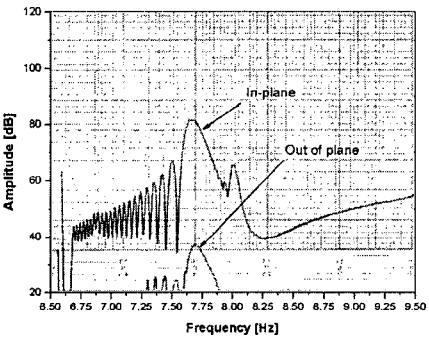

Fig. 8 Frequency response curve for backward direction on the first mode (in-plane and out of plane)

증가하는 경우보다는 공진점을 통과한 후에 작은 도약현상들이 일어나고 있음을 볼 수 있다. Fig. 7 과 Fig. 8 를 주파수 응답곡선을 비교 분석을 하면 원형 외팔보의 1 차 모드에서 경화스프링에 의한 도약현상이 발생하고 있음을 알 수 있다.

원형 외팔보의 2 차 모드에서 일대일 내부공진에 의해서 발생하는 평면운동과 비평면운동에 대한 비선형 응답특성이 Fig. 9 와 Fig. 10 에 나타나 있다. 2 차 모드에서도 보의 평면운동에서 일대일 공진이 발생하면 보 불안정해지고, 평면운동에서 발생하는 진동에너지가 비평면방향으로 전달되어서 비평면운동이 일어난다. 2 차 모드에서는 보의 비평면 응답의 크기가 평면운동의 응답의 크기와 거의 같은 응답특성을 갖고 있다. 따라서 일대일 공진에 인한 진동에너지의 전달이 잘 발행하고 있음을 알 수 있다. 또한 평면운동 방향에서는 연화스프링의 도약특성을 갖고 있지만 비평면운동 방향에서는 경화스프링의 도약특성을 갖는 비선형 응답특성을 보여주고 있다. 그리고 2 차 모드에서 평면운동에서의 고유주파수와 비평면운동의 고유주파수가 약간의 차이가 있음을 그래프에서 볼 수 있다.

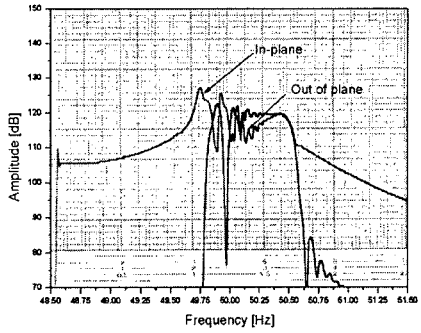

Fig. 9 Frequency response curve for forward direction on the second mode (in-plane and out of plane motion)

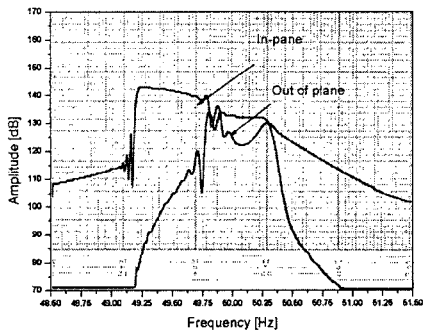

Fig. 10 Frequency response curve for backward direction on the second mode (in-plane and out of plane)

6. 결 론

일대일 공진특성을 갖는 원형 외팔보의 비평면, 비선형 진동현상을 이론적 실험적으로 비교 분석하였다. 이론과 실험적 해석은 원형 외팔보의 1 차 모드를 기준으로 해석하였다. 1 차 모드의 비선형 응답특성에서 평면운동과 비평면운동이 동시에 발생하는 주파수 영역이 존재함을 알 수 있었다. 이 현상은 보의 불안정한 주파수 영역과 일치함을 보였다. 또한 보의 응답특성이 평면운동에서 비평면운동으로 전환이 되면서 평면운동의 진동에너지가 일대일 공진현상으로 비평면으로 이동하는 현상을 보이고 있다. 따라서 비평면운동이 발생하면 평면운동의 진동에너지가 감소하는 것을 볼 수 있다.

2 차 모드에서도 평면운동의 진동에너지가 일대일 공진현상에 의해서 비평면으로 이동하는 현상을 볼 수 있다. 또한 보에서 비평면의 응답크기가 평면의 응답크기와 거의 같은 크기의 응답특성을 갖고 있다. 그러므로 일대일 공진에 의해서 진동에너지의 전달이 매우 잘 이루어지고 있음을 알 수 있다. 2 차 모드에서는 평면방향에서 연화스프

링의 도약현상이 나타나지만 비평면에서는 경화스프링의 도약현상이 일어나고 있다. 고차 모드에서는 비선형 스프링항의 영향 보다는 비선형 관성항의 영향이 더 잘 나타나고 있음을 실험적, 이론적으로 알 수 있다.

실험에서 가진주파수가 증가하는 경우 이론적 해석과 거의 일치하는 결과를 얻었다. 그러나 가진주파수가 감소하는 경우 외팔보의 응답특성은 서로 다른 결과를 얻었다. 가진 주파수가 감소하는 경우, 1 차 모드에서 외팔보의 비평면 운동이 작게 나타나고 있고 공진점을 통과한 후에 작은 도약현상들이 나타나고 있다. 2 차 모드에서는 공진점을 통과한 후에 비평면운동이 급격히 감소하지 않고 천천히 감소를 하는 경향을 보이고 있다. 이 현상은 평면운동의 진동의 에너지가 비평면으로 전달이 되어서 비평면운동의 진폭이 천천히 감소하고 있다.

참고문헌

(1) Haight, E. C. and King, W. W., 1972, "Stability of Non-Linear Oscillations of an Elastic Rod," *J. Acoustic. Soc. Am.* Vol. 52, pp. 899~911.

(2) Ho, C. H., Scott, R. A. and Eisley, J. G., 1975, "Non-Planar, Non-Linear Oscillations of a Beam-I. Forced Motions," *Int. J. Non-linear Mech.*10, pp. 113~127.

(3) Moody, M. L., 1967, "The Parametric Response of Imperfect Columns, in Developments in Mechanics," *Proc. Tenth Midwestern Mechanics Conference*, Vol. 4, pp. 329~346.

(4) Crespo da Silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Tensional Dynamics of Inextensional Beams-II. Forced Motions," *J. Struct. Mech.* Vol. 6, pp. 449~461.

(5) Crespo da Silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1979, "Non-Linear Non-Planar Resonant Oscillations in Fixed-Free Beams with Support Asymmetry," *Int. J. Solids. Struct.* Vol. 15, pp. 209~219.

(6) Pai, Perngjin F. and Nayfeh, Ali H., 1990, "Non-Linear Non-Planar Oscillations of a Cantilever beam under Lateral Base Excitations," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 455~474

(7) Crespo da silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams-I. Equations of Motion," *J. Struct. Mech.* Vol. 6, pp. 437~448.

(8) Nayfeh, A. H., 1973, "Nonlinear Transverse Vibrations of Beams with Properties that Vary Along the Length," *J. Acoust. Soc .Am.* Vol. 53, pp. 766~770.

(9) Tezak, E. G., Mook, D. T. and Sridhar, S., 1978, "Nonlinear Analysis of the Lateral Response of Columns to Periodic Loads," *J. Mech. Des.* Vol.100, pp. 651~659.

(10) Choi, Y. S., Seo, K. S. and Woo, Y. J., 2003, "Nonlinear Vibration of a Cantilever Beam Subjected to Electromagnetic Forces," *KSME A*, Vol. 27, No. 1, pp. 48~57.

(11) Dowell, E. H., Traybar, J. and Hodges, D. H., 1977, "An Experimental-Theoretical Correlation Study of Nonlinear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam," *J. Sound Vib.* Vol. 50, pp. 533~544.

(12) Rosen, A. and Friedmann, P., 1979, "The Nonlinear Behavior of Elastic Slender Straight Beams Undergoing Small Strains and Moderate Rotations," *J. appl. Mech.* Vol. 46, pp. 161~168.

(13) Crespo da silva, M. R. M. and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams-I. Equations of Motion," *J. Struct. Mech. 6*, pp. 437~448.

(14) Evan-Iwanowski, R. M., Sanford, W. F. and Kehagioglou, T., 1970, "Nonstationary Parametric Response of a Nonlinear Column," *Dev. theor. appl. Mech. 5*, pp. 715~743.

(15) Crespo da Silva, M. R. M. and Hodges, D. H., 1986, "Nonlinear Flexure and Torsion of Rotating Beams, with Application to Helicopter Rotor Blades-II. Response and Stability Results," *Vertica* 10, pp. 171~186.

(16) NAYFEH, ALI H., 2000, "NONLINEAR INTERACTIONS Analytical, Computational and Experimental Methods," JOHN WILEY & SONS, INC., pp. 181~304.

(17) Kim, M. G., Lee, H. S. and Cho, C. D., 2005, "Non-linear Phenomenon in the Response of Circle Cantilever Beam," *KSNVE*, Vol. 15, No. 4, pp. 445~451.

(18) Kim, M. G., 1995, "The Experiment for Chaos of Cantilever Beam," *Proceedings of the KSME Fall Annual Meeting (I)*, pp. 504~510.

(19) Lim Jae-Hoon, Jung Goo-Choong and Choi Yeon-Sun, 2003, "Nonlinear Dynamic Analysis of Cantilever Tube Conveying Fluid with System Identification," *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 12, pp.1994~2003.