

논문 2006-43TC-2-6

Cumulant 를 이용한 미지 시스템의 AR 식별에 관한 연구

(A Study on the AR Identification of unknown system using Cumulant)

임승각*

(Seung Gag Lim)

요약

본 논문은 잡음이 존재하는 미지 시스템 출력 신호의 3차 통계치인 cumulant 를 이용한 AR 식별에 관한 것이다. 미지 시스템 식별을 위한 알고리즘에서는 Parametric Modeling 기법중에서 Global Convergence 보장 및 시스템의 진폭과 위상 정보를 모두 표현할 수 있는 Cumulant 를 이용한 AR (Auto Regressive) 식별 방법을 적용하였다. 식별 과정에서 미지 시스템을 하나의 AR 시스템으로 간주하였고 입력 신호를 발생하여 이를 통과시킨 후 잡음이 부가된 출력 신호를 얻어 이를 이용하였다. 신호대 잡음비의 변화에 따른 AR 시스템의 식별을 수행한 결과 원래의 시스템 출력치와 유사한 양호한 식별 결과를 얻을 수 있었고 극점이 z 변환의 단위원내에 존재함을 확인하였다.

Abstract

This paper deals with the AR Identification of unknown system using cumulant, which is the 3rd order statistics of output signal in the presence of the noise signal. The algorithms for identification of unknown system, we applies to the AR identification method using the cumulant which is possible to the guarantees of global convergence and the representation of amplitude and phase information of system among with the method of parametric modeling. In the process of identification, we considered unknown system to the one of AR system. After the generation of input signal, it was being passed through the system, then We use the its output signal that the noise is added. As a result of identification of AR system by changing the signal to noise ratio, we get the fairly good results compared to original system output values and confirmed that the pole was located in the unit circle of z transform.

Keywords : Cumulant, AR, Identification, Trispectrum, Parametric Identification

I. 서 론

시스템 식별 (System Identification) 은 미지 시스템으로부터의 관찰된 신호 또는 데이터를 이용하여 시스템의 수학적인 모델을 세우는 과정을 말하며 다양한 다양한 분야에서 사용되고 있다^{[1][2]}. 이를 응용하는 분야로서는 지하 자원 탐사, 음성 신호 처리와 영상 신호 처리의 Blurring 보상외에도 통신에서 무선 채널의 페이딩과 간섭 (Interference), 부호간 간섭 및 대역 제한과

케이블과 같은 유선 채널에서는 대역 제한, 부호간 간섭과 짜그러짐 같은 장애 요인에 대한 극복 대책으로 통신 채널 시스템을 식별한 후 이의 역을 취함으로서 이와 같은 장애 요인들을 극복할 수 있으므로 적용 등화기 (Adaptive Equalizer) 또는 사전 왜곡기 (Pre Distorter) 등을 들 수 있다^[5]. 이때 미지의 시스템의 주파수 특성을 식별하기위한 별도의 알고리즘이 필요하게되며 이를 위한 방식으로는 Parametric 방식과 Nonparametric 방식의 2 가지가 있다. Nonparametric 방식은 상호 약속된 입력 신호와 출력 신호의 주파수 스펙트럼을 비교하여 시스템의 주파수 특성을 얻는 방식을 말하며 상관분석법 (Correlation Analysis), Prony 알고리즘을 들 수 있지만 식별된 시스템이 폐루프이면 스펙트럼에 오

* 정희원, 국립 공주대학교 정보통신공학부
(Department of Information and Telecommunication Engineering, Kongju. National University)
접수일자 : 2005년7월25일, 수정완료일 : 2006년2월15일

차가 있을 수 있으며 입력 신호가 주기적이어야 하므로 개방 루프에서만 적용할 수 있다는 제약점을 갖게 된다^[2]. 반면 Parametric 방식은 입력 신호에 대한 제한이 없으며 폐 루프에서도 적용할 수 있으며 AR (Auto Regressive), MA (Moving Average), ARMA (Auto Regressive Moving Average) 의 3 가지 형태의 유한 차수의 파라메터로 식별할 수 있는데 이들은 서로 다른 특징을 갖게된다. AR 은 식별된 채널의 주파수 특성에서 피크점을 강조하며 MA 는 계곡점을 강조하지만 ARMA 는 피크점과 계곡점을 강조하는 특징을 갖게되어 Nonparametric 방식의 단점을 개선할 수 있는 장점은 있지만 이를 얻기위한 연산량이 증대된다^[3,4]. 본 문에서는 이들중에서 최소의 연산량으로 식별할 수 있는 AR 파라메터를 Global convergence를 보장하면서 시스템의 진폭과 위상 정보를 정확하게 포함할 수 있는 4 차 상관 함수인 cumulant를 이용하여 식별하고자 한다. 본 논문은 미지의 시스템을 통과한 신호에 백색 가우시안 잡음을 부가시킨 출력 신호를 이용하여 시스템을 AR 이 존재하는 환경하에서 수신된 신호로 부터 Parametric AR 식별에 관한 것이다. 미지 시스템의 입력 신호로는 Binary PAM (Pulse Amplitude Modulation) 신호를 발생한 후 미지의 시스템인 디지털 필터를 통과시킨 후 임의의 신호대 잡음비 (SNR : Signal to Noise Ratio) 를 갖도록 잡음을 부가하여 출력 신호를 얻었은 후 이의 Cumulant 를 계산하여 AR 시스템으로의 식별을 컴퓨터 시뮬레이션으로 수행하였다. 식별의 적합성을 제시하기 위한 검증 과정으로 원래의 시스템 출력 파형과 PAM 신호를 식별된 AR 시스템을 통과시켰을 때의 합성된 파형을 비교, 제시하였다. II장에서는 본론으로서 신호의 모델, AR 파라메터의 식별 관련된 이론을 설명한 후 III장에서는 시뮬레이션 결과를 제시하고 마지막으로 IV장에서는 결론을 내리겠다.

II. 본 론

1. 미지 시스템 모델과 가정

미지 시스템의 입력 신호 $u(n)$ 과 출력 신호 $y(n)$ 은 식(1) 과 같이 정의된다고하고 그림 1 은 이를 나타낸 것이다. .

$$\sum_{k=0}^p a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^q b(k)u(n-k) \quad (1)$$

$$z(n) = y(n) + w(n)$$

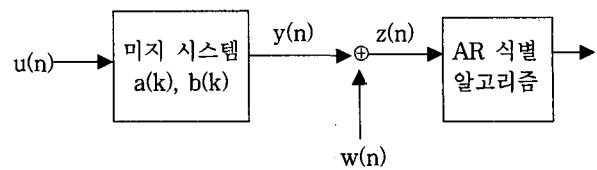


그림 1. 미지 시스템 모델

Fig. 1. Unknown system model.

여기서 미지의 ARMA 시스템 AR 부는 차수가 p 이고 계수가 $a(k)$ 이며 MA 부는 차수가 q 이고 계수가 $b(k)$ 이며 $u(n)$ 은 시스템의 입력 신호를 나타낸다. 이와같은 시스템의 출력 $y(n)$ 에 가우시안 잡음 $w(n)$ 이 부가되어 최종 시계열 $z(n)$ 을 구성하게된다. 여기서 미지 시스템의 차수 (p,q) 는 알고 있으며 시스템의 입력 신호 $u(n)$ 은 독립 일양 분포 (iid ; Independent Identical Distribution) 하는 PAM, QAM 등의 신호와 같은 비가우시안 신호로서 2 차 이상의 통계치인 cumulant $\gamma_u \neq 0$ 라고 가정하자. $y(n)$ 과 $w(n)$ 은 서로 독립적이며 $z(n)$ 의 cumulant 는 $y(n)$ 의 cumulant 와 $w(n)$ 의 cumulant 의 합으로 표시되지만 $w(n)$ 의 cumulant 는 gaussian 특성으로 인해 2 차 이상의 고차 통계에서는 0 가 될 것이므로 잡음이 존재하는 $z(n)$ 의 cumulant 는 무잡음 상태의 $y(n)$ 의 cumulant 와 동일하게될 것이다^[6,9].

2. Cumulant 개념

$x(t)$ 는 평균 0 인 k 차 stationary random process 이며

$$X = [x(t_1) \ x(t_2) \ \dots \ x(t_k)], \ V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]$$

로서 $t_2 = t_1 + \tau_1, t_3 = t_1 + \tau_2$ 의 관계가 있다고 하자. $x(t)$ 의 k 차 고차 통계치인 cumulant 는 다음과 같이 정의되는 특성 함수인 누적률 발생 함수의 taylor 확장 계수 $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k)$ 를 말한다.

$$K(V) = \ln E[\exp jV^T X] \quad (2)$$

여기서 T 는 전치 (transpose), $E\{ \}$ 는 기대치를 나타내며 평균 0 인 random process x 에서 k 차 cumulant $C_{k,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ 는 다음과 같은 random variable $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$ 의 joint k 차 cumulant를 나타낸다.

$$C_{k,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = \text{cum}(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)) \quad (3)$$

cumulant 의 차수 k 는 2 ~ 4 의 범위가 널리 사용되며 이들을 정리하면 다음과같이 된다. 여기서 시간지수 $x(t_1), x(t_2)$ 를 x_1, x_2 로 대체하였다.

$$2 \text{ 차 cumulant } cum(x_1, x_2) = E[x_1 x_2] \quad (4)$$

$$3 \text{ 차 cumulant } cum(x_1, x_2, x_3) = E[x_1 x_2 x_3]$$

4 차 cumulant

$$cum(x_1, x_2, x_3, x_4) = E[x_1 x_2 x_3 x_4] - E[x_1 x_2]E[x_3 x_4] - E[x_1 x_3]E[x_2 x_4] - E[x_1 x_4]E[x_2 x_3]$$

식에서 알 수 있듯이 k 차 cumulant 는 k 차 상관함수 또는 nongaussian random process 가 gaussian process 로부터 떨어진 거리를 나타내는 척도이다. 2 차 cumulant 는 신호의 자동 상관 함수를 나타내며 최소 위상 특성을 갖는 경우 이를 퓨리어 변환하므로서 process 의 스펙트럼과 위상 특성을 알 수 있으며 3 차 또는 4 차 cumulant 의 경우 고차 상관 함수에 해당하므로 이를 고차 퓨리어 변환함으로서 고차 스펙트럼 특성을 얻을 수 있는데 이를 bispectrum 과 trispectrum 이라고 한다^[7,9].

3. AR Parameter

각AR 파라메터 추정을 위해서는 자동 상관 함수와 다음의 Yule-Walker 방정식을 적용한다.

$$C_{2,y}(\tau) + \sum_{i=1}^p a(i)C_{2,y}(\tau-i) = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 아래 첨자 y 와 2 는 y 의 2 차 자동 상관 함수를 나타내는 2 차 cumulant 를 의미하므로 이를 y 의 3 차 cumulant 로 확장하면

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_{3,y}(\tau-i, t) = 0, \quad \tau > q \quad (6)$$

로 확장할수 있다. 이를 매트릭스로 표시하면 다음과같은 Overdetermined 형태가 된다.

$$Ca = c \quad (7)$$

여기서 C, a, c 는 다음과 같이 구성된다.

$$C = \begin{bmatrix} c_{3,y}(q+1-p, q-p) & \cdots & \cdots & c_{3,y}(q, q-p) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{3,y}(q+1-p, q) & \cdots & \cdots & c_{3,y}(q, q) \\ c_{3,y}(q+M, q-p) & \cdots & \cdots & c_{3,y}(q+p+M, q-p) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{3,y}(q, q) & \cdots & \cdots & c_{3,y}(q+p-1, q) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$a = [a(p) a(p-1) \cdots a(1)]^T$$

$$c = [c_{3,y}(q+1, q-p) \cdots c_{3,y}(q+1, q),$$

$$c_{3,y}(q+p+M, q-p) \cdots c_{3,y}(q+p+M, q)]^T$$

식(8) 의 a 벡터내에는 원하는 AR 파라메터가 여기에 위치하게 된다^[8].

III. 컴퓨터 시뮬레이션

주어진 시스템의 식별 능력을 증명하기위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 미지 시스템의 입력으로는 독립 일양 분포하는 Binary PAM (Pulse Amplitude Modulation) 신호를 발생하여 $p=3$, $q=1$ 인 AR 시스템을 통과시킨 후에 원하는 신호대 잡음비의 잡음을 부가하여 최종 출력 신호를 얻었다. 이때 수신된 신호는 128 표본을 1 Frame 으로 처리도록 구성하였는데 총 2048 개의 표본을 얻었고 각 Frame 간에의 차단 효과를 최소화시키기위해 25% 의 Overlapping을 허용도록 알고리즘을 구성하였다. 각 Frame 에서는 송수신 과정에서 부가될 직류 성분을 제거한 후 신호 처리를 수

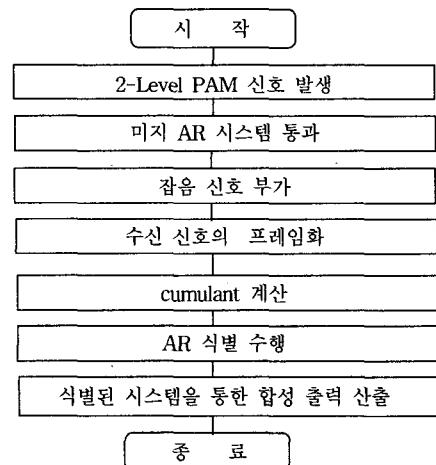
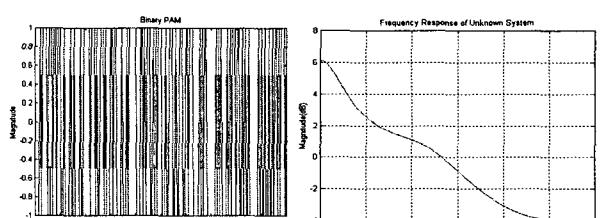


그림 3.1. 신호 처리 흐름

Fig. 3.1. Signal processing flow.



(a) 입력 PAM (b) 미지 시스템 주파수 특성
그림 3.2. PAM 신호와 시스템 주파수 특성
Fig. 3.2. PAM signal and system frequency characteristics.

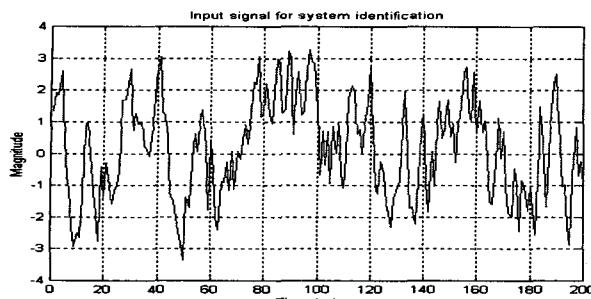


그림 3.3. 시스템 식별을 위한 입력 신호
Fig. 3.3. Input signal for system identification.

행하였다. 그림 3.1 은 본 시뮬레이션을 위한 신호 처리 흐름 과정을 나타낸 것이다.

그림 3.2 는 입력 신호인 Binary PAM 신호와 미지 시스템으로 고려했던 미지 시스템의 주파수 특성을 나타낸 것이다.

그림 3.2 (a) 의 Binary PAM 신호는 (b) 의 주파수 특성을 갖는 미지의 시스템을 통과한 후 일정한 신호대 잡음비를 갖는 가우시안 잡음이 부가되어 출력 신호를 얻은 후 이는 미지 시스템의 주파수 특성 인식을 위한 입력 데이터로 사용된다. 그림 3.3 은 신호대 잡음비가 10dB 인 경우의 주파수 특성 식별을 위한 입력 신호를 보인 것이다.

시스템 식별을 위한 알고리즘은 식 (4)에서 정의된 cumulant를 추정한 후 AR 계수를 위해서는 식(8)을 구성하여 AR 계수인 a 계수의 값을 얻었다. 이때 AR의 차수는 $p = 4$ 로 정하였으며 신호대 잡음비를 0dB, 5dB, 10dB, 15dB 로 변화시키면서 시스템 식별의 결과인 AR 계수를 원래의 미지의 시스템의 계수와 비교하였다. 표 3.1 은 미지의 시스템 계수와 신호대 잡음비가 5dB, 10dB 일때의 식별 결과인 시스템 계수를 나타낸 것이고 그림 3.4 는 신호대 잡음비를 다양하게 변화시킬 때 식별된 AR 계수를 미지 시스템의 계수와 나타낸 것으로서 신호대 잡음비가 10dB ~ 15dB 범위에서 양

표 3.1. 미지 시스템 계수와 식별 시스템 계수
Table 3.1. Unknown system and Identified system coefficient.

미지시스템계수	식별시스템계수	
AR 계수	AR계수(5dB)	AR계수(10dB)
1.0	1.0	1.0
-0.93	-0.7204	-0.916
0.375	0.1413	0.3657
-0.2	-0.1055	-0.1355
0.15	0.0703	0.0467

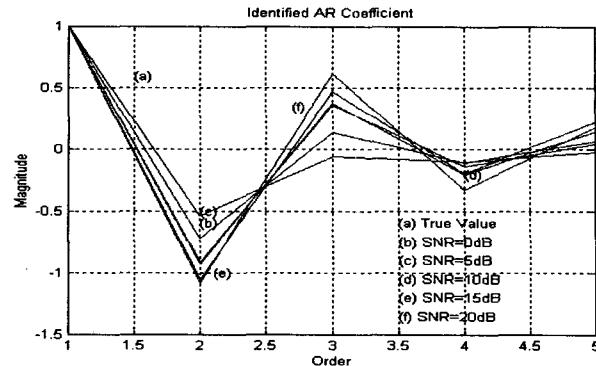
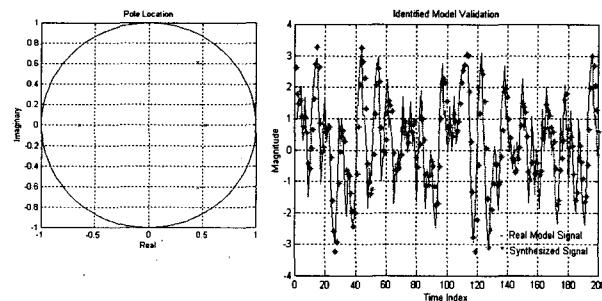


그림 3.4. 신호대 잡음비에 따른 AR 계수
Fig. 3.4. AR coefficient by changing of SNR.



(a) 극점 배치 (b) 실제 신호와 합성 신호의 비교
그림 3.5. 식별된 시스템의 검증 결과
Fig. 3.5. Validation result of identified system.

호한 식별 결과를 얻을 수 있음을 시뮬레이션 결과 얻을 수 있었다.

식별된 AR 시스템의 검증을 위하여 식별된 시스템의 극점 (Pole)이 z 변환의 단위원내에 존재함을 확인하였으며 또한 송신측의 Binary PAM 신호를 이용하여 미지 시스템의 출력 파형과 PAM 신호를 식별된 시스템에 입력시킬 때 얻어지는 출력 파형을 비교할 수 있다. 그림 3.5 는 이들의 결과를 보인 것으로 (a) 에는 극점의 분포를 나타낸 것이고 (b) 는 식별된 시스템의 검증을 위하여 신호대 잡음비를 10dB 로 설정한 후 미지 시스템의 출력과 식별된 시스템의 출력 결과를 나타낸 것이다. (a) 에서는 극점이 단위원내에 존재되어 안정된 시스템 식별이 수행되었음을 알 수 있으며 (b) 도에서는 수신된 파형과 거의 유사한 합성된 파형을 얻을 수 있어서 식별된 시스템의 검증 결과가 양호함을 알 수 있다.

IV. 결 론

시스템 식별은 미지 시스템에 대한 수학적 모델을 세우는 과정으로서 음성 신호 처리와 영상 신호 처리에서

화질 열화 요인인 Blurring 의 보상, 통신의 적응 등화 기와 사전 왜곡기, Deconvolution 등의 분야에서 필수적인 과정으로 매우 중요한 분야이다. 논문에서는 임의의 AR 시스템을 통과한 출력 신호의 3 차 통계치인 cumulant 를 이용한 미지 시스템의 임펄스 응답을 추정할 수 있는 시스템 식별에 대하여 다루었으며 식별 모델로는 Parametric AR 를 선정하였다. 신호대 잡음비를 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB 로 변화시키면서 AR 식별을 수행한 결과 원하는 시스템의 디지털 필터 계수를 얻을 수 있었으며 이를 검증하기 위하여 식별된 AR 시스템의 극점 배치를 단위원내에 존재함을 확인하였으며 또한 미지 시스템의 출력 신호와 식별된 시스템에 Binary PAM 신호를 인가한 후 그 출력인 합성 과형을 비교하여 양호한 식별 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 3 차 통계치인 cumulant 를 얻기 위한 계산량은 복잡하며 AR 계수를 신속, 정확하게 얻을 수 있는 알고리즘에 대한 연구가 지속적으로 필요하다.

참 고 문 헌

- [1] P.Eykhoff, "System Identification", North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [2] Lennart Ljung, "System Identification : Theory

- for the user", Prentice Hall, 1987.
- [3] J.K.Tugnait, "Identification of Linear Stochastic Systems via Second-and Fourth-Order Cumulant Matching", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-33, no. 3, pp. 393~407, 1987.
- [4] R.Pan, C.L.Nikias, "The Complex Cepstrum of Higher Order Cumulants and Nonminimum Phase system Identification", IEEE Trans. on ASSP, vol. 36, no. 2, pp. 186~205, Feb. 1988.
- [5] G.B.Giannakis, J.M.Mendel, "Identification of nonminimum phase system using higher-order statistics", IEEE. Trans. ASSP, vol. 37, pp. 360~377, March 1989.
- [6] J.K.Tugnait, "Approaches to FIR system identification with noisy data using higher-order statistics", IEEE Trans. ASSP, vol. 38, pp. 1307~1317, July 1990.
- [7] J.M.Mendel, "Tutorial on Higher-Order Statistics in Signal Processing and System Theory", Proc. of the IEEE, vol. 79, no. 3, pp. 277~305, Mar. 1991.
- [8] A.Swami, J.M.Mendel, "Identifiability of the AR parameters of an ARMA Process using cumulants", IEEE Trans. on A.C., vol. 37, pp. 268~273, Feb 1992.
- [9] C.L.Nikias, A.P.Petropou, "Higher-Order Spectra Analysis", Prentice Hall, 1993.

저 자 소 개



임 승 각(정회원)

1983년 8월 충실대학교 전자공학과 공학 학사
 1985년 8월 경희대학교 전자공학과 공학 석사
 1997년 2월 경희대학교 전자공학과 공학 박사
 1993년 12월 정보통신기술사
 1997년 3월~2004년 2월 국립 천안공업대학 부교수
 2004년 3월~현재 국립 공주대학교 정보통신공학부 부교수 재직

<주관심분야 : 통신 시스템 공학, 통신 신호 처리>