

축방향으로 이송되는 박막의 면외방향 진동

Out-of-plane Vibration for an Axially Moving Membrane

신 창 호* · 정 진 태†

Changho Shin and Jintai Chung

(2005년 11월 29일 접수 ; 2006년 1월 26일 심사완료)

Key Words : Axially Moving Materials(이송체), Dynamic Response(동적응답), Time Integration Method(시간적분법)

ABSTRACT

The dynamic responses of both the in-plane and out-of-plane vibrations are investigated for an axially moving membrane. The equations of motion are derived for the moving membrane with no-slip boundary conditions by using the extended Hamilton principle. Based on the Galerkin method, the discretized equations of motion are derived. The generalized-time integration method is applied to compute the dynamic responses for the in-plane and out-of-plane motions. From the computed results, the responses are compared between the in-plane and out-of-plane vibrations. Furthermore, the effects of velocity and acceleration on the dynamic behaviours for displacements and stresses are presented.

1. 서 론

축방향으로 이송되는 박막은 제지 생산, 프린팅 공정, 자기테이프, 웹(web)이송 시스템 등 여러 분야에서 응용되고 있다. 이런 응용분야에서 진동의 정도와 이송속도는 가장 중요한 관심사이다. 왜냐하면 진동제어는 제품의 품질향상에 영향을 주는 인자이며, 이송속도는 불안정성이 발생하는 임계속도(critical speed)에 의해 제품의 생산량에 영향을 주기 때문이다.

이송체에 대한 연구는 현(string), 보(beam)와 판(plate)모델을 통해 많은 연구가 진행되어 왔지만, 박막 모델을 통한 연구는 미진한 상태이다. Wickert⁽¹⁾는 이송되는 테이프의 종진동에 대한 연구를 통해 작은 진동의 음의 감쇠와 큰 진동의양의 감쇠를 통한 자려진동하는 특별한 이송속도 범위를 발견하였다.

Shin et al.^(2,3)은 축방향으로 이송되는 박막의 면내진동에 대한 연구를 통해 이송속도, 길이비와 경계조건이 면내진동에 큰 영향이 있음을 제시하였다. 또한 면외진동에 대한 연구는 Koivurova와 Pramila⁽⁴⁾가 FEM방식을 이용하여 이송되는 박막을 연구하였다. 비선형성과 이송속도가 거동에 영향을 줄을 확인하였다. 이 연구를 확장하여 Niemi와 Pramila⁽⁵⁾가 이송시 발생하는 유동을 고려한 연구를 발표하였다. Wang⁽⁶⁾은 스스로 작동되는 공기 베어링에 의해 제어되는 이송 웹의 진동을 해석하였다. 웹과 공기베어링의 공기층이 웹의 수직처짐을 감소시키고 안정성을 제공함을 제시하였다. 하지만 기존의 연구들은 면내와 면외방향을 동시에 고려한 연성효과가 포함된 박막모델을 사용하지 않았으며, 변위와 응력에 대한 동적응답에 대한 연구가 전무한 상태이다.

따라서 이 논문에서는 면내와 면외운동에 대한 동적응답을 연구하였다. Extended Hamilton⁽⁷⁾원리를 사용하여 면내 및 면외변위가 동시에 고려된 비선형 운동방정식을 구한다. 기하학적 비선형성 및 이송가속도를 추가한 운동방정식을 이산화하고, the generalized- α 시간적분법⁽⁸⁾으로 시간응답을 구한다.

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5287 FAX : (031)406-5550

* 한양대학교 일반대학원 정밀기계공학과

계산된 결과로부터 이동속도와 가속도가 동적거동에 미치는 영향을 분석하고, 변형형상과 응력분포를 또한 고려할 것이다.

2. 운동방정식

Fig. 1은 이동속도 V 와 이동가속도 \dot{V} 으로 축방향으로 이동되는 박막의 모델을 나타낸다. 폭 b 와 두께 h 인 이동박막은 L 의 거리에 있는 두 롤러에 의해 지지되고 있다. 우측 롤러는 구동롤러이며, 좌측롤러는 피구동계로 구성되어 있다. 이동박막이 가속 혹은 감속의 경우 좌우측의 롤러 끝단의 장력은 서로 다르게 된다. 우측과 좌측 끝단의 단위 두께 당 장력은 각각 T_L 과 T_0 이며 서로의 관계는 아래 식과 같다.

$$T_L = T_0 + \rho h L \dot{V} \quad (1)$$

여기서 ρ 는 박막의 밀도이며, 박막의 z 방향으로 p 의 압력을 받고 있다

한 점 P 의 x , y 그리고 z 방향의 변형을 각각 u , v 그리고 w 라고 표시한다. 특히 u 와 v 는 면내변위이고, w 는 면외변위이다. 그러므로 다음과 같은 식으로 표현한다.

$$u = u(t, x, y), \quad v = v(t, x, y), \quad w = w(t, x, y) \quad (2)$$

운동방정식은 경계에서 질량의 유출입이 존재하기 때문에 확장된 Hamilton 원리⁽⁷⁾를 사용하며 아래의 식으로 나타낸다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (3)$$

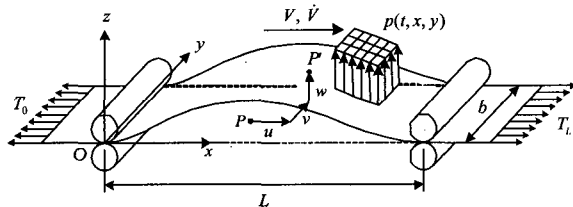


Fig. 1 Configuration of an axially moving membrane with translating velocity V and acceleration \dot{V}

여기서 t_1 과 t_2 는 임의의 시간, δ 은 변분인자, K 는 운동에너지, U 는 위치에너지, W_{nc} 는 비보존력에 의한 가상일이며 M 은 가상 운동변화량이다.

운동에너지에 대한 변분은 다음과 같다.

$$\delta K = \rho h \int_A \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dA \quad (4)$$

여기서 A 는 박막의 면적이며, 속도벡터는 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{v} = \left(v + \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad (5)$$

또 위치에너지에 대한 변분은

$$\delta U = \int_A (q_x \delta \epsilon_x + q_y \delta \epsilon_y + 2q_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dA \quad (6)$$

여기서 q_x , q_y 와 q_{xy} 는 선형화된 박막응력이며,

$$q_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad q_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ q_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7)$$

ϵ_x , ϵ_y 와 ϵ_{xy} 는 비선형 변형률로 아래식과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

압력 P 가 박막 전체 표면에 작용할 때 비보존력에 의한 가상일은

$$\delta W_{nc} = \int_0^b (T_L \delta u|_{x=L} - T_0 \delta u|_{x=0}) dy + \int_A p \delta w dA \quad (9)$$

또한, 가상 운동변화량은

$$\delta M = \rho h V \int_0^b \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{x=0}^L dy \quad (10)$$

여기서 \mathbf{r} 은 변위벡터이며 아래와 같다.

$$\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{i} + (y+v)\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (11)$$

식 (4), (6), (9)와 (10)을 식 (3)에 대입하면 아래와 같은 운동방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial y} = -\rho h \dot{V} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(q_x \frac{\partial w}{\partial x} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = p \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 식 (12)와 (13)은 면내 운동방정식을, 식 (14)는 면외 운동방정식을 나타낸다.

또한 경계조건은 y 방향으로 미끄러짐이 없는 경우를 고려하면 다음과 같다.

$$q_x = T_0, \quad v = w = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (15)$$

$$q_x = T_L, \quad v = w = 0 \quad \text{at} \quad x = L \quad (16)$$

$y=0$ 과 $y=b$ 의 경계가 자유단이므로

$$q_y = q_{xy} = q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, b \quad (17)$$

3. 운동방정식의 이산화

위의 운동방정식 (12)~(14)와 경계조건 (15)~(17)의 엄밀해를 구할 수 없으므로 근사해를 구해야 한다. Galerkin방법을 사용한 이산화 방정식을 구하기 위해 먼저 weak form으로 변형시키면 아래의 면내 운동방정식의 weak form을 구할 수 있다.

$$\int_0^b \int_0^L \left[\rho h \bar{\mathbf{u}}^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t \partial x} \right. \right.$$

$$\left. \left. + V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \right] dx dy \\ = \int_0^b \left(T_L \bar{\mathbf{u}} \Big|_{x=L} - T_0 \bar{\mathbf{u}} \Big|_{x=0} \right) dy \\ - \rho h \dot{V} \int_0^b \int_0^L \bar{u} dx dy \quad (18)$$

여기서,

$$\mathbf{u} = \{u, v\}^T, \quad \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}, \bar{v}\}^T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T,$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\}^T,$$

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

또한, 면외방정식의 weak form은 다음과 같다.

$$\int_0^b \int_0^L \left[\rho h \bar{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \bar{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\theta} \right] dx dy = \int_0^b \int_0^L \bar{w} p dx dy \quad (20)$$

여기서,

$$\boldsymbol{\theta} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}} = \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right\}^T,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_x & q_{xy} \\ q_{xy} & q_y \end{bmatrix} \quad (21)$$

또한 면내와 면외변위의 근사화는 아래의 함수로 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} T_{ij}^u(t) X_i(x) Y_j(y) \\ v &= \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} T_{ij}^v(t) Y_j(y) \sin(i+1)\pi x/L \\ w &= \sum_{i=0}^{M_x} \sum_{j=0}^{M_y} T_{ij}^w(t) Y_j(y) \sin(i+1)\pi x/L \end{aligned} \quad (22)$$

위의 함수는 시도함수(trial function)이다. 식 (22)에서 N_x 와 N_y , M_x 와 M_y 는 각각 면내 및 면외

방향의 함수계수를 나타낸다. 또한 $X_i(x)$ 와 $Y_j(y)$ 는 Legendre polynomials이며, 다음과 같다.

$$X_i(x) = \sum_{r=0}^{R_i} \frac{(-1)^r (2i-2r)!}{2^r r! (i-r)! (i-2r)!} (2x/L-1)^{i-2r}$$

$$Y_j(y) = \sum_{r=0}^{R_j} \frac{(-1)^r (2j-2r)!}{2^j r! (j-r)! (j-2r)!} (2y/b-1)^{j-2r} \quad (23)$$

여기서,

$$R_t = \begin{cases} t/2 & \text{if } t \text{ is even,} \\ (t-1)/2 & \text{if } t \text{ is odd.} \end{cases} \quad (24)$$

시도함수와 가중함수를 대입하여 식 (18)과 (20)을 $\bar{T}_{ij}^u(t)$, $\bar{T}_{ij}^v(t)$ 와 $\bar{T}_{ij}^w(t)$ 의 임의성을 이용하여 이산화된 방정식을 행렬-벡터 방정식으로 정리하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\mathbf{M}^{uv} \ddot{\mathbf{T}}^{uv} + 2\mathbf{V}\mathbf{G}^{uv} \dot{\mathbf{T}}^{uv} + (\mathbf{V}^2 \mathbf{H}^{uv} + \dot{\mathbf{V}}\mathbf{G}^{uv} + \mathbf{K}^{uv}) \mathbf{T}^{uv} = \mathbf{F}^{uv} \quad (25)$$

$$\mathbf{M}^w \ddot{\mathbf{T}}^w + 2\mathbf{V}\mathbf{G}^w \dot{\mathbf{T}}^w + [\mathbf{V}^2 \mathbf{H}^w + \dot{\mathbf{V}}\mathbf{G}^w + \mathbf{K}^w (\mathbf{T}^{uv})] \mathbf{T}^w = \mathbf{F}^w \quad (26)$$

여기서,

$$\mathbf{T}^{uv} = \{T_{00}^u, \dots, T_{N_x,0}^u, T_{01}^u, \dots, T_{N_x,1}^u, \dots, T_{0N_y}^u, T_{1N_y}^u, \dots, T_{N_x,N_y}^u, T_{00}^v, \dots, T_{N_x,0}^v, T_{01}^v, \dots, T_{N_x,1}^v, \dots, T_{0N_y}^v, T_{1N_y}^v, \dots, T_{N_x,N_y}^v\}^T \quad (27)$$

\mathbf{M}^{uv} 와 \mathbf{M}^w 는 질량행렬, \mathbf{G}^{uv} 와 \mathbf{G}^w 는 자이로스코픽 힘에 관련된 행렬, \mathbf{H}^{uv} 와 \mathbf{H}^w 는 원심력에 관련된 행렬, \mathbf{K}^{uv} 와 \mathbf{K}^w 는 구조 강성행렬이며 \mathbf{F}^{uv} 와 \mathbf{F}^w 는 외력벡터이다.

4. 시간적분법

면내와 면외방향의 동적응답을 구하기 위한 시간적분법인 generalized- $\alpha^{(8)}$ 방법을 사용하기 위해 행렬-벡터 방정식 (25)와 (26)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}^{uv} \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^{uv} + 2\mathbf{V}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{G}^{uv} \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^{uv} + (\mathbf{V}_{n+1-\alpha_f}^2 \mathbf{H}^{uv}$$

$$+ \dot{\mathbf{V}}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{G}^{uv} + \mathbf{K}^{uv}) \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^{uv} = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f}^{uv} \quad (28)$$

$$\mathbf{M}^w \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^w + 2\mathbf{V}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{G}^w \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^w + [\mathbf{V}_{n+1-\alpha_f}^2 \mathbf{H}^w + \dot{\mathbf{V}}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{G}^w + \mathbf{K}^w (\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^{uv})] \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^w = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f}^w \quad (29)$$

여기서, $n+1-\alpha_m$ 과 $n+1-\alpha_f$ 은 각각 시간간격이 t_n 과 t_{n+1} 일 때를 나타내는 첨자:

$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^{uv} = \alpha_f \mathbf{d}_n^{uv} + (1-\alpha_f) \mathbf{d}_{n+1}^{uv},$$

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^{uv} = \alpha_f \mathbf{v}_n^{uv} + (1-\alpha_f) \mathbf{v}_{n+1}^{uv},$$

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^{uv} = \alpha_m \mathbf{a}_n^{uv} + (1-\alpha_m) \mathbf{a}_{n+1}^{uv},$$

$$\mathbf{F}_{n+1-\alpha_f}^{uv} = \mathbf{F}^{uv} (\alpha_f t_n + (1-\alpha_f) t_{n+1}),$$

$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^w = \alpha_f \mathbf{d}_n^w + (1-\alpha_f) \mathbf{d}_{n+1}^w,$$

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^w = \alpha_f \mathbf{v}_n^w + (1-\alpha_f) \mathbf{v}_{n+1}^w,$$

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^w = \alpha_m \mathbf{a}_n^w + (1-\alpha_m) \mathbf{a}_{n+1}^w,$$

$$\mathbf{F}_{n+1-\alpha_f}^w = \mathbf{F}^w (\alpha_f t_n + (1-\alpha_f) t_{n+1}),$$

$$\mathbf{V}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{V} ((1-\alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n),$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{n+1-\alpha_f} = \dot{\mathbf{V}} ((1-\alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n) \quad (30)$$

변위와 속도에 대한 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_{n+1}^{uv} = \tilde{\mathbf{d}}_n^{uv} + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^{uv}, \quad \mathbf{v}_{n+1}^{uv} = \tilde{\mathbf{v}}_n^{uv} + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^{uv} \quad (31)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^w = \tilde{\mathbf{d}}_n^w + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^w, \quad \mathbf{v}_{n+1}^w = \tilde{\mathbf{v}}_n^w + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^w \quad (32)$$

여기서,

$$\tilde{\mathbf{d}}_n^{uv} = \mathbf{d}_n^{uv} + \Delta t \mathbf{v}_n^{uv} + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{a}_n^{uv},$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_n^{uv} = \mathbf{v}_n^{uv} + (1-\gamma) \Delta t \mathbf{a}_n^{uv},$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_n^w = \mathbf{d}_n^w + \Delta t \mathbf{v}_n^w + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{a}_n^w,$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_n^w = \mathbf{v}_n^w + (1-\gamma) \Delta t \mathbf{a}_n^w \quad (33)$$

식 (31)~(33)에서, β 와 γ 는 아래 식과 같다.

$$\beta = (1-\alpha_m + \alpha_f)^2 / 4, \quad \gamma = 1/2 - \alpha_m + \alpha_f \quad (34)$$

5. 동적 응답 해석

동적응답을 구하기 위해 무차원 변수를 아래의 식과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{L}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{L}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \\ \tilde{t} &= \frac{t}{L} \sqrt{\frac{T_0/h}{\rho}}, \quad \tilde{V} = V \sqrt{\frac{\rho}{T_0/h}}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{T_0/h}, \\ \tilde{b} &= \frac{b}{L}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{L}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{T_0/h}, \quad \tilde{q}_x = \frac{q_x}{T_0}, \\ \tilde{q}_y &= \frac{q_y}{T_0}, \quad \tilde{q}_{xy} = \frac{q_{xy}}{T_0} \end{aligned} \quad (35)$$

또한, $\tilde{E} = 400$, $\tilde{b} = 0.5$, $\tilde{h} = 0.001$ 과 $\nu = 0.3$ 이며, 기저함수(basis function)의 총수와 시간간격은 $M_x = M_y = N_x = N_{y=7} = 7$ 과 $\Delta\tilde{t} = 0.01$ 이다.

5.1 고유진동수와 위험속도

면내와 면외의 고유치 문제를 풀기 위해 먼저 식 (25)와 (26)에서 평형위치를 구하면,

$$\mathbf{T}^{uw} = (\mathbf{V}^2 \mathbf{H}^{uw} + \mathbf{K}^{uw})^{-1} \mathbf{F}^{uw}, \quad \mathbf{T}^w = \mathbf{0} \quad (36)$$

평형위치에서 식 (25)와 (26)의 선형화된 방정식은

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{uv} \ddot{\mathbf{T}}^{uv} + 2\mathbf{V}\mathbf{G}^{uv} \dot{\mathbf{T}}^{uv} \\ + (\mathbf{V}^2 \mathbf{H}^{uv} + \mathbf{K}^{uv}) \mathbf{T}^{uv} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^w \ddot{\mathbf{T}}^w + 2\mathbf{V}\mathbf{G}^w \dot{\mathbf{T}}^w \\ + [\mathbf{V}^2 \mathbf{H}^w + \mathbf{K}^w (\mathbf{T}_*^{uv})] \mathbf{T}^w = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 $\mathbf{K}^w (\mathbf{T}_*^{uv})$ 는 상수화된 강성행렬이다.

식 (37)에 아래와 같은 해를 대입한다.

$$\mathbf{T}^{uv} = \mathbf{X}^{uv} \exp(\lambda_{uv} t), \quad \mathbf{T}^w = \mathbf{X}^w \exp(\lambda_w t) \quad (38)$$

면내 및 면외 고유진동수는 λ_{uv} 와 λ_w 의 허수부 분이며, 무차원화된 진동수는 아래 식과 같다.

$$\tilde{\omega}_{uv} = \text{Im} \left(\lambda_{uv} \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T_0/h}} \right), \quad \tilde{\omega}_w = \text{Im} \left(\lambda_w \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T_0/h}} \right) \quad (39)$$

Fig. 2와 3은 속도의 변화에 따른 무차원화된 면내 고유진동수 $\tilde{\omega}_{uv}$ 와 면외 고유진동수 $\tilde{\omega}_w$ 를 각각 나타낸다. Figs. 2와 3을 통해 면외 고유진동수는 면내 고유진동수에 비해 상당히 작음을 알 수 있다. 또한 동적인 불안정성이 발생하는 임계속도는 면내운동은 $\tilde{V} \cong 6.96$ 인 반면 면외 임계속도는 $\tilde{V} \cong 0.73$ 이다. 면외운동의 임계속도가 면내운동보다 훨씬 적기 때문에 동적안정성은 면외 임계속도에 의해 결정됨을 알 수 있다.

5.2 면내 및 면외 동적응답

이송속도에 대한 박막의 동적응답을 구하기 위해 식 (40)의 속도식을 이용하고, Fig. 4에 무차원의 속도를 도시하였다.

$$\tilde{V} = \begin{cases} \tilde{V}_{\max} \tilde{t}/40 & \text{for } 0 \leq \tilde{t} \leq 40, \\ \tilde{V}_{\max} & \text{for } \tilde{t} \geq 40, \end{cases} \quad (40)$$

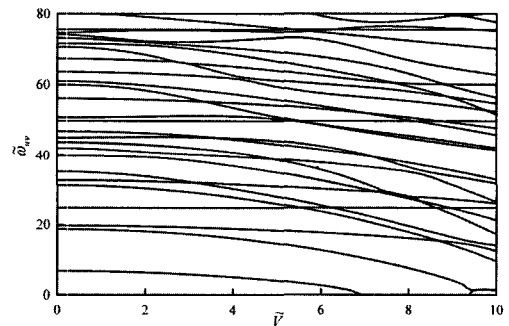


Fig. 2 Dimensionless natural frequencies of the in-plane motion for the dimensionless translating velocity

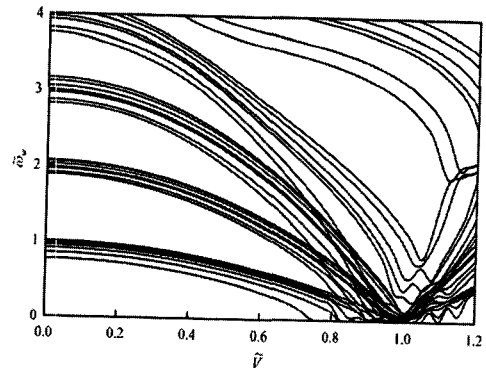


Fig. 3 Dimensionless natural frequencies of the out-of-plane motion for the dimensionless translating velocity

여기서, \tilde{V}_{max} 는 주어진 최대속도를 나타낸다. 순간압력은 $\tilde{p} = 0.002$ 로 전체박막에 작용한다. 최대속도 \tilde{V}_{max} 는 0.65와 0.75로 선택하였다. 임계속도 $\tilde{V} = 0.73$ 가 두 속도의 사이에 존재하기 때문이다. 이송속도에 대한 무차원화된 동적응답은 Figs. 5와 6에 나타내었다. $\tilde{x} = 0.5$ 와 $\tilde{y} = 0.125$ 의 한 점에서 변위에 대한 동적응답이며, Fig. 5와 6은 최대속도가 $\tilde{V}_{max} = 0.65$ 와 $\tilde{V}_{max} = 0.75$ 일 때의 시간응답이다. $\tilde{V}_{max} = 0.65$ 는 면내와 면외의 임계속도보다 작기 때문에 면내와 면외 변위모두가 안정적인임을 Fig. 5에서 확인할 수 있다.

하지만 $\tilde{V}_{max} = 0.75$ 일 때 혹은 그보다 클 때는 면외의 임계속도보다 크고 면내 임계속도보다 작기 때문에 Fig. 6처럼 면내는 안정적이고 발산하지 않지만 면외변위는 불안정하고 발산함을 알 수 있다. 또한 서로 비교하면 면내응답이 더 짧은 주기를 갖는 것을 볼 수 있다. 이것은 면내 고유진동수가 면외보다 훨씬 크기 때문이다. 맥놀이 현상(beat phenomenon)이 Fig. 5(c)에서 관찰된다.

이 현상은 Fig. 3에서 보이는 것처럼 일련의 진동수들이 서로 비슷한 값을 갖기 때문이다.

Fig. 4의 가속구간인 $0 \leq \tilde{t} \leq 40$ 과 가속도가 없는 $\tilde{t} \geq 40$ 에서 변위응답을 분석하여 이송가속도의 영향을 살펴보자. Fig. 5(a)와 6(a)에서 길이방향의 변위 \tilde{u} 는 가속도가 없는 경우 즉, $\tilde{t} \geq 40$ 에서 진동의 평균값이 0을 가지며 반면 양의 가속도를 가질 때 즉, $0 \leq \tilde{t} \leq 40$ 일 때 진동의 평균값이 음의 값을 가짐을 알 수 있다. 이 결과는 양의 가속도에 반응하는 관성 효과때문이다. 폭방향 변위 \tilde{v} 에서도 유사한 결과가 발견됨을 Fig. 5(b)와 6(b)를 통해 알 수 있다. 또한, 면외방향 변위 \tilde{w} 에서는 가속도가 주기를 증가시

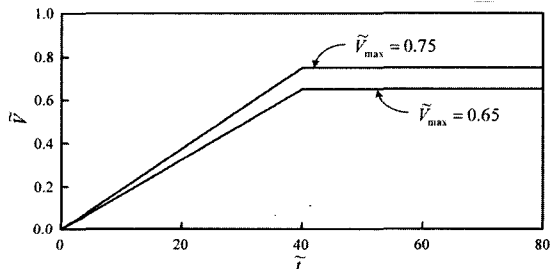


Fig. 4 Ramped profiles of the dimensionless velocity

킴을 Fig. 5(c)와 6(c)에서 확인할 수 있다. 이것은 가속도로 인해 속도가 증가되고 속도증가는 고유진동수를 감소시키기 때문이다.

부드러운 속도에 대한 영향을 분석하기 위해 Fig. 7에 아래의 식을 이용하여 도시하였다

$$\tilde{V} = \begin{cases} \tilde{V}_{max} \tilde{t}/40 - (\tilde{V}_{max} \tilde{t}/40) \sin(\pi \tilde{t}/20) & \text{for } 0 \leq \tilde{t} \leq 40, \\ \tilde{V}_{max} & \text{for } \tilde{t} \geq 40, \end{cases} \quad (41)$$

최대속도 $\tilde{V}_{max} = 0.65$ 일 때 계산된 동적응답을 Fig. 8에 도시하였다. 부드럽지 않은 속도와 비교했을

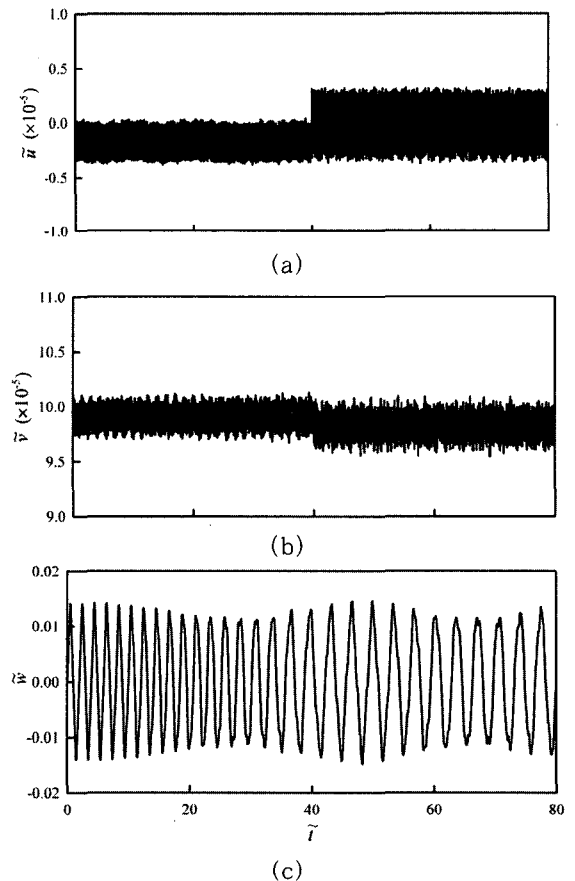


Fig. 5 Time responses of the dimensionless displacements when the translating velocity has the maximum velocity of $\tilde{V} = 0.65$: (a) the longitudinal displacement \tilde{u} , (b) the lateral displacement \tilde{v} , and (c) the transverse displacement \tilde{w}

때 면내변위 \tilde{u} 와 \tilde{v} 는 차이가 발생하지만 면외변위의 시간응답은 거의 비슷함을 알 수 있다.

5.3 변형 형상과 응력분포

이송되는 박막의 변형된 형상과 응력분포는 $\tilde{t} = 60$ 시간에서 $\tilde{V}_{\max} = 0.65$ 를 갖는 경사진 속도에서

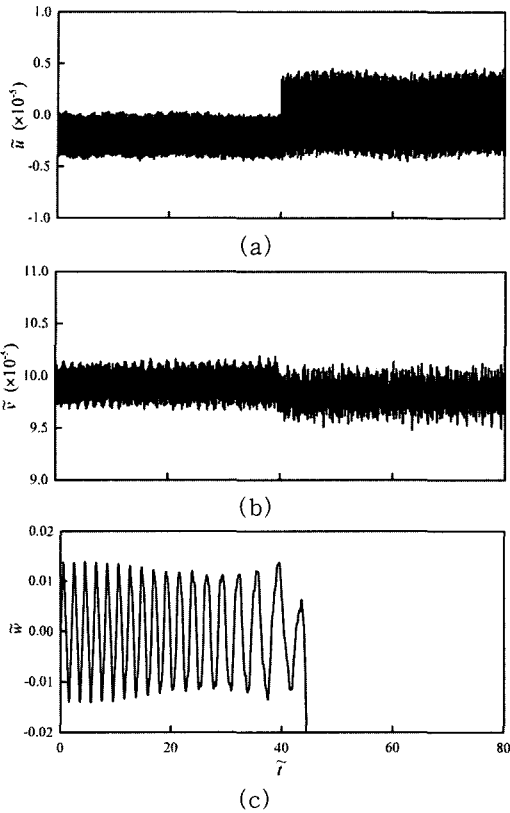


Fig. 6 Time responses of the dimensionless displacements when the translating velocity has the maximum velocity of $\tilde{V} = 0.75$: (a) the longitudinal displacement \tilde{u} , (b) the lateral displacement \tilde{v} , and (c) the transverse displacement \tilde{w}

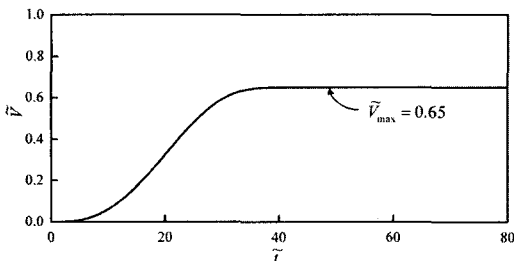


Fig. 7 Smooth profile of the dimensionless velocity

구하였다. 면내변위 \tilde{u} 와 \tilde{v} 에 의해 변형된 형상은 Fig. 9에 도시하였다. 그리고 면외변위 \tilde{w} 에 의한 변형된 형상은 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 9에서 면내의 변형형상은 박막의 중심선에 대해 대칭이다. 중앙부분은 y방향으로 줄어들며, 끝단은 변형이 없음을 알 수 있는데, 이것은 x방향의 장력과 롤러부분에서 미끄럼이 없기 때문이다. 또한 압력이 박막의 전표면에 작용하기 때문에 Fig. 10처럼 부풀어 오른 형상을 가지고 있으며 중앙부분에서 큰 형상, 즉 가장 크게 진동함을 알 수 있다.

응력분포에 대하여 Fig. 11에 나타내었다. Fig. 11(a), 11(b)와 11(c)는 각각 무차원화된 박막의 응력, \tilde{q}_x , \tilde{q}_y 와 \tilde{q}_{xy} 이다. Fig. 11(a)에서 $y = b/2$ 의

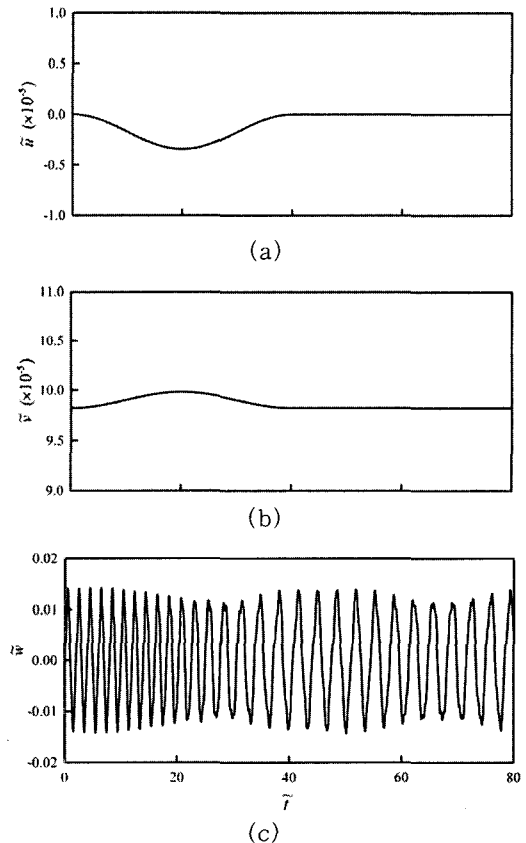


Fig. 8 Time responses of the dimensionless displacements when the translating velocity has the smooth profile with the maximum velocity of $\tilde{V} = 0.65$: (a) the longitudinal displacement \tilde{u} , (b) the lateral displacement \tilde{v} , and (c) the transverse displacement \tilde{w}

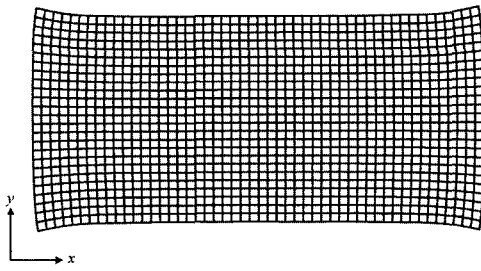


Fig. 9 Deformed shape due to the in-plane displacements u and v when $\tilde{t} = 60$ and $\tilde{V} = 0.65$

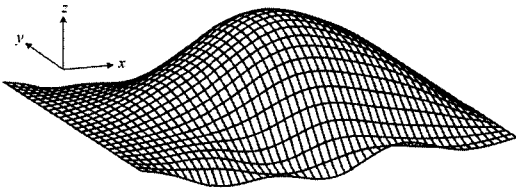
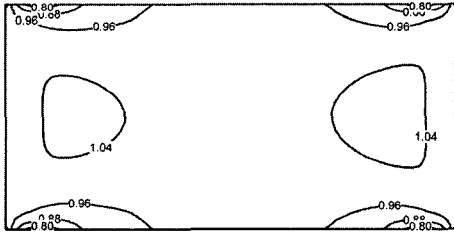
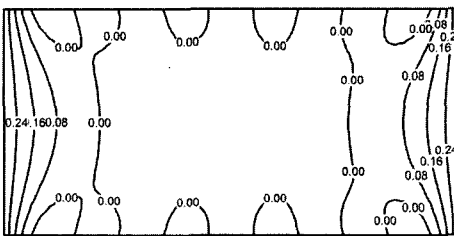


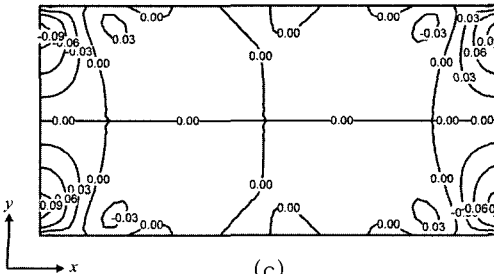
Fig. 10 Deformed shape due to the out-of-plane displacement w when $\tilde{t} = 60$ and $\tilde{V} = 0.65$



(a)



(b)



(c)

Fig. 11 Stress distributions when $\tilde{t} = 60$ and $\tilde{V} = 0.65$: (a) \tilde{q}_x , (b) \tilde{q}_y , and (c) \tilde{q}_{xy}

중앙부분에서 x 방향의 수직응력 \tilde{q}_x 가 다른 부분에 비해 크음을 알 수 있다. 반면 Fig. 11(b)로부터 양 끝단인 $x=0$ 와 $x=L$ 에서 \tilde{q}_y 는 상대적으로 큰 값을 가진다. 무차원화된 전단응력 \tilde{q}_{xy} 는 Fig. 11(c)에 제시된 것처럼 박막의 가장자리 4곳에서 상대적으로 큰 값을 가짐을 알 수 있다. 응력집중이 롤러부근에서 발생함을 통해 박막이 심한 진동이 존재하면 롤러부근에서 심한 변형 및 파단될 수 있음을 알 수 있다.

또한 면외방향의 임계속도가 면내방향보다 작음을 알 수 있다. 면외방향에 대한 동적응답에서 맥놀이현상이 발생하며 속도가 증가할수록 주기도 증가함을 알 수 있다. 속도의 변화가 급격하면 면내방향의 동적응답에 많은 차이를 주지만 면외방향은 별영향이 없었다. 마지막으로 박막의 중앙부분에서 상대적으로 큰 변형이, 롤러근처에서는 응력집중이 발생함을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2004-041-D00043)

참 고 문 헌

- (1) Wickert, J. A., 1993, "Analysis of Self-excited Longitudinal Vibration of a Moving Tape," Journal of Sound and Vibration, Vol. 160, pp. 455~465.
- (2) Shin, C. Kim, W. and Chung, J., 2004, "Free In-plane Vibration of an Axially Moving Membrane," Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, pp. 137~154.
- (3) Shin, C. H. and Chung, J. T., 2004, "Vibration Analysis of an Axially Moving Membrane with In-plane/Out-of-plane Deformations", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 14, No. 9, pp. 910~918.
- (4) Koivurova, H. and Pramila, A., 1997, "Nonlinear Vibration of Axially Moving Membrane by Finite Element Method," Computational Mechanics, Vol. 20, pp. 573~581.
- (5) Niemi, J. and Pramila, A., 1987, "FEM-

analysis of Transverse Vibrations of an Axially Moving Membrane Immersed in Ideal Fluid," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 2301~2313.

(6) Wang, X., 1997, "Finite Element Analysis of Air-sheet Interactions and Flutter Suppression Devices," Computers and Structures, Vol. 64, pp. 983~994.

(7) McIver, D. B., 1972, "Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass," Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7, pp. 249~261.

(8) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: the Generalized- α Method," Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 371~375.