

새로운 저차 안정화기와 시간응답을 위한 1차 및 PID 제어기 설계

論 文

55D-1-1

New Low-Order Stabilizers and Its Application to the First-Order and PID Controllers with Time Response Specifications

金永喆[†] · 趙泰信^{*} · 金瑾植^{**}

(Young Chol Kim · Tae Shin Cho · Keunsik Kim)

Abstract - This paper presents the problems of designing low-order controller for a linear time-invariant(LTI) system in parameter space, wherein both transient response requirements and stability shall be considered in the same space. For a LTI system, we, (1) develop a method determining the existence of low-order stabilizers of the first-order and PID structures, (2) develop an algorithm of finding such a stabilizing region. (3) Both procedures are carried out by means of a parametric approach in the same frame work. This leads to easily obtain a subset of controller gains from the stabilizing set, that meet good time response requirements. It is illustrated by examples.

Key Words : Low-Order Stabilizer, PID, First-Order Compensator, Time Domain Specification

1. 서 론

피드백 시스템의 성능해석과 제어기 설계문제에서 시간영역 성능조건을 만족시키는 설계기법에 대한 필요성은 산업현장의 공정제어분야에서 가장 보편적으로 요구됨에도 불구하고, 이 문제에 대한 연구는 1950년대 이후 별로 진척되지 못하였다. 3차 이상의 선형시불변 플랜트 모델이 주어지고, 스텝응답의 오버슈트와 정착시간(settling time)을 만족하는 피드백제어기를 설계하는 문제에 대해서, 제어공학 교과서들은 아직도 근궤적(root locus)이나 극배치(pole placement) 방식을 소개하는 수준에서 더 나아가지 못하고 있다. 지금까지는 작은 첨두치(magnitude peak)와 큰 위상여유가 낮은 오버슈트를 주고, 대역폭이 클수록 빠른 응답을 낸다는 경험적 사실에 근거하여, 시간영역 성능을 고전적인 주파수영역 설계기법으로 풀어 왔다[1,3]. LQR, H_∞ , l_1 같은 현대제어 이론[4,5]들도 이러한 문제를 다룰 수 있는데 이 방법들 역시 오버슈트, 상승시간, 정착시간 등과 같은 시간응답 성능조건을 직접 만족시키는 제어기 설계기법은 아니다. 또한 설계된 제어기가 상대적으로 고차로 나타나는 단점을 동시에 갖고 있다. Bhattacharyya는 H_2/H_∞ , μ , l_1 과 같은 최적강인 제어방식으로 설계된 제어기가 고차구조로 인해 제어기 자체의 불확실성에 대해서는 오히려 취약(fragile)하다는 사실을 제기하였다[6]. 이러한 관점에서 PID나 lead/lag 보상기와 같은 저차의 제어기는 이미 제어기로서의 구조적 강인성을 내포하고 있다고 할 수 있겠다.

저차제어기를 설계하는 문제는 오래전부터 탐구되어 왔다. Bhattacharyya[7]는 상태공간에서 안정한 고정차수 제어기를 설계하기 위한 간접적인 알고리즘을 제시하였다. 또한 Gu[8]는 어떤 플랜트에 대해 안정한 제어기의 차수가 플랜트 출력의 수와 같거나 작다는 것을 보였다. 그러나 저차 또는 최소차 안정화 제어기의 존재여부를 이러한 설계방법에서는 사전에 알 수 없다. Linnemann[9]은 플랜트 차수를 n 이라 할 때, $(n-1)$ 보다 작은 저차 제어기로 안정화시킬 수 있는 플랜트의 종류를 규정하였다. Wang[10]은 영점을 갖지 않는 시스템(all pole system: APS)에 대해 플랜트 전달함수의 분모의 고차 부분의 안정도가 안정한 저차제어기의 존재성을 보장한다는 것을 보였다. 이러한 방법들은 저차 또는 최소차수 안정한 제어기의 존재성에 대한 충분조건을 제시한다. 그런데 다른 제약조건 즉, 시간응답 설계규격이 부과된다면 이러한 방법은 적용하기가 매우 어렵다. 최근에 Ho[11]는 일반화 Hermite-Biehler 정리를 이용하여 PID 제어기의 안정한 이득 영역을 해석적인 방법으로 구하였다. 또한 Tantarisis[12]는 1차 제어기의 안정화 이득 영역을 발표하였다. 이 두 방법들은 시스템이 안정할 필요충분조건을 만족하는 제어기 파라미터 공간상에서 안정한 이득 영역을 구한다는 장점이 있지만, PID 또는 1차제어기에만 적용 가능하다는 단점이 있다. 또한 제어기의 안정화 이득 영역 내에서 시간응답 설계규격을 만족하는 부분 셋을 찾는 것은 별개의 문제이다.

본 논문의 목적은 파라미터 공간에서의 안정도뿐만 아니라 제어성능을 만족하는 저차 제어기를 설계하는 방법을 제시하고자 한다. Kim등[1]은 특성다항식의 계수파라미터 공간에서 직접 시스템을 해석하고 설계하는 소위 특성비지정법(characteristic ratio assignment: CRA)을 제안하였다. 그런데 임의 차수의 선형플랜트에 대해 저차제어기를 설계하는 경우에는 차수 부정합 문제가 발생한다. 저차제어기로는 정합시킬 수 있는 목표특성다항식의 차수에 제약이 있기 때문이다. 본 논문에서는 차수 부정합 문제를 전체시스템의 안정성을 보장하는 저차제어

[†] 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子컴퓨터工學部 教授, 工博
E-mail : yckim@cbu.ac.kr

^{*} 正會員 : (주) 테크윈 技術研究所 先任研究員 工博

^{**} 正會員 : 亞洲自動車大學 副教授, 工博

接受日字 : 2005年 8月 25日

最終完了 : 2005年 11月 22日

기들의 이득 셋을 찾는 문제로 치환하였다.

논문의 주요 내용은 다음과 같다. 선형시스템에 대해, (1) 1차/PID 구조의 안정한 저차제어기의 존재성을 결정하는 방법, (2) 안정한 영역을 찾는 알고리즘, (3) 파라미터 접근법을 이용하여 제어기 이득의 안정한 영역으로부터 시간영역 설계규격을 만족하는 부분 셋을 구하는 방법을 제시하는 것이다.

첫 번째 주제인 (1)항에 대한 출발점은 실수 다항식의 안정도에 대해 Lipatov와 Sokolov[2]에 의해 주어진 충분조건이다. 이 조건에 의하면 n 차 실수 특성다항식의 계수를 a_i 라 할 때, 부등식 $a_i a_{i+1} > 1.4656^2 a_{i-1} a_{i+2}$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ 가 만족되면 다항식은 Hurwitz 안정이다. 이 부등식은 특성비 α_i 항으로도 표현된다. 따라서 특성비는 페루프 안정도와 제동특성을 동시에 고려할 수 있는 파라미터라는 것을 유의할 필요가 있다. 본 논문에서는 이를 이용하여 저차제어기의 존재성을 결정하는 것과 안정영역을 찾는 문제가 2차형 부등식(quadratic inequality: QI)들의 셋을 구하는 문제로 표현할 수 있음을 보인다. 또한 한 적용으로써 1차 또는 PID 제어기의 안정한 셋을 결정하는 알고리즘을 제시한다. 마지막으로, 오버슈트 그리고 정착시간과 같은 시간영역 설계규격을 만족하는 1차/PID 제어기를 설계하는 방법을 제시한다. 먼저 1차/PID 안정화 셋 S_{LS} 이 결정되면 특성비 지정법[13,14]을 적용하여 설계규격을 만족하는 제어기 이득의 부분 셋 S^* 를 구하게 된다. 1차, PID 제어기의 각 경우에 대해 적용 예를 통하여 제시된 방식의 유용성을 보인다.

2. 특성다항식의 특성비와 안정도, 시간응답의 관계

이 장에서는 3장에서 이용될 중요 파라미터인 특성비, 일반화시정수, K-다항식 등을 정의하고 이들과 시간응답특성과의 관계, 안정도 조건에 대한 배경이론을 간단히 정리하기로 한다.

2.1 정의

선형 시불변 피드백 제어 시스템의 페루프 전달함수가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

특성다항식 $\delta(s)$ 에 계수의 특성비 α_i , 일반화시정수 (generalized time constant) τ 를 다음과 같이 정의한다[13].

$$\alpha_1 := \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \alpha_2 := \frac{a_2^2}{a_1 a_3}, \dots, \alpha_{n-1} := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \quad (2)$$

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \quad (3)$$

반면, 다음 식(4)와 (5)를 이용하면, 특성다항식 $\delta(s)$ 는 α_k, τ, a_0 항으로 표현될 수 있다.

$$a_1 = a_0 \tau \quad (4)$$

$$a_j = \frac{a_0 \tau^j}{\alpha_{j-1} \alpha_{j-2}^2 \alpha_{j-3}^3 \dots \alpha_2^{-2} \alpha_1^{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

어떤 다항식의 특성비가 다음 공식으로 생성된 값을 가지며 τ, a_0 는 임의로 선택할 수 있을 때 이 다항식을 K-다항

식이라 부르기로 한다.

(i) $\alpha_1 > 2$

$$(ii) \alpha_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \cdot \alpha_1, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (6)$$

즉, 2보다 큰 임의의 α_i 를 선택하면 식(6)에 의해 나머지 α_k 를 계산할 수 있다. 이렇게 구한 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ 와 주어진 τ, a_0 를 식 (4)와 (5)에 대입하면 K-다항식, $\delta_k(s)$ 를 얻을 수 있다. 위 (6)에 의해 구해지는 특성비는 $\delta_k(s)$ 의 차수가 $n = 2m$ (짝수) 또는 $n = 2m-1$ (홀수)일 때 다음 관계가 있다.

(i) $\alpha_k = \alpha_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, (m-1) \quad (7)$

(ii) $\alpha_k > \alpha_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, (m-2) \quad (8)$

예로써, $n = 6$ 일 때 $\alpha_1 = 2.464$ 를 선택하면 $[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5] = [2.464 \ 1.943 \ 1.848 \ 1.943 \ 2.464]$ 을 얻는다.

다음은 전달함수 $T(s)$ 의 $n-1$ 개 특성비 중 스텝응답에 지배적인 영향을 주는 소위 지배특성비(dominant characteristic ratios)를 구하기 위해 시간응답감도를 정의하기로 한다. 여기서는 단지 하나의 특성비 α_k 가 $\Delta\alpha_k$ 만큼 섭동이 있었을 때 전달함수의 변화를 다음의 비정규함수감도로 정의한다.

$$US_{\alpha_k}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial \alpha_k / \alpha_k} \quad (9)$$

그리고 $Y_{\alpha_k}^s(s)$ 를 $US_{\alpha_k}^T$ 의 단위 스텝응답이라 놓는다. 즉, $R(s) = 1/s$ 에 대해

$$Y_{\alpha_k}^s(s) = US_{\alpha_k}^T(s) \cdot R(s) \quad (10)$$

$y_{\alpha_k}^s(t)$ 는 $Y_{\alpha_k}^s(s)$ 의 역 Laplace 변환을 표시한다.

2.2 특성다항식의 특성비와 안정도, 시간응답의 관계

2.2.1 특성비에 의한 안정도 조건

먼저, 특성비에 의한 다항식의 Hurwitz 안정도 충분조건과의 관계를 정리하기로 한다. 기존의 Routh & Hurwitz 판별법도 다항식의 계수만을 이용하지만 안정도 조건이 제어기 계수에 대해서 비선형함수로 나타나기 때문에 저차가 아니면 설계문제에 응용하기 어렵다. 앞서 언급한 바와 같이 Lipatov 등[2]은 n 차 다항식의 계수를 3차 또는 4차의 부분다항식으로 나누고 이들 계수의 부등식 조건으로부터 안정도 충분조건을 유도하였다. 이 결과를 특성비 항으로 표현하면 어떤 다항식이 다음 조건 중 하나만 만족하면 Hurwitz 안정이라는 것이다.

(i) $\sqrt{\alpha_k \alpha_{k+1}} > 1.4656, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (11)$

(ii) $\alpha_k \geq 1.12374 \alpha_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (12)$

여기서, $\alpha_k^* = \frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\alpha_{k-1}}, \alpha_n = \alpha_0 = \infty$ 이다.

또한, 다항식이 안정하기 위한 필요조건은, 모든 k 에 대하여 부등식 $\alpha_k \alpha_{k+1} > 1$ ($k=1, 2, \dots, n-2$)이어야 한다[2]. 여기서, 식(11)로부터 안정도 조건이 인접한 2개의 특성비의 2차부등식으로 나타난다는 것을 유의할 필요가 있다. 이는 3장의 주요결과로 이어지기 때문이다.

2.2.2 일반화시정수와 응답속도

다음은 일반화시정수 τ 의 특성을 정리하기로 한다. 지금까지 1차 시스템이 아니면 시정수의 정의는 명확하지 않았다. 최근에 Kim 등[1]은 식(3)에서 정의한 τ 가 정확하게 시스템의 응답속도에 관계함을 해석적으로 밝혔다. 이 결과에 따르면 동일한 특성비를 갖는 APS의 경우 스텝응답의 모양을 변화시키지 않고 τ 에 의해 응답속도를 임의로 조정할 수 있다. 다시 말해, 특성비가 동일한 임의의 두 APS에 대하여 일반화시정수가 각각 τ_1, τ_2 이면, 두 시스템의 스텝응답 $y_1(t), y_2(t)$ 는 다음 관계를 갖는다.

$$y_1(t) = y_2\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot t\right) \quad (13)$$

그런데, 저차제어기를 갖는 페루프 특성다항식에서는 τ 와 특성비를 독립적으로 선택할 수 없기 때문에 (13)이 성립하지는 않는다. 플랜트가 영점을 갖는 경우에는 기준특성다항식의 τ 를 크게 할수록 영점에 의한 오버슈트의 크기를 감소시킬 수 있다[18]. 이러한 τ 의 성질은 3장에서 정착시간을 만족하는 제어기 이득을 구할 때 이용된다.

2.2.3 특성비와 제동특성의 관계

시스템의 제동특성과 특성다항식 계수와의 관계는 1960년대 초 까지는 활발히 연구되었으며 이 중 Naslin[13]이 제안한 특성비와 제동특성의 관계는 비록 실험적 사실에 근거하였지만 매우 의미 있는 실마리를 제공하였다. 1990년대 초부터 Manabe[17]에 의해 이를 적용한 제어기 설계기법을 개발하였으며 특히, 계수도(coefficient diagram)를 창안하여 저차제어기 설계에 유용하게 활용할 수 있음을 보였다. 이들에 의해 발견된 특성비와 제동특성의 주요 관계는, (i) $T(s)$ 의 특성비 값이 클수록 제동비가 크고, (ii) 모든 특성비 값이 4보다 크면 τ, a_0 의 값에 무관하게 음의 실근을 갖는 것이다. 이러한 관계로부터 α_k, τ 를 이용하면 원하는 시간응답을 갖는 기준특성다항식을 쉽게 생성할 수 있다. 그러나 극배치방식(pole placement method)을 이용한 제어기 설계에서 가장 큰 문제가 주어진 시간응답조건을 만족하는 3차 이상의 극의 위치를 어떻게 결정하는가에 있듯이 특성비지정법(characteristic ratio assignment: CRA)에서는 어떻게 과도응답에 대응하는 τ 와 $n-1$ 개의 특성비를 선택하는가가 어려운 일이다. 이에 대한 한 가지 해로서, Kim 등[1]은 $(n-1)$ 차 제어기를 설계하는 경우 τ 를 α_k 와 독립적으로 설정할 수 있음을 밝혔으며 α_k 는 K-다항식을 이용 시 단지 α_1 하나만 선택하면 나머지 α_k 는 (6)에 의해 계산할 수 있기 때문에 매우 간단하다. 분모가 K-다항식으로 주어지는

APS를 $T_k(s) = a_0/\delta_k(s)$ 라 놓으면, $T_k(s)$ 는 다음 성질을 갖기 때문에 제동율을 고려하기가 매우 용이하다[1, 16, 18].

- (i) $T_k(s)$ 의 주파수 크기응답은 침투치가 전혀 없는 단조감소함수이며 α_1 이 증가할수록 대응하는 $T_k(s)$ 의 크기응답의 감쇄 경사는 완만하다.
- (ii) K-다항식 $\delta_k(s)$ 는 항상 안정하다.
- (iii) $\delta_k(s)$ 의 근, 즉 $T_k(s)$ 의 극은 α_1 이 증가할수록 근영역의 경계 섹터 각이 작아져 궁극적으로 음의 실근만을 갖게 한다. 다시 말해, α_1 이 증가할수록 제동율은 단조 증가한다. 따라서 α_1 과 τ 의 선택만으로 오버슈트를 갖지 않으며 임의의 정착시간을 갖게 하는 n 차의 $T_k(s)$ 를 구성할 수 있다.

그런데, 제어기의 차수가 $(n-1)$ 보다 작은 경우, 즉 저차제어기를 설계하는 경우에는 α_1 과 τ 를 독립적으로 설정할 수 없으며 상호 종속적이다. 따라서 K-다항식에 의한 CRA도 적용할 수도 없다. 예를 들어 7차 플랜트에 대해 오버슈트 없고 주어진 정착시간을 만족하는 PID 제어기를 설계한다고 가정하자. 문제는 페루프 특성다항식은 8차인데 제어기 계수는 고작 3개이기 때문에 모든 α_k 와 τ 를 설정할 수 없다는 데 있다.

2.2.4 스텝응답과 지배특성비의 관계

Kim 등[17, 18]은 이 문제를 다음에 기술하는 지배적 특성비에 의해 근사적으로 해결할 수 있음을 보였다. 특성비가 섭동함에 따라 전달함수 $T(s)$ 의 스텝응답이 어떻게 변화하는지를 나타내는 시간응답 감도해석을 통해 어떤 특성비가 전체시스템에 지배적인 영향을 주는지를 해석하였다. 즉, 특성비 α_k 의 섭동에 대한 스텝응답 $y(t, \alpha_k)$ 의 감도를 해석하였다. 응답 $y(t, \alpha_k)$ 를 Taylor 급수로 전개한다.

$$y(t, \alpha_k + \Delta\alpha_k) = y(t, \alpha_k) + \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} \Delta\alpha_k + \dots, \quad (14)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

섭동 $\Delta\alpha_k$ 에 대한 응답변동을 1차로 근사화 하면, $\Delta y(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta y(t) = \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} \Delta\alpha_k \quad (15)$$

아래의 정리 1은 식 (15)에 있는 $\Delta y(t)$ 가 기지의 전달함수에 의해 계산될 수 있음을 보여준다.

정리 1 [15] : 식 (1)과 같은 안정한 전달함수 $T(s)$ 가 주어질 때, 비정규함수 감도와 α_k 변화에 대한 스텝응답 섭동의 1차 근사화는 아래와 같이 주어진다.

$$US_{\alpha_k}^T := \sum_{j=k+1}^n \frac{(j-k)a_j s^j n(s)}{\delta^2(s)} \quad (16)$$

$$= \sum_{j=k+1}^n \frac{(j-k)a_j s^j}{\delta(s)} \cdot T(s)$$

$$(ii) \Delta y(t) = \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_k} \cdot y_{\alpha_k}^s(t), \text{ for } k=1, 2, \dots, n-1. \quad (17)$$



일반적으로 시스템의 과도응답은 극점뿐만 아니라 영점의 영향도 받기 때문에, 순수한 특성비만의 시간응답감도를 해석하기 위해서는 APS를 고려하는 것이 효과적이다. Kim 등 [15]은 이 결과를 통해 APS의 과도응답은 τ 를 고정시켰을 때 단지 특성비 α_1, α_2 와 α_3 에 의해 지배적인 영향을 받음을 보였다. APS를 $T_A(s) = a_0/\delta(s)$ 라 놓으면 정리 1의 식(16)으로부터 $T_A(s)$ 에 대한 비정규화 함수감도는 다음 식으로 주어진다.

$$US_{\alpha_k}^{T_A} := \frac{\partial T_A(s)}{\partial \alpha_k / \alpha_k} = \sum_{j=k+1}^n \frac{(j-k)a_0 a_j s^j}{\delta^2(s)} \quad (18)$$

$$= \sum_{j=k+1}^n \frac{(j-k)a_j s^j}{\delta(s)} \cdot T_A(s)$$

편의상, $\delta(s)$ 의 차수가 $n=7$ 로 가정하면 출력 감도함수 $Y_{\alpha_k}^s = US_{\alpha_k}^{T_A} \cdot R(s)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$Y_{\alpha_1}^s = \frac{a_0(a_2s + 2a_3s^2 + 3a_4s^3 + \dots + 6a_7s^6)}{\delta^2(s)}$$

$$Y_{\alpha_2}^s = \frac{a_0(a_3s^2 + 2a_4s^3 + \dots + 5a_7s^6)}{\delta^2(s)}$$

$$\vdots$$

$$Y_{\alpha_6}^s = \frac{a_0(a_6s^5 + 2a_7s^6)}{\delta^2(s)}$$

$$Y_{\alpha_7}^s = \frac{a_0(a_7s^6)}{\delta^2(s)} \quad (19)$$

식 (4)과 (5)에 포함된 일반화 시정수 τ 의 변화는 응답감도의 시간 축척(scale)으로 나타난다. 그래서 $\tau=1$ 로 선택하여도 일반성을 잃지 않는다. $\tau=1$ 로 놓고 Lipatov 안정조건을 식 (5)에 대입하면, $\delta(s)$ 의 고차 계수가 저차의 계수보다 훨씬 작다. 따라서 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$a_0 = a_1 > a_2 > a_3 > \dots \gg a_n$$

위 부등식조건을 식 (19)에 적용하면 아래의 결과를 얻는다.

$$|y_{\alpha_1}^s|_{\max} > |y_{\alpha_2}^s|_{\max} > \dots > |y_{\alpha_6}^s|_{\max} \quad (20)$$

여기서 $|y_{\alpha_k}^s|_{\max}$ 는 $Y_{\alpha_k}^s$ 의 임펄스응답의 최대값을 의미한다. 이상의 결과로부터 시간영역 스텝응답 성능에 지배적인 영향을 미치는 특성계수는 일반화시정수를 포함한 $\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이고 나머지 α_k 의 영향은 무시할 수 있다는 것을 보였다[15]. 여기서 특성비 $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ 를 지배특성비(dominant characteristic ratios)라고 부르기로 한다.

3. 새로운 저차 안정화기

최근에 Ho[11]는 일반화 Hermite-Biehler 정리를 이용하여, PID 제어기의 안정한 이득 영역을 해석적으로 구하였다.

또한 Tantarisi[12]는 1차 제어기의 안정화 이득 영역을 발표하였다. 위 제안된 방법들은, 시스템이 안정할 필요충분조건을 만족하는 제어기의 이득 영역을 구하는 장점이 있지만, 제어기 차수가 이보다 큰 경우에는 쉽게 확장할 수 없다. 2장에 소개했던 Lipatov 안정도 충분조건은 특성비의 곱의 부등식이다. 이 부등식은 특성다항식의 차수에 관계없이 항상 제어기 파라미터의 2차 부등식(quadratic inequality)으로 변형할 수 있다. 이 장에서는 Lipatov 충분조건을 이용한 저차안정화기의 존재여부를 판단하고 그해를 구하는 방법을 기술한다. 그러나 제어기 파라미터 수가 4개를 넘는 일반적인 경우에 대한 2차부등식의 해를 구하는 방법을 아직 구하지 못하였으며, 여기서는 1차/PID 제어기에 대해서 해를 구하는 방식을 소개하고자 한다. 이 결과는 일반적인 문제의 해를 구할 첫 단계가 될 수 있다.

3.1 저차 안정화기의 존재를 위한 충분조건

아래의 그림 1과 같은 단일입출력 피드백 제어시스템을 고려한다.

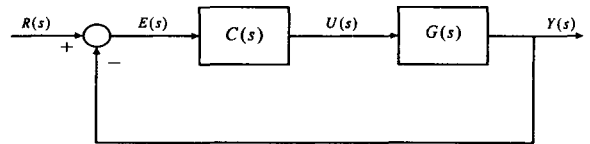


그림 1 피드백 제어시스템

Fig. 1 Feedback control system

플랜트 $G(s)$ 와 제어기 $C(s)$ 는 각각 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + \dots + n_1 s + n_0}{d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_1 s + d_0}, \quad (m \leq l) \quad (21)$$

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_t s^t + a_{t-1} s^{t-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (22)$$

여기서, $r \leq t < l$. 일반적으로 $t < l-1$ 이면 저차제어기라고 한다. 제어기 파라미터의 벡터를 x 로 놓는다. 즉,

$$x^T := [b_r \ b_{r-1} \ \dots \ b_1 \ b_0 \ a_t \ a_{t-1} \ \dots \ a_1 \ a_0] \quad (23)$$

폐루프 시스템의 특성다항식은

$$\delta(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) = \delta_n s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \delta_1 s + \delta_0 \quad (24)$$

$\delta(s)$ 의 각 계수는 x 의 선형함수이기 때문에 다시 쓰면,

$$\delta_i(x) = p_i^T x + c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (25)$$

여기서, p_i 는 그 요소가 플랜트 파라미터인 벡터이고 c_i 는 상수이다.

이제 Lipatov 안정도 충분조건 (11)을 다시 주목하자. 식 (11)에서 모든 α_k 들은 0보다 크기 때문에 양변을 제곱하여도 부등식은 변하지 않는다. $\eta=1.4656^2$ 으로 놓고 (11)을 다시 정리하면

$$\alpha_k \alpha_{k+1} > \eta, \quad k=1, 2, \dots, n-2 \quad (26)$$

식 (26)을 특성다항식의 계수 항으로 표현하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\delta_k(x)\delta_{k+1}(x)}{\delta_{k-1}(x)\delta_{k+2}(x)} > \eta, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (27)$$

Lipatov 부등식이 서로 인접한 4개의 특성다항식 계수들, $\delta_{k-1}, \delta_k, \delta_{k+1}, \delta_{k+2}, k = 1, 2, \dots, n-2$ 의 부등식으로 변형되었다. 이것은 단지 특성다항식의 계수만 조사함으로써 안정성을 판별할 수 있음을 의미한다. 또한 (25)로부터 특성다항식의 계수가 x 의 1차식이기 때문에 식(27)의 부등식은 특성다항식의 차수에 관계없이 항상 제어기 파라미터 x 에 대한 2차 부등식 형태가 된다.

식(27)의 해 영역을 구하기 위하여 다음과 같이 새로운 함수를 정의한다.

$$f_k(x) := \eta\delta_{k+2}(x)\delta_{k-1}(x) - \delta_{k+1}(x)\delta_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-2. \quad (28)$$

식(25)를 (28)에 대입하면,

$$f_k(x) = \eta(p_{k+2}^T x + c_{k+2})(p_{k-1}^T x + c_{k-1}) - (p_{k+1}^T x + c_{k+1})(p_k^T x + c_k) \quad (29)$$

$p_k^T x = x^T p_k$ 이기 때문에, $f_k(x)$ 는 다음과 같이 바뀔 수 있다.

$$f_k(x) = \frac{1}{2}x^T H_k x + R_k^T x + q_k = [x^T \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}H_k & \frac{1}{2}R_k \\ \frac{1}{2}R_k^T & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

여기서,

$$H_k := 2[\eta p_{k+2} p_{k-1}^T - p_{k+1} p_k^T], \quad (31)$$

$$R_k^T := \eta(c_{k+2} p_{k-1}^T + c_{k-1} p_{k+2}^T) - (c_{k+1} p_k^T + c_k p_{k+1}^T), \quad (32)$$

$$q_k := \eta c_{k-1} c_{k+2} - c_{k+1} c_k. \quad (33)$$

위의 함수 $f_k(x)$ 는 특성다항식의 차수에 관계없이 항상 제어기 파라미터 x 에 대한 2차식(quadratic form)으로 주어진다. x 에 관한 2차방정식의 그래프를 2차 곡면(quadratic surface)이라 하며, H_k, R_k^T, q_k 에 따라 다양한 형태, 타원면(ellipsoid), 타원뿔(elliptic cone), 단엽 쌍곡면(hyperboloid of one sheet), 타원포물선(elliptic parabolic), 2엽 쌍곡면(hyperboloid of two sheet), 쌍곡포물선(hyperboloid parabolic)등으로 나타난다.

식 (26)의 부등식 조건과 식 (33)의 함수 $f_k(x)$ 를 이용하여 다음을 만족하는 셋을 정의한다.

$$S_\alpha := \{x \mid f_k(x) < 0, \text{ for } k = 1, 2, \dots, n-2\}, \quad (34)$$

$$S_\delta := \{x \mid \delta_j(x) > 0, \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (35)$$

(35)는 특성다항식이 Hurwitz 안정이기 위한 필요조건인 모

든 계수 $\delta_i(x)$ 가 0보다 커야한다는 조건을 부가한 것이다. 식 (34), (35)의 셋을 동시에 만족하는 교집합 셋을 S_{LS} 라 놓는다.

$$S_{LS} := S_\alpha \cap S_\delta \quad (36)$$

다음의 정리 2는 단일입출력 선형 시불변 플랜트에 대해 저차인 t -차 안정화기의 존재에 대한 것이다.

정리 2 : 그림 1의 피드백 시스템에 대해 만약 $S_{LS} \neq \emptyset$ 이면 전체 페루프 시스템을 안정화시키는 t -차($t < l-1$) 저차제어기가 존재한다.

증명 : 먼저 식 (35)의 셋 S_δ 는 특성다항식의 모든 계수가 Hurwitz 안정이기 위한 필요조건을 만족하는 제어기 이득의 셋을 모두 모은 것이다. 마찬가지로 셋 S_α 는 Lipatov의 안정도 충분조건으로부터 얻은 식 (34)의 $(n-2)$ 개의 부등식 조건을 만족하는 셋이다. 따라서 두 개 셋의 교집합인 셋 S_{LS} 가 존재하면, 전체 페루프 시스템을 안정화시키는 t -차 제어기가 존재한다는 것을 의미한다. ♣♣♣

부연 1: $S_{LS} \neq \emptyset$ 은 하나의 충분조건이므로 이를 만족하지 않는다 해서 t -차 안정화기가 존재하지 않는다고 말할 수는 없다. 무엇보다도 흥미 있는 의문은 완전한 셋 S 와 S_{LS} 의 차이 즉 $S_c = S - S_{LS}$ 에 제어성능을 만족시키는 의미 있는 이득 값들이 존재하느냐는 것이다. 해석적으로 입증되지는 않았으나 2장에서 정리한 특성비와 일반화시정수의 시간응답특성에 의하면 만족할 만한 제동특성을 가지려면 특성비의 값이 안정도를 보장하는 것보다 큰 값을 요구하기 때문에 S_{LS} 내에 제어성능을 만족하는 대부분의 이득이 존재한다고 할 수 있다. 이 주장의 해석적 입증은 추후 과제로 한다. ♣♣♣

전체 페루프 시스템이 안정화되는 제어기 이득 셋 $x \in S_{LS}$ 를 얻기 위해서는, 특성다항식의 계수로부터 얻어지는 $(n+1)$ 개의 선형 부등식 조건과 $(n-2)$ 개의 2차형 부등식 조건을 동시에 만족하는 파라미터 공간에서의 영역을 구해야한다. 그러나 일반적으로 파라미터가 4개 이상이면, H_k, R_k^T, q_k 의 값에 따라 다양한 형태의 2차 곡면을 갖기 때문에, 2차 부등식조건을 만족하는 파라미터 셋을 해석적으로 구하는 것은 어려운 문제이다. 3파라미터인 경우, 1개의 파라미터를 고정하고, 나머지 파라미터들로 구성된 2차 평면에 부등식 조건을 만족하는 셋을 도식하는, 수치해석적인 방법을 주로 사용한다. 만약, 4개 이상의 파라미터 공간에서 식 (34)처럼 주어진 2차 부등식들의 교집합을 만족하는 영역을 구하는 알고리즘을 개발한다면, 2차 이상인 저차 제어기의 안정도 셋을 구하는 문제에 적절하게 사용할 수 있을 것이다. 또한 1차 또는 PID 제어기가 아닌, 파라미터가 3개 이하인 저차제어기 즉, 예컨대, $C(s) = \frac{x_1 s + 2}{s^2 + x_2 s + x_3}$ 와

같은 제어기를 설계하고자 한다면, 페루프 특성다항식의 계수에도 단지 3개의 파라미터만 존재하기 때문에 해를 구할 수 있다. 그러나 Ho나 Tantis의 방법으로는 위와 같은 제어기의 이득을 구할 수 없다.

본 장에서는 산업현장에서 아직도 가장 많이 쓰이고 있는 아래와 같은 1차 또는 PID 제어기의 안정화 문제를 다루기로 한다.

• 1차 제어기 : $C(s) = \frac{x_1s + x_2}{s + x_3}$ (37)

• PID 제어기 : $C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$ (38)

• PI 제어기 : $C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$ (39)

식(37)-(39)의 제어기 파라미터를 (23)과 대비시키면 1차 보상기: $x^T := [x_1 \ x_2 \ x_3]$, PID: $x^T := [k_p \ k_d \ k_i]$, PI: $x^T := [k_p \ k_i]$ 로 나타나며 이제 다음 절에서는 정리 2를 만족하는 제어기 이득을 어떻게 구하는지를 기술하기로 한다.

3.2 1차 안정화기의 이득영역 결정

그림 2와 같은 2자유도 제어기 구조의 1차 제어기를 갖는 피드백 시스템을 고려한다. 2 파라미터 구조(two parameter configuration)는 제어기의 영점이 페루프 전달함수의 영점에 추가되지 않는 장점이 있다. 실제 구현 방법에 대해서는 Chen[3]을 참조한다. 문제는 주어진 선형플랜트 $G(s)$ 에 대해 3.1절의 방법에 따라 페루프 시스템을 안정화하는 1차 보상기의 이득 셋을 구하는 것이다. 이 시스템에서 플랜트 전달함수와 제어입력은 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + \dots + n_1 s + n_0}{d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_1 s + d_0}$$
 (40)

여기서 ($m < l$)

$$U(s) = \frac{K_{dc}}{s + x_3} R(s) - \frac{x_1 s + x_2}{s + x_3} Y(s)$$
 (41)

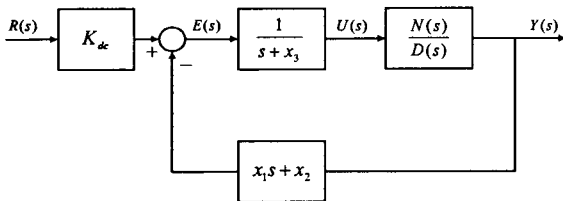


그림 2 2파라미터 구조의 1차 제어기를 갖는 피드백 시스템

Fig. 2 Feedback control system with first-order controller in two parameter configuration

이 때 페루프 시스템의 특성다항식은 다음과 같다.

$$\delta(s) = D(s)(s + x_3) + N(s)(x_1 s + x_2),$$

$$= \delta_n s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0.$$
 (42)

1차 제어기의 파라미터 벡터 x 는

$$x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3].$$
 (43)

특성다항식 $\delta(s)$ 의 각 계수는 x 의 선형함수이기 때문에 다음 식으로 표현된다.

$$\delta_i(x_1, x_2, x_3) = p_i^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$
 (44)

여기서, $p_0^T = [0 \ n_0 \ d_0]$, $c_0 = 0$,

$p_1^T = [n_0 \ n_1 \ d_1]$, $c_1 = d_0$,

$p_2^T = [n_1 \ n_2 \ d_2]$, $c_2 = d_1$,

⋮

$p_{n-1}^T = [n_m \ 0 \ d_l]$, $c_{n-1} = d_{l-1}$,

$p_n^T = [0 \ 0 \ 0]$, $c_n = d_l$.

특성다항식의 계수를 이용하면 특성비 및 일반화 시정수는 다음과 같다.

$$\alpha_i = \frac{\delta_i^2}{\delta_{i-1} \delta_{i+1}} = \frac{(p_i^T x + c_i)^2}{(p_{i-1}^T x + c_{i-1})(p_{i+1}^T x + c_{i+1})},$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$

 (45)

$$\tau = \frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{(p_1^T x + c_1)}{(p_0^T x + c_0)} = \frac{(d_0 + d_1 x_3 + n_0 x_1 + n_1 x_2)}{(d_0 x_3 + n_0 x_2)}$$
 (46)

1개의 파라미터를 고정하고 나머지 파라미터들로 구성된 2차 평면에 부등식 조건을 만족하는 셋을 도출하는 수치해석적인 방법을 사용하겠다. 먼저 특성다항식의 계수로부터 아래와 같이 주어지는 안정도 셋 S_δ 를 구한다.

$$S_\delta := \{x \mid \delta_j(x_1, x_2, x_3) > 0, \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots, n\}$$
 (47)

1차제어기의 파라미터 x 중에 1개의 파라미터 $x_3 = x_3^*$ 로 고정한 후 $\delta_j(x)$ 에 대한 새로운 부등식 조건을 얻는다.

식 (44)에 $p_j^T = [n_{j-1} \ n_j \ d_j]$ 를 대입하면,

$$\delta_j(x_1, x_2) = [n_{j-1} \ n_j] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_j x_3^* + d_{j-1} > 0,$$

$j = 0, 1, \dots, n$

 (48)

여기서, $j-1 < 0$ 이면 $n_{j-1} = d_{j-1} = 0$.

식 (48)의 함수 $\delta_j(x_1, x_2)$ 는 선형함수이기 때문에, $(n+1)$ 개의 부등식을 모두 만족하는 셋을 (x_1, x_2) 평면에 나타낼 수 있다. 두 번째 안정도 셋 S_α 는 다음과 같다.

$$S_\alpha := \{x \mid f_k(x_1, x_2, x_3) < 0, \text{ for } k = 1, 2, \dots, n-2\}$$
 (49)

함수 $f_k(x_1, x_2, x_3)$ 에 식 (44)를 대입하여 정리하면

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} x^T H_k x + R_k^T x + q_k$$
 (50)

여기서,

$$H_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \left(\eta \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_{k+2} \\ d_{k+2} \end{bmatrix} [n_{k-2} \ n_{k-1} \ d_{k-1}] - \begin{bmatrix} n_k \\ n_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix} [n_{k-1} \ n_k \ d_k] \right)$$

$$R_k^T = [r_1 \ r_2 \ r_3] = \eta(d_{k+1}[n_{k-2} \ n_{k-1} \ d_{k-1}] + d_{k-2}[n_{k+1} \ n_{k+2} \ d_{k+2}] - (d_k[n_{k-1} \ n_k \ d_k] + d_{k-1}[n_k \ n_{k+1} \ d_{k+1}]))$$

$$j = 0 \text{ 및 } 1 \text{ 인 경우도 마찬가지로 정리하여 } S_\delta \text{ 를 구한다.}$$

$$q_k = \eta d_{k-2} d_{k+1} - d_k d_{k-1}, \quad k-2 < 0 \text{ 이면}$$

$$n_{k-2} = d_{k-2} = 0.$$

앞에서와 마찬가지로 $x_3 = x_3^*$ 로 놓고 $f_k(x_1, x_2)$ 에 관한 2차형 부등식을 만족하는 셋을 구한다. 즉,

$$f_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [r_1 \ r_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + q_k \quad (51)$$

$$\text{여기서, } r_1 = \frac{1}{2} h_{31} x_3^* + \frac{1}{2} h_{13} x_3^* + r_1,$$

$$r_2 = \frac{1}{2} h_{32} x_3^* + \frac{1}{2} h_{23} x_3^* + r_2,$$

$$q_k = \frac{1}{2} h_{33} x_3^{*2} + r_3 x_3^* + q_k$$

식 (51)의 함수 $f_k(x_1, x_2)$ 는 매우 다양한 형태의 2차 곡면을 갖지만, x_1 의 값을 적절히 선택하면 x_2 만으로 주어지는 2차부등식의 해를 구할 수 있다. 이 셋은 x_3 축 상 고정된 x_3^* 에 대해 (x_1, x_2) 평면으로 나타나며, 다른 x_3^* 선택하여 이를 반복하면 3차원 공간에서 셋 S_α 를 구하게 된다. 위에서 구한 두 개의 셋을 모두 만족하는 안정한 셋을 S_F 로 표시한다. 즉,

$$S_F = S_\delta \cap S_\alpha \quad (52)$$

결론적으로, Lipatov의 충분조건을 변형한 2차형 부등식 조건의 해를 구함으로써, 시스템을 안정화시키는 1차 제어기의 이득 셋 S_F 를 구할 수 있다.

부연 2 : (x_1, x_2, x_3) 3차원 공간에서 안정한 영역의 x_3 범위를 선택하는 것은 매우 어려운 일이다. 하지만 플랜트 전달함수의 상대차수(relative degree)가 2이상인 경우에는 특성다항식의 $n-1$ 차 계수는 x_3 만의 함수이기 때문에, Hurwitz 필요조건에 따라 x_3 의 선택범위를 한정된 구간으로 결정할 수 있다. 또한 (x_1, x_2, x_3) 중에서 x_3 를 고정시키는 것은 Tantariss[12]의 결과를 따랐다. ♣♣♣

아래의 예제는 제안한 방법으로 구한 제어기 이득 셋이 Tantariss가 구한 안정도 영역내 포함되는 것을 보여준다.

예제 3.1 (1차 제어기) : 그림 2의 2파라미터 구조를 갖는 제어시스템에서 플랜트 $G(s)$ 가 다음과 같이 주어진 경우를 고려한다.

$$G(s) = \frac{s+1}{s^5 + 12s^4 + 61s^3 + 144s^2 + 71s - 290}$$

1차 제어기파라미터 중 $x_3 = 0.8$ 로 고정했을 경우 (52)를 만족하는 안정한 이득 셋 (x_1, x_2) 를 구하라.

해 : 문제에서 $x_3 = 0.8$ 로 고정했기 때문에 부등식 (48)에서 $j = 2$ 인 경우만 정리해보면,

$$\delta_1(x_1, x_2) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 233.2 > 0$$

$k = 1, 2, \dots, 4$ 에 대해서 식 (51)의 2차 부등식들을 모두 만족하는 제어기 이득 셋 S_α 를 구한다.

$$f_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [r_1 \ r_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + q_k < 0$$

S_δ 와 S_α 의 교집합 S_F 를 그림 3.3에 나타내었다. 여기서 S_F 는 Tantariss 방법을 사용한 1차제어기의 완전한 안정화기의 셋이다.

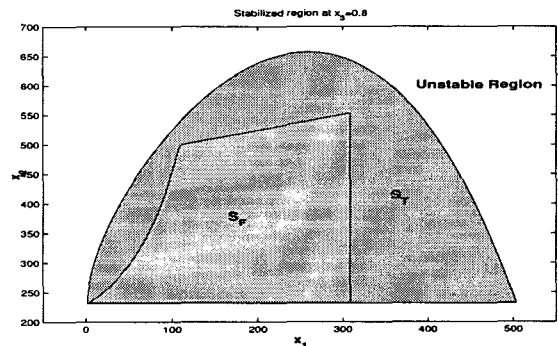


그림 3 $x_3 = 0.8$ 에서 안정한 (x_1, x_2) 의 집합
Fig. 3 Stabilizing set of gain (x_1, x_2) at $x_3 = 0.8$

3.3 PID 제어기의 안정영역

일반적인 Cascade 구조의 PID 제어기는 페루프 전달함수에 제어기의 영점이 추가되기 때문에 과도응답에 악영향을 준다. 이와 달리 그림 4에 나타낸 소위 I-PD 구조는, 제어기의 영점이 전체 전달함수의 영점에 추가되지 않기 때문에 흔히 사용되는 구조이다. 본 절에서는 이러한 PID 제어기에 의한 선형피드백시스템의 안정화문제를 다루기로 한다.

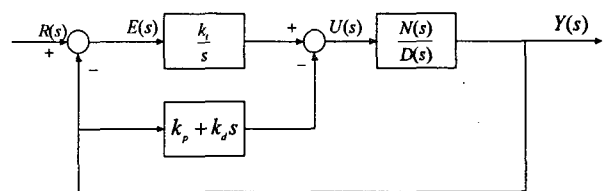


그림 4 I-PD 제어기를 갖는 피드백 시스템
Fig. 4 Feedback control system with I-PD control structure

여기서 플랜트의 전달함수와 제어입력은 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + \dots + n_1 s + n_0}{d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_1 s + d_0}, \quad (m < l) \quad (53)$$

$$U(s) = \frac{k_i}{s} E(s) - (k_p + k_d s) Y(s) \quad (54)$$

PID 제어기의 파라미터 벡터 x 는

$$x^T = [k_i \ k_d \ k_p]. \quad (55)$$

특성다항식 $\delta(s)$ 의 각 계수는 x 의 선형함수이기 때문에 다음 식으로 표현된다.

$$\delta_i(k_i, k_d, k_p) = p_i^T \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \\ k_p \end{bmatrix} + c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (57)$$

여기서, $p_0^T = [n_0 \ 0 \ 0]$, $c_0 = 0$,

$$p_1^T = [n_1 \ 0 \ n_0], \quad c_1 = d_0,$$

$$p_2^T = [n_2 \ n_0 \ n_1], \quad c_2 = d_1,$$

⋮

$$p_{n-1}^T = [0 \ n_{m-1} \ n_m], \quad c_{n-1} = d_{l-1},$$

$$p_n^T = [0 \ n_m \ 0], \quad c_n = d_l.$$

특성다항식의 계수를 이용하면 특성비 및 일반화 시정수는 다음과 같다.

$$\alpha_i = \frac{\delta_i^2}{\delta_{i-1}\delta_{i+1}} = \frac{(p_i^T x + c_i)^2}{(p_{i-1}^T x + c_{i-1})(p_{i+1}^T x + c_{i+1})}, \quad (57)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\tau = \frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{(p_1^T x + c_1)}{(p_0^T x + c_0)} = \frac{(d_0 + n_1 k_i + n_0 k_p)}{n_0 k_i}. \quad (58)$$

먼저 특성다항식의 계수로부터 아래와 같은 안정도 셋 S_δ 를 구한다.

$$S_\delta := \{x \mid \delta_j(k_i, k_d, k_p) > 0, \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots, n\} \quad (59)$$

PID 제어기의 파라미터 x 중 1개의 파라미터 $x_3 = k_p^*$ 로 고정하고, $\delta_j(x)$ 에 대한 새로운 부등식 조건을 얻는다. 이것은 3.2절의 1차보상기 설계 시 x_3 를 고정시키는 것과 유사하다. 식(56)에 $p_j^T = [n_j \ n_{j-2} \ n_{j-1}]$ 를 대입하면,

$$\delta_j(k_i, k_d) = [n_j \ n_{j-2}] \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \end{bmatrix} + n_{j-1} k_p^* + d_{j-1} > 0, \quad (60)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

여기서, $j-1 < 0$ 이면 $n_{j-1} = d_{j-1} = 0$.

식 (60)을 만족하는 셋은 (k_i, k_d) 평면에서 항상 볼록 다각형 형태로 나타난다. 두 번째 안정도 셋 S_α 는 다음과 같다.

$$S_\alpha := \{x \mid f_k(k_i, k_d, k_p) < 0, \text{ for } k = 1, 2, \dots, n-2\} \quad (61)$$

함수 $f_k(k_i, k_d, k_p)$ 에 식 (56)의 계수를 대입하여 정리하면

$$f_k(k_i, k_d, k_p) = \frac{1}{2} x^T H_k x + R_k^T x + q_k \quad (62)$$

여기서,

$$H_k = 2 \left(\eta \begin{bmatrix} n_{k+2} \\ n_k \\ n_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{k-1} & n_{k-3} & n_{k-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_{k-1} \\ n_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k & n_{k-2} & n_{k-1} \end{bmatrix} \right)$$

$$R_k^T = \eta(d_{k+1}[n_{k-1} \ n_{k-3} \ n_{k-2}] + d_{k-2}[n_{k+2} \ n_k \ n_{k+1}] - (d_k[n_k \ n_{k-2} \ n_{k-1}] + d_{k-1}[n_{k+1} \ n_{k-1} \ n_k])$$

$$q_k = \eta d_{k-2} d_{k+1} - d_k d_{k-1},$$

$k-2 < 0$ 이면 $n_{k-2} = d_{k-2} = 0$.

x_3 의 sweep 범위에서 차례로 다른 x_3 를 설정하고 이 과정을 반복하면 k_p^* 축과 (k_i, k_d) 평면으로 이루어진 3차원 공간에 셋 S_α 를 나타낼 수 있다. 위에서 구한 두 개의 셋을 모두 만족하는 안정한 셋을 S_{PID} 로 표시한다. 즉,

$$S_{PID} = S_\delta \cap S_\alpha \quad (63)$$

부연 3 : 3개의 PID 중 k_p 를 sweeping parameter로 선택한 이유는, k_p 는 k_d, k_i 와 독립적으로 선택할 수 있으나 k_d 와 k_i 는 서로 종속적이라는 Ho[11]의 결과를 따른 것이다. 또한 k_p 의 sweep 범위를 결정하는 것도 Hurwitz 필요조건에 근거한 근래적의 이탈점으로부터 계산하는데 Ho가 제시한 방법을[11] 이용하였다. ♣♣♣

3.4 PI 제어기의 안정영역

그림 5와 같은 I-P제어기에 의한 안정화 문제를 고려하기로 한다. 3.3절의 I-PD제어기의 안정화 문제의 전개과정 유사하기 때문에 간단히 정리하기로 한다.

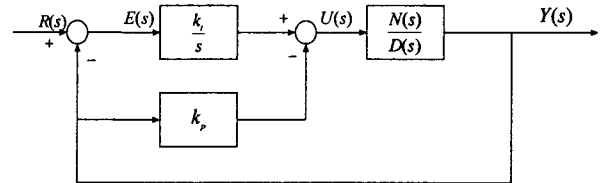


그림 5 I-P 제어기를 갖는 피드백 시스템
Fig. 5 Feedback control system with I-P control structure

플랜트는 식(53)과 동일하며 제어입력은 다음과 같다.

$$U(s) = \frac{k_i}{s} E(s) - k_p Y(s) \quad (64)$$

폐루프시스템의 특성다항식은 다음과 같다.

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s) \quad (65)$$

I-P제어기의 파라미터 벡터 x 는 다음과 같다.

$$x^T = [x_1 \ x_2] = [k_i \ k_p] \quad (66)$$

특성다항식 $\delta(s)$ 의 각 계수는 x 의 선형함수이기 때문에 다음 식으로 표현된다.

$$\delta_i(k_i, k_p) = p_i^T \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \end{bmatrix} + c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (67)$$

여기서, $p_0^T = [n_0 \ 0]$, $c_0 = 0$,

$$p_1^T = [n_1 \ n_0], \quad c_1 = d_0,$$

$$p_2^T = [n_2 \ n_1], \quad c_2 = d_1,$$

⋮

$$p_{n-1}^T = [n_m \ n_{m-1}], \quad c_{n-1} = d_{l-1},$$

$$p_n^T = [0 \ n_m], \quad c_n = d_l.$$

먼저 특성다항식의 계수로부터 아래와 같은 안정도 셋 S_δ 를 구한다.

$$S_\delta := \{x \mid \delta_j(k_i, k_p) > 0, \text{ for } j=0, 1, 2, \dots, n\} \quad (68)$$

PI 제어기의 파라미터 x 중에 1개의 파라미터를 $x_2 = k_p^*$ 로 고정하고 $\delta_j(x)$ 를 다시 정리하면,

$$\delta_j(k_i) = n_j k_i + n_{j-1} k_p^* + d_{j-1} > 0, \quad j=0, 1, \dots, n \quad (69)$$

여기서, $j-1 < 0$ 이면 $n_{j-1} = d_{j-1} = 0$.

식(69)를 만족하는 k_i 의 범위는 간단하게 구할 수 있다.

두 번째 안정도 셋 S_α 은 아래와 같다.

$$S_\alpha := \{x \mid f_k(k_i, k_p) < 0, \text{ for } k=1, 2, \dots, n-2\} \quad (70)$$

함수 $f_k(k_i, k_p)$ 에 식(67)의 계수를 대입하여 정리하면

$$f_k(k_i, k_p) = \frac{1}{2} x^T H_k x + R_k^T x + q_k \quad (71)$$

여기서,

$$H_k = 2 \left(\eta \begin{bmatrix} n_{k+2} \\ n_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{k-1} & n_{k-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k & n_{k-1} \end{bmatrix} \right),$$

$$R_k^T = \eta (d_{k+1} \begin{bmatrix} n_{k-1} & n_{k-2} \end{bmatrix} + d_{k-2} \begin{bmatrix} n_{k+2} & n_{k+1} \end{bmatrix}) - (d_k \begin{bmatrix} n_k & n_{k-1} \end{bmatrix} + d_{k-1} \begin{bmatrix} n_{k+1} & n_k \end{bmatrix}),$$

$$q_k = \eta d_{k-2} d_{k+1} - d_k d_{k-1},$$

$$k-2 < 0 \text{ 이면 } n_{k-2} = d_{k-2} = 0.$$

$k_p = k_p^*$ 로 놓고, $f_k(k_i)$ 에 관한 2차부등식을 만족하는 셋을 구하여 (k_i, k_p) 평면에 셋 S_α 를 나타낸다. 다른 k_p 에 대하여 고정시키고 위 과정을 반복한다. 위에서 구한 두 개의 셋을 모두 만족하는 안정한 셋을 S_{PI} 로 표시한다. 즉,

$$S_{PI} = S_\delta \cap S_\alpha. \quad (72)$$

4. 시간응답규격을 위한 1차 및 PID 제어기 설계

3장에서 Lipatov 안정 충분조건에 근거한 1차 및 PID 안정화기 셋 S_{LS} 을 구하는 방법을 제시하였다. 이제 남은 문제는 S_{LS} 로부터 시간영역 설계 규격인 오버슈트와 정착시간을 만족하는 제어기의 이득 셋 S^* 를 구하는 것이다. 오버슈트 문제를 다루는 열쇠는 2장에서 정리한 바와 같이 과도응답특성에 지배적인 영향을 주는 특성비는 단지 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 라는 Kim[17,18]의 결과를 이용하는 것이다. 임의의 페루프 시스템의 지배특성비가 부등식 조건 $\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 \geq \alpha_3^*$ (여기서 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 는 원하는 제동특성을 갖는 지배특성비 값)을 만족하도록 제어기 이득을 결정하는 문제로 치환된다. 나머지 특성비 $\alpha_i \geq \alpha_i^*, 4 \leq i \leq n-1$ 들은 시스

템이 안정하기만 하면 시간응답에 미치는 영향은 미미하므로 자유롭게 선정되어도 무방하다. 정착시간 설계조건은 2장에서 정리한 바와 같이 일반화 시정수 τ 를 조정하여 달성할 수 있다. 안정영역의 경계와 플랜트 영점에 기인한 오버슈트의 한계 조건에 따라 τ 는 상하한 값 $[\tau^-, \tau^+]$ 으로 나타낼 수 있다. 플랜트가 영점을 포함하는 경우에는, 일반화시정수를 최저값 τ^- 으로 조정하여 제어기 이득 셋을 결정한다. 본 장에서는 3장의 3가지 제어기 구조에 대하여 시간응답설계규격을 만족하는 제어기 이득 셋 S^* 의 결정 방법을 기술한다.

4.1 1차 제어기

그림 2와 같은 2파라미터 제어기 구조를 고려한다. 3.2절의 방법에 의해 이미 Lipatov 충분조건을 만족하는 1차제어기 이득 셋 S_F 를 구하였다고 가정한다. 2장에서 언급한 바와 같이 원하는 제동특성을 갖는 n 차 시스템의 지배특성비 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 를 선택한다. 선택방법은, 먼저 K -다항식을 갖는 n 차 APS $T_k(s)$ 를 고려하여 임의의 τ 에 대해 α_1 을 2보다 큰 값으로 증가시키면서 원하는 오버슈트를 주는 지배특성비를 결정하게 된다. 정착시간을 고려하여 $[\tau^-, \tau^+]$ 를 결정하는데, 만일 플랜트가 영점 $N(s)$ 을 가지면 $T^*(s) = N(s) \cdot T_k(s)$ 에 대해 동일한 α_k 를 유지하면서 τ 를 증가시키면 응답속도가 느려지면서 영점에 의한 오버슈트도 감소하게 된다. 반대로 τ 를 감소시키면 응답속도가 빨라지면서 오버슈트가 증가한다[18]. $N(s)$ 가 상수이면 τ^- 는 0보다 큰 아주 작은 값을 선택하고, 상수가 아니면 $T^*(s)$ 의 스텝응답의 오버슈트가 원하는 값을 갖게 하는 τ 로 선택한다. τ^+ 는 $T^*(s)$ 의 스텝응답이 원하는 정착시간을 갖게 하는 값으로 선택한다. 이제 S_F 로부터 원하는 최대오버슈트와 정착시간 만족하는 1차 제어기의 부분 셋을 구하는 문제는 S_F 내에서 아래의 부등식을 만족하는 셋 (x_1, x_2, x_3) 를 구하는 문제로 근사화 된다.

$$\alpha_i \geq \alpha_i^*, \quad i=1, 2, 3 \quad (73)$$

$$\tau^- \leq \tau \leq \tau^+ \quad (74)$$

식 (73)의 해 영역을 구하기 위하여, 식 (45)를 이용하여 새로운 함수 $g(x_1, x_2, x_3)$ 를 정의한다.

$$g_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} x^T M_i x + N_i^T x + l_i \quad (75)$$

여기서,

$$M_i := 2 [\alpha_i^* p_{i-1} p_{i+1}^T - p_i p_i^T],$$

$$N_i^T := \alpha_i^* (c_{i-1} p_{i+1}^T + c_{i+1} p_{i-1}^T) - 2c_i p_i^T,$$

$$l_i := \alpha_i^* c_i c_{i+1} - c_i^2.$$

$\alpha_i \geq \alpha_i^*$ 를 만족하는 x 의 부분 셋은 다음과 같이 된다.

$$S_i := \{x \mid g_i(x_1, x_2, x_3) < 0, \quad i=1, 2, 3\} \quad (76)$$

식 (76)에 정의된 셋은 2차 부등식이며, S_α 를 구하는 방법과 동일하기 때문에, S_1, S_2, S_3 를 얻는 과정은 생략하기로 한다. 마지막으로 정착시간 요구조건이 만족되는 제어기 계수 셋을 S_τ 라 놓으면, 식(46)으로부터,

$$S_\tau := \{x \mid \tau^- \leq \tau \leq \tau^+\}. \quad (77)$$

여기서, $\tau = \frac{(d_0 + d_1x_3 + n_0x_1 + n_1x_2)}{(d_0x_3 + n_0x_2)}$.

결국, 주어진 시간영역 성능과 안정도를 만족하는 x 의 셋은 다음 교집합 영역으로 나타난다.

$$S_F^* := S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_\tau \cap S_F. \quad (78)$$

$x_3 \in S_F$ 값을 변화시키면서, 반복적으로 (x_1, x_2) 부분집합을 계산하면 1차 제어기의 이득 셋 S_F^* 를 구할 수 있다. 고정된 x_3 에 대한 제어기 이득 S_F^* 를 그림 6에 도식적으로 나타내었다. 그림 6에서 S^C 는 S_F 를 제외한 영역이다. 즉, Lipatov 조건을 만족하지 않는 영역이다.

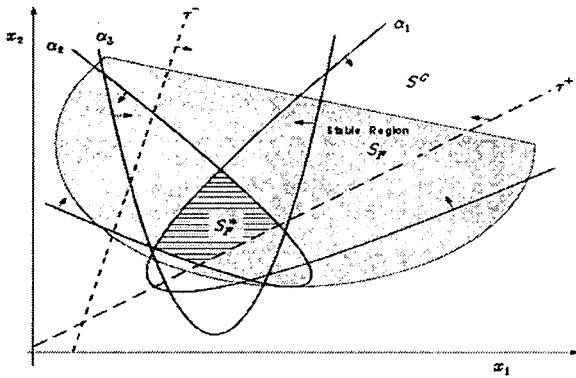


그림 6 고정된 x_3 에서 (x_1, x_2) 평면에서의 해 S_F 와 S_F^*
 Fig. 6 Regions of S_F and S_F^* in (x_1, x_2) plane at a fixed x_3

4.2 PID 제어기

그림 4의 I-PD 제어기 구조에 대하여 3.3절의 방법에 의해 PID 제어기의 안정영역 S_{PID} 가 구해졌다고 가정한다. 4.1절에서와 마찬가지로 시간응답 설계규격을 만족하는 $T^*(s)$ 으로부터 지배특성비 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 와 τ^-, τ^+ 를 선택한다. 그러면 문제는 S_{PID} 내에서 (58),(59)를 이용하여 다음 부등식을 만족하는 부분 셋 (k_i, k_d, k_p) 를 구하는 것이다.

$$\alpha_i \geq \alpha_i^*, i = 1, 2, 3 \quad (79)$$

$$\tau^- \leq \tau \leq \tau^+ \quad (80)$$

부등식 (79),(80)을 만족하는 해는 4.2절의 (75)~(77)과 유사하다. 결국, 주어진 시간영역 성능과 안정도를 만족하는 x 의 셋은 다음 교집합 영역으로 나타난다.

$$S_{PID}^* := S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_\tau \cap S_{PID}. \quad (82)$$

$k_p \in S_{PID}$ 값을 변화시키면서, 반복적으로 (k_i, k_d) 부분집합을 계산하면 최종 PID 제어기의 이득 셋 S_{PID}^* 를 구하게 된다. 고정된 한 $k_p \in S_{PID}$ 에서 (k_i, k_d) 평면에서 S_{PID}^* 를 나타내면 그림 6과 유사하다.

4.3 PI 제어기

그림 5와 같은 I-P 제어기의 경우에 안정도와 시간응답규격을 만족하는 제어기 이득 셋 결정은 PID 제어기의 경우와 거의 유사하게 전개할 수 있기 때문에 자세한 기술은 생략하기로 한다. 결과적으로, 주어진 시간영역 성능과 안정도를 만족하는 x 의 셋은 다음 교집합 영역으로 나타난다.

$$S_{PI}^* := S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_\tau \cap S_{PI}. \quad (83)$$

5. 적용 예제

주어진 선형 시불변 플랜트에 대해 3장의 2차 부등식 조건으로부터 시스템을 안정화시키는 1차/PID 제어기의 이득 셋을 구하고, 4장의 지배특성비의 부등식 조건을 적용하여, 시간영역 성능요구조건을 만족시키는 1차/PID 이득 셋을 구하는 과정을 예제를 통해 보이고자 한다.

예제 2 (1차 제어기) : 그림 2의 2파라미터 구조를 갖는 제어시스템에서 플랜트 $G(s)$ 가 다음과 같이 주어진 경우를 고려한다.

$$G(s) = \frac{s+1}{s^5 + 12s^4 + 61s^3 + 144s^2 + 71s - 290}$$

폐루프 시스템의 스텝응답이 다음의 설계 조건을 만족하도록 1차 제어기 이득 셋을 구해 보자.

- i) 오버슈트 1% 이내,
- ii) 1% 정착시간이 20초 이내

해 : 특성다항식의 모든 계수는 양의 값을 가져야 하는 조건 (35)로부터 $x_3 \in [-1.0, \infty]$ 를 얻는다. x_3 구간에 대해 부등식 (48)를 만족하는 제어기 이득 셋을 얻는다. x_3 의 값을 0.1 간격으로 변화시키면서 (50)에 의해 구한 1차 제어기의 안정영역 S_F 를 그림 7에 나타내었다. 각 x_3 에 대응하는 (x_1, x_2) 평면을 3차원 공간에 도시하였다. 다음은 시간영역 성능요구조건을 만족하는 1차 제어기의 이득 셋을 얻기 위하여 기준모델 $T^*(s) = (s+1)/\delta_k(s)$ 를 구성한다(여기서 $\delta_k(s)$ 는 6차 K-다항식). 2장과 4.1절에서 설명한 방식에 따라 $T^*(s)$ 가 원하는 오버슈트를 갖는 α_1^* 를 선택하면, (6)에 의해 나머지 특성비 α_2^*, α_3^* 를 얻을 수 있다. 이 예제에서는 $\alpha_1^* = 2.265, \alpha_2^* = 1.761, \alpha_3^* = 1.6365$ 와 정착시간 설계조건을 만족하는 $\tau^* \in [\tau^-, \tau^+] = [5.2, 5.7]$ 을 선택하였다. 그림 8은 $x_3 = 0.8$ 일 때의 (x_1, x_2) 평면에서 S_F 와 S_F^* 영역을 보여준다. 그림 9(a)는 x_3 값을 $[0.7, 1.6]$ 범위에서 0.1 간격으로 고정시키고 부등식 (77),(78)을 만족하는 (x_1, x_2) 의 부분 셋을 구하여 3-D 그래픽으로 나타낸 것이

다. 그림 9(b)는 S_F^* 내에서 선택한 임의의 1차 제어기에 의한 스텝응답으로써 모두 설계규격을 만족함을 보여 주고 있다. 그림 7의 S_F 와 그림 9(a)의 S_F^* 를 비교하면 시간응답을 만족하는 S_F^* 가 매우 작고 특이한 영역임을 알 수 있다.

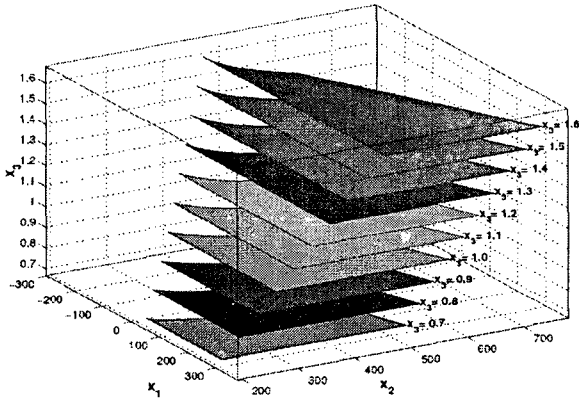


그림 7 시스템을 안정화시키는 1차 제어기 셋 S_F .

Fig. 7 The set of stabilizing first order controllers, S_F

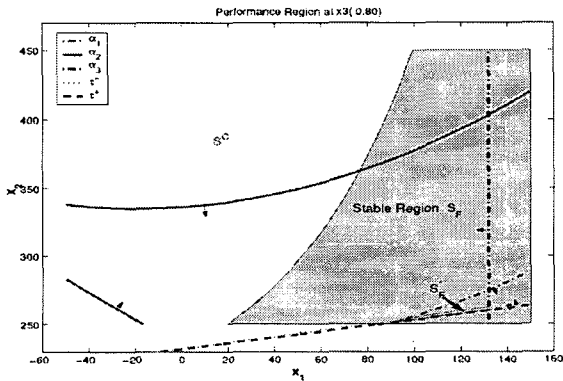
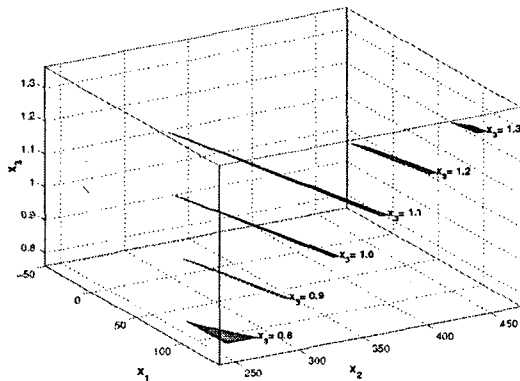
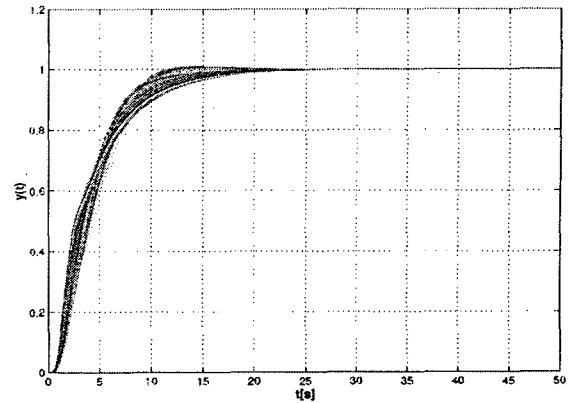


그림 8 $x_3 = 0.8$ 에서 (x_1, x_2) 의 해 S_F 와 S_F^* .

Fig. 8 Regions of S_F 와 S_F^* in (x_1, x_2) plane at $x_3 = 0.8$



(a) 안정도와 시간응답규격을 만족하는 1차제어기 셋 S_F^*
 (a) The set of first order controller satisfying both stability and time domain specifications, S_F^*



(b) $x \in S_F^*$ 에 대한 스텝 응답

(b) Step responses for $x \in S_F^*$

그림 9. 시간영역규격을 만족하는 1차제어기 셋 S_F^* 와 스텝 응답 특성.

Fig. 9 The admissible set of first-order controllers for time response requirements and step responses

예제 3 (PID 제어기) 그림 4의 I-PD구조를 갖는 제어시스템에서 다음 플랜트 $G(s)$ 를 고려한다.

$$G(s) = \frac{800}{s^5 + 12s^4 + 88s^3 + 407s^2 + 2000s + 400}$$

폐루프 시스템의 스텝응답이 다음의 설계 조건을 만족하도록 PID 제어기 이득 셋을 구해 보자.

- i) 오버슈트 0.1% 이내,
- ii) 1% 정착시간이 20초 이내

해 : 부언 3에서 설명한 Ho 방법을 사용하여 $k_p \in [-0.2, 3.7]$ 를 얻는다. k_p 구간에서 부등식 (61)를 만족하는 제어기 이득 셋을 얻는다. 그림 10은 고정된 k_p 에 대해 구한 (k_i, k_d) 안정영역을 3차원 공간에 나타낸 것이다. 이어서 오버슈트 요구조건을 만족하는 PID 제어기의 이득 셋을 얻기 위하여 예제 2에서처럼 지배특성비를 선택한다. 본 예제에서는 $\alpha_1^* = 2.310$, $\alpha_2^* = 1.822$, $\alpha_3^* = 1.733$ 를 선택하였으며, 정착시간 설계조건을 만족하는 $\tau^* \in [\tau^-, \tau^+] = [0.3, 5.2]$ 를 얻었다. 그림 11은 $k_p = 0.7$ 일 때의 (k_i, k_d) 의 해 S_{PID} 와 S_{PID}^* 를 보여준다. 그림 12(a)는 고정된 k_p 값 각각에 대한 부등식 (80),(81)을 만족하는 PID셋 S_{PID}^* 를 나타내었다. 그림 12(b)는 S_{PID}^* 내에서 선택한 임의의 PID 제어기에 의한 스텝응답으로써 모두 설계규격을 만족함을 보여 주고 있다. 그림 10의 S_{PID} 와 그림 12(a)의 S_{PID}^* 를 비교하면 시간응답을 만족하는 영역이 k_p 값에 따라 매우 다름을 보여주고 있다. ♣♣♣

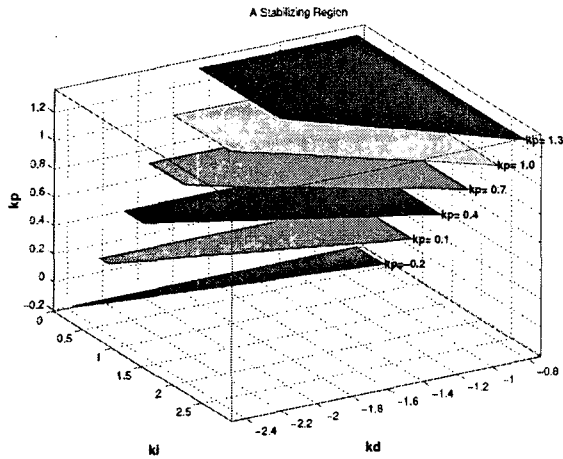
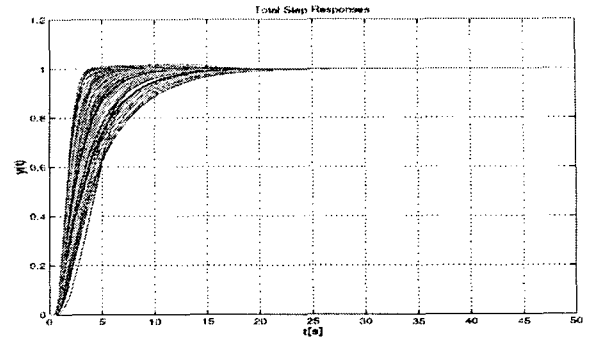


그림 10 시스템을 안정화시키는 PID 제어기 셋 S_{PID}
 Fig. 10 The set of stabilizing PID controllers, S_{PID}



(b) $x \in S_{PID}^*$ 에 대한 스텝 응답
 (b) Step responses for $x \in S_{PID}^*$

그림 12 시간영역규격을 만족하는 PID 셋 S_{PID}^* 과 스텝 응답 특성
 Fig. 12 The admissible set of PID controllers for time response requirements and step responses

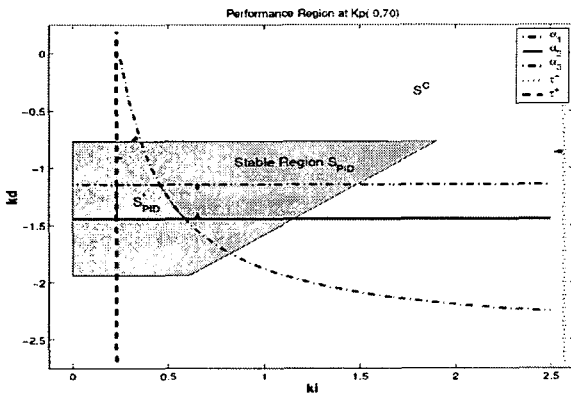
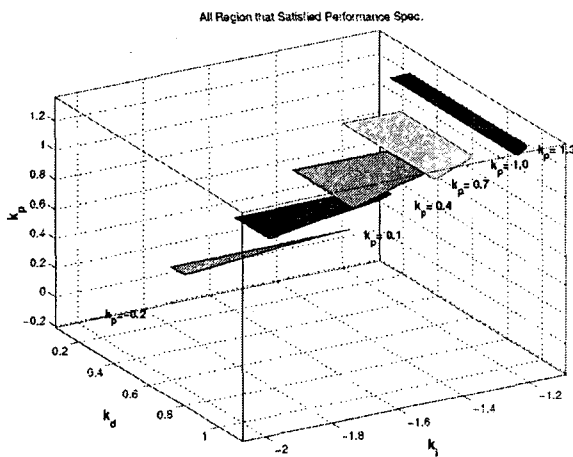


그림 11 $k_p = 0.7$ 에서 (k_i, k_d) 의 해 S_{PID} 와 S_{PID}^*
 Fig. 11 Regions of S_{PID} and S_{PID}^* in (k_i, k_d) plane at $k_p = 0.7$



(a) 안정도와 시간응답규격을 만족하는 PID 셋 S_{PID}^*
 (a) The set of PID controllers satisfying both stability and time domain specifications, S_{PID}^*

6. 결론

주어진 선형 시불변계의 저차 안정화기의 존재 또는 저차 제어기를 결정하는 문제에 대한 기존의 결과는 주로 플랜트의 극과 영점에 근거한 충분조건들이었다. 그러한 저차 제어기가 원하는 시간응답규격을 만족하도록 설계하는 방법은 제시되지 않았다. 본 논문에서는 저차 제어기의 존재성을 결정하는 문제를 Lipatov의 안정도 충분조건에 근거한 2차 부등식(QI)을 만족하는 셋을 구하는 문제로 변환하였다. 이 방법은 극과 영점을 이용하지 않고 계수공간에서 대수적으로 처리할 수 있어서 비록 충분조건이지만 저차 안정화기의 셋을 쉽게 구할 수 있음을 보였다. 4차 이상의 미지변수를 갖는 2차 부등식 문제의 일반적 해법은 제시하지 못하였으나 가장 널리 사용되고 있는 1차/PID 제어기의 안전한 셋을 구하는 알고리즘을 제시하였다. 이 방법은 그 자체로도 유용하지만 1차 이상인 저차제어기의 셋을 구하는 문제로 확장하는 첫 단계라 할 수 있다. 또한 시간영역 설계조건인 오버슈트와 정착시간을 만족하는 1차/PID 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 페루프 시스템의 제동특성은 페루프 전달함수의 지배 특성비 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 에 의해 근사적으로 결정될 수 있으며 응답속도는 일반화 시정수 τ 에 의해 조절될 수 있다는 Kim 등[1]의 결과를 적용하였다. 이 조건은 모두 계수 공간에서 다룰 수 있으며 안정화기 조건과 마찬가지로 QI 문제로 정식화됨을 보였다. 본 논문에서 제안한 1차/PID 제어기 설계 방법은, 제어기 파라미터의 3차원 공간상에 시간영역 설계조건을 만족하는 셋을 도식적으로 보여주기 때문에 파라미터 강인성을 고려하기가 쉽고 기타 설계 시 매우 풍부한 정보를 제공해준다. 산업 현장에서는 대부분 1차/PID 제어기를 사용하고 있기 때문에 재동조(retuning)에도 유용하게 적용할 수 있을 것으로 본다.

제어기의 구조가 제한되지 않은, 일반적인 저차제어기에 확장하는 것은 추후의 연구과제로 남겨 놓았다. 이것은 4개 이상의 파라미터 공간에 2차형 부등식들의 교집합을 만족하

는 영역을 구하는 알고리즘을 찾음으로써 해결될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 : R01- 2003-000-11738-0)와 2005년도 충북대학교 학술연구지원사업 연구비의 지원으로 수행된 연구로서, 관계부처에 감사드립니다.

참 고 문 헌

[1] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient Response Control via Characteristic Ratio Assignment," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-48, no.12, pp.2238-2244, Dec. 2003.

[2] A. V. Lipatov and N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems," *Automation and Remote Control*, Vol. 39, pp. 1285-1291, 1979.

[3] C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design : Transfer-function, State space and Algebraic methods*, Saunders College Pub., 1993.

[4] K. Zhou, *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, NJ, 1998.

[5] M. A. Dahleh and I. J. Diaz-Bobillo, *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*, Prentice Hall Publishing, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[6] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, Optimal, or Fragile?," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-42, pp. 1098-1105, 1997.

[7] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "State-space Design of Low-order Stabilizers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, pp. 182-186, 1990.

[8] D. W. Gu, B. W. Choi, and I. Postlewaite, "Low-order Stabilizing Controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-38, pp. 1713-1717, 1993.

[9] A. Linnemann, "A Class of Single-Input Single-Output Systems Stabilizable by Reduced-order Controllers," *System & Control Letter*, Vol. 11, pp. 27-33, 1988.

[10] Q. G. Wang, T. H. Lee, and J. H. Lee, "Low-order Stabilizers for Linear Systems," *Automatica*, Vol. 33, pp. 651-654, 1997.

[11] A. Datta, M. T. Ho, and S. P. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*, London, U. K. : Springer-Verlag, 2000.

[12] R. N. Tantar, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Stabilization of continuous time systems by first order controllers," *Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon, Portugal, July, 2002.

[13] P. Naslin, *Essentials of Optimal Control*, Boston Technical Publishers, Inc., 1969.

[14] K. S. Kim, Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P.

Bhattacharyya, "PID Controller Design with Response Specifications," *Proc. of the 2003 American Control Conference*, Denver, Colorado, 2003.

[15] Youngchol Kim, Keunsiik Kim and Shunji Manabe, "Sensitivity of Time Response to Characteristic Ratios," *Proc. of the 2004 American Control Conference*, pp.2723-2728, Boston, USA, June, 2004.

[16] 김근식, 조태신, 김영철, "시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계," 제어·자동화·시스템공학회지 제9권 4호, pp.259-268, 2003.

[17] Shunji Manabe, "Coefficient Diagram Method," Proc. of IFAC Symposium on Advanced Control in Aerospace, Seoul, Korea, 2002.

[18] 한상용, 조태신, 김영철, "단조 스텝응답을 주는 연속계 전달함수의 합성 조건: 가설," 2003정보및제어학술회의 논문집, 춘천, 2003.

저 자 소 개



김영철 (金永喆)

1981년 고려대학교 전기공학과(공학사), 1983년 서울대학교 전기공학과 (공학석사), 1987년 서울대학교 전기공학과(공학박사), 1988년~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 교수. 1992년~1993년 미국 Texas A&M Univ. Post-Doctoral Fellow. 2001년~2002년 미국 Vandervilt Univ./Tennessee State Univ. 방문교수. 대한전기학회 제어계측연구회장. 관심분야는 Linear Control Theory, Parametric Robust Control 등.



조태신 (趙泰信)

1993년 충북대학교 전자공학과(공학사), 1995년 충북대학교 전자공학과(공학석사), 2004년 충북대학교 전자공학과(공학박사). 2004년 1월 ~ 현재 (주)테크원 생산기술연구소 근무



김근식 (金瑾植)

한양대학교 전자공학과(공학사 1985년, 공학석사 1987), 충북대학교 전자공학과(공학박사 2003년). 국방과학연구소(1987년~1994년). 자동차부품연구원(1994년~1996년). 유비쿼터스바이오정보기술연구원(2004년~2005년). 아주자동차대학 부교수(1996년~현재). 관심분야는 저차제어기 설계