

축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 안정성 해석을 위한 모델링 및 검증

Modeling and Verification for Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams

김 성 도* · 유 흥 희†

Sung-Do Kim and Hong-Hee Yoo

(2005년 11월 10일 접수 ; 2006년 1월 23일 심사완료)

Key Words : Axially Oscillating Motion(축 방향 왕복운동), Cantilever Beam(외팔보), Motion-induced Stiffness Variation(강성변화운동), Parametric Resonance(매개변수 공진), Dynamic Stability(동적 안정성)

ABSTRACT

Modeling and verification for stability analysis of axially oscillating cantilever beams are investigated in this paper. Equations of motion for the axially oscillating beams are derived and transformed into dimensionless forms. The equations include harmonically oscillating parameters which are related to the motion-induced stiffness variation. Stability diagram is obtained by using the multiple scale perturbation method. To verify the accuracy of the modeling method, several points in the plane of the stability diagram are presented and solved. The present modeling method proves to be as accurate as a nonlinear finite element modeling method.

1. 서 론

축 방향 왕복운동을 하는 구조물에서는 강제운동에 의한 강성변화가 발생한다. 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속되면 시스템의 굽힘강성이 감소하고 반대방향으로 가속되면 강성이 증가하므로 결과적으로 시스템의 굽힘강성이 연속적으로 변화하게 된다. 이러한 시스템의 경우 왕복운동의 특정 주파수 영역에서는 비록 작은 크기의 초기 변위라도 시간이 지날수록 그 크기가 매우 크게 증가한다. 불안정성을 야기하는 강제운동의 이러한 주파수는 고정된 외팔보의 고유진동수와 일치하지 않으며 이때 발생하는 불안정성을 매개변수 공진(parametric resonance)이라 하며

이는 외력의 가진 주파수가 고유진동수와 일치할 때 발생하는 일반적인 공진 현상과는 구별된다.

구조물의 강제운동에 관한 연구는 주로 회전운동을 대상으로 이루어져 왔다. 가장 널리 알려진 예제는 외팔보가 그 축에 수직방향으로 회전운동을 하는 경우로 회전운동에 의한 원심력이 발생하여 시스템의 강성이 증가하므로 그 결과로서 고유진동수들이 증가한다. 참고문헌 (1~2)는 이와 관련된 많은 연구문헌 중 일부이다. 참고문헌 (3~5)는 구조물이 병진운동을 포함한 일반 강제운동을 하는 경우의 동적 모델링을 제시하였으나 수치예제는 회전운동을 하는 외팔보로 국한하였다. 참고문헌 (6)은 참고문헌 (4)에 제시된 동적 모델링을 이용해 축 방향 왕복운동을 할 때 강성이 변화하는 것을 보이고 안정성 해석을 수행하였다. 이 연구에서는 복합 변형변수를 이용한 선형 모델링을 유도하고 가진 주파수와 왕복 진폭 진폭 변화에 따른 안정 및 불안정 영역을 구하고 그 전이 곡선을 해석적으로 유도하였다. 참고문헌 (7)의 연구는 동일

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

한 보 예제에 대해서 비선형 모델링을 유도하고 주파수 응답특성을 구하여 선형 모델과 동특성 차이를 규명하였다. 비선형 시스템의 경우 선형 시스템과 달리 불안정 영역에서라 하여도 동적 반응이 발산하지 않고 일정한 크기를 갖게 된다. 그러나 비선형 모델링의 경우 수식 전개가 복잡하고 많은 계산시간이 걸리는 단점을 갖고 있어 선형 모델링이 월등한 효율성을 갖는다.

이 논문에서는 참고문헌 (6)에 제시된 모델링과 안정성 해석을 발전시켜 비선형 유한요소해석 상용 프로그램 결과와 비교함으로써 선형 모델링의 정확성을 검증하고자 한다. 이를 위해, 먼저 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 복합 변형변수를 이용한 선형 모델링을 유도하고 안정성 도표를 구한 후 도표 상의 여러 지점을 선정하여 수치해석에 의한 동적 반응과 비선형 유한요소해석의 동적 반응을 비교하였다.

2. 운동방정식

이 절에서는 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하려 한다. 이 연구에서는 2차원 평면운동을 하는 보를 해석대상으로 정하였다. Fig. 1은 강체 A에 고정된 외팔보의 모습을 보여준다. P_0 는 외팔보상 임의의 질점의 변형 전 위치를 나타내며 P 는 변형 후 위치를 나타낸다. 여기서 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 강체 A에 부착된 서로 수직인 단위벡터들을 나타내며, x 는 보의 고정점 O로부터 변형 전 임의점 P_0 까지의 거리를, \vec{u} 는 탄성변위를, s 는 임의의 질점의 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 강체 운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하기 위해 s 와 u_2 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$ 와 $\phi_{2i}(x)$ 는 보의 인장방향과 굽힘방향 모드함수들을 나타내며 $q_{1i}(t)$ 와 $q_{2i}(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들이고 μ_1 과 μ_2 는 일반좌표의 수이다. 변형이 일어날 때 보의 임의점 P 점의 속도 \vec{v}^P 는 다음의 관계를 이용하여 구한다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + \vec{v}^{P/A} \quad (3)$$

여기서 \vec{v}^O 는 외팔보의 축방향으로 운동을 하는 강체 A상의(외팔보의 고정단) O점의 속도이며 $\vec{v}^{P/A}$ 는 강체 A에서 관찰한 P점의 속도를 나타내는데 이들은 다음의 식과 같이 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 방향 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{v}^O = v_1 \hat{a}_1 \quad (4)$$

$$\vec{v}^{P/A} = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (5)$$

따라서

$$\vec{v}^P = (v_1 + \dot{u}_1) \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (6)$$

여기서 P점의 가속도 \vec{a}^P 는 \vec{v}^P 를 시간으로 미분하여 구할 수 있다. 그런데 식 (6)에 나타난 \dot{u}_i 은, 앞에서 u_1 이 근사화되지 않으므로, s 와 u_2 로 표시되어야 한다. 이를 위해 필요한 관계식은 다음과 같이 주어진다.⁽⁸⁾

$$x + s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \quad (7)$$

Taylor 급수전개를 이용하여 식 (7)을 2차항까지 전개하여 정리하면

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \quad (8)$$

식 (8)을 미분하여 정리하면

$$\dot{u}_1 = \dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (9)$$

식 (8)은 \dot{u}_1 이 \dot{s} 와 \dot{u}_2 에 의해 구해질 수 있음을

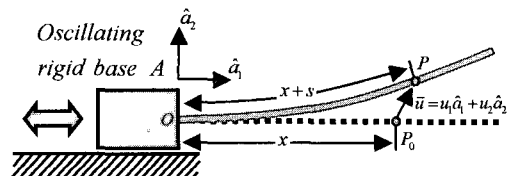


Fig. 1 Configuration of an axially oscillating cantilever beam

보여준다. 식 (9)를 이용하여 편속도를 (\bar{v}^P 의 \dot{q}_i 에 대한 미분값) 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = -\sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L (\phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma}) d\sigma q_{2j} \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \quad (11)$$

운동방정식은 이상에서 구한 식들을 이용해 다음형태로 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$F_i + F_i^* = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (12)$$

운동방정식에서 일반관성력은 세장보의 경우 다음식에 의해 구해질 수 있다.

$$F_i^* = -\int_0^L \rho \bar{a}^P \cdot \frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_i} dx \quad (13)$$

여기서 L 과 ρ 는 외팔보의 길이와 단위길이당 질량을 각각 나타낸다. 외력이 작용하지 않는 경우에 일반작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘효과만 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (14)$$

여기서 E 는 영률, A 는 단면적, I 는 단면 2차모멘트를 나타낸다. 식 (14)와 다음 식을 이용하여 일반작용력을 구할 수 있다.

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (15)$$

이상의 결과들을 종합하면 축 방향 운동을 하는 외팔보의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{11} \ddot{q}_{2j} + K_{ij}^S q_{1j}] = P_i \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^B - \dot{v}_i K_{ij}^G) q_{2j}] = 0 \quad (17)$$

여기서

$$M_{ij}^{ab} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^B \equiv \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^G \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (21)$$

$$P_i \equiv -\dot{v}_i \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (22)$$

운동방정식 (16)과 (17)은 서로 연성되지 않는다. 또한 식 (16)에서 우변항에 의한 강제진동 주파수가 외팔보의 축 방향 고유진동수와 같다면 불안정한 동적 반응을 얻게 되나 보의 축 방향은 횡 방향에 비해 훨씬 높은 고유진동수 값을 가지므로 실제적인 고려가치가 별로 없다. 따라서 이 연구에서는 외팔보의 축 방향 운동시 발생할 수 있는 굽힘방향 변위의 안정성 해석을 유도된 식 (17)에 근거해 수행하려 한다.

3. 안정성 해석모델

식 (17)에서 강성항에 나타나는 \dot{v}_i 은 외팔보가 축 방향으로 왕복운동을 하면 일정한 값을 가지지 않는다. 외팔보의 축 방향 왕복운동을 나타내기 위해 \dot{v}_i 을 다음 함수로 나타낸다.

$$v_1 = v \sin \omega t \quad (23)$$

$$\dot{v}_1 = v \omega \cos \omega t \quad (24)$$

식 (23)과 (24)에서 ω 는 왕복운동 회전 주파수를 나타낸다. 따라서 식 (17)은 다음 형태로 변환시켜 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^B - v \omega \cos \omega t K_{ij}^G) q_{2j}] = 0 \quad (25)$$

식 (25)에는 강성항이 조화함수로 나타나는 데 이 식과 같은 방정식으로 대표되는 시스템들을 매개변수 진동 시스템이라 부른다. 우선 일반적인 해석결과를 얻기 위해서 식 (24)를 무차원화 하기 위해 다음의 무차원 변수들을 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L} \tag{26}$$

$$\tau = \frac{t}{T} \tag{27}$$

$$\eta_i = \frac{q_{2i}}{L} \tag{28}$$

여기서

$$T = \left(\frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \tag{29}$$

식 (26)~(28)을 이용하여 식 (25)를 정리하면,

$$\sum_{j=1}^{n_2} [\bar{M}_{ij}^{22} \ddot{\eta}_j + (\bar{K}_{ij}^B - \lambda \gamma \cos \gamma \tau \bar{K}_{ij}^G) \eta_j] = 0 \tag{30}$$

여기서 $\ddot{\eta}_j$ 는 무차원 시간 τ 에 대해 두 번 미분한 값을 나타내며, 위 식에 나타난 행렬들은 다음과 같다.

$$\bar{M}_{ij}^{22} = \int_0^1 \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi \tag{31}$$

$$\bar{K}_{ij}^B = \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi \tag{32}$$

$$\bar{K}_{ij}^G = \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \tag{33}$$

또한

$$\lambda = \frac{vT}{L} \tag{34}$$

$$\gamma = \omega T \tag{35}$$

식 (31)~(33)에서 $\psi_i(\xi)$ 는 $\phi_{2i}(x)$ 와 동일 값을 갖는 함수로 외팔보의 굽힘진동 고유모드함수들이 혼히 사용되며, 이 때 식 (31)의 질량행렬은 단위행렬이,

Table 1 Numerical data used for the simulation

Notation	Description	Numerical data
ρ	Mass per unit length	1.2 kg/m
E	Young's modulus	70 GPa
A	Cross section area	4.0 E-4 m ²
I	Area moment of inertia	2.0 E-7 m ⁴
L	Length	10 m

식 (32)의 강성행렬은 대각행렬이 된다. 따라서 식 (30)은 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i - \lambda \gamma \cos \gamma \tau \sum_{j=1}^{n_2} \bar{K}_{ij}^G \eta_j = 0 \tag{36}$$

여기서 ω_i 는 외팔보의 i 번째 굽힘 고유진동수에 T 를 곱한 무차원 값이다. 식 (36)로 대표되는 시스템에 대한 안정성 해석방법으로는 multiple scale perturbation method가 가장 적절하다. 여기서도 그 방법을 이용하여 안정성 해석을 수행하였다. 이 방법의 해석적 전개과정에 대한 상세한 내용은 참고문헌 (10)에 잘 나타나 있다.

4. 수치 해석 및 고찰

Fig. 2는 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 횡방향 운동 안정성을 판별할 수 있는 그림이다. Multiple scale perturbation method를 2nd order까지 고려했

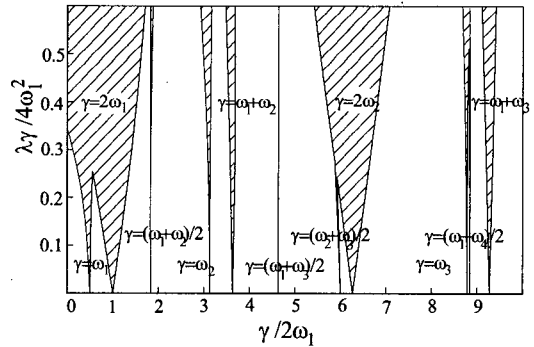


Fig. 2 Dynamic stability diagram for axially oscillating cantilever beams

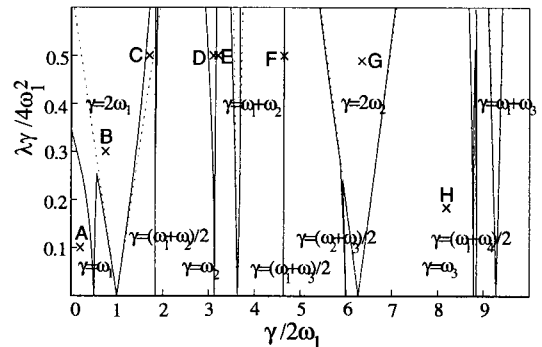
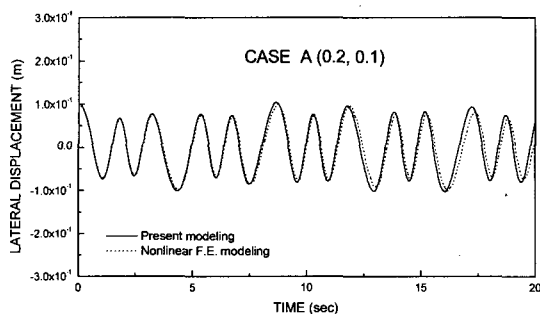
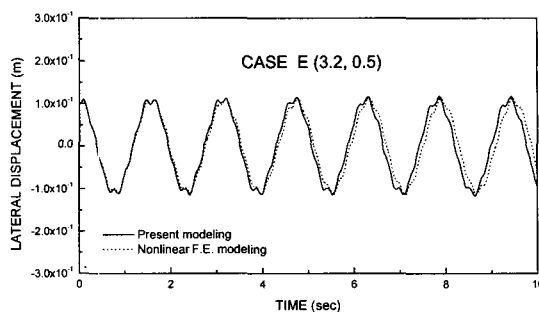


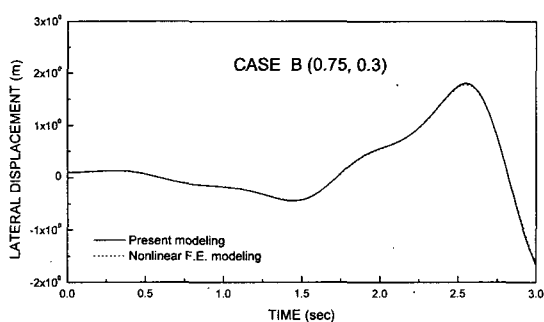
Fig. 3 Eight parameter positions in the stability diagram



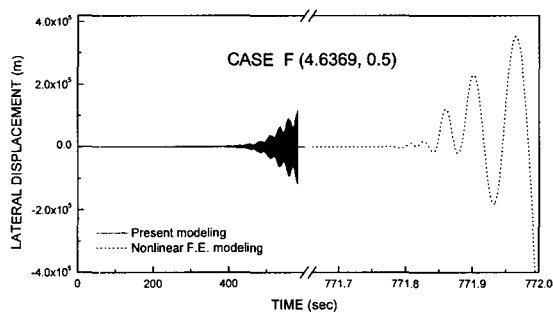
(a) Position A with parametric values (0.2, 0.1)



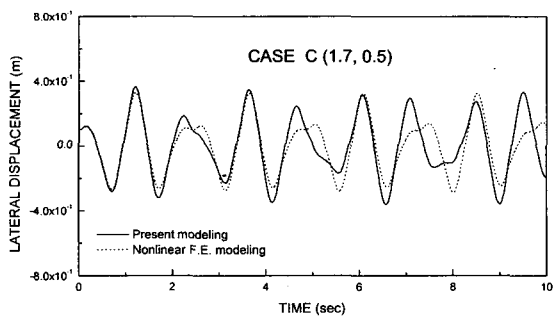
(e) Position E with parametric values (3.2, 0.5)



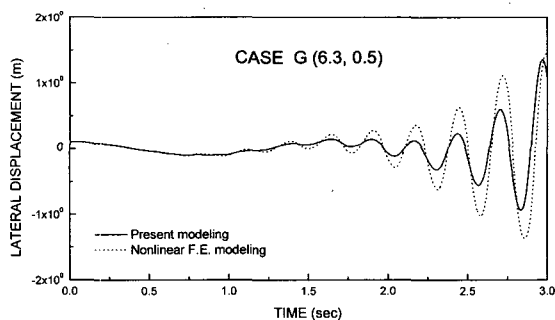
(b) Position B with parametric values (0.75, 0.3)



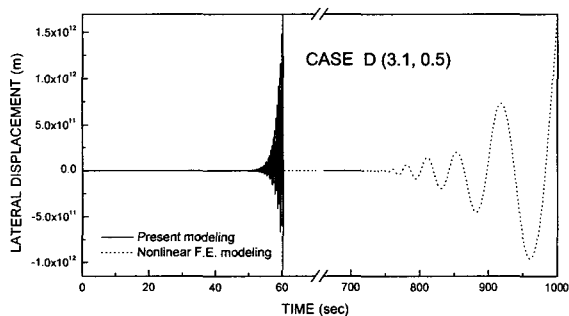
(f) Position F with parametric values (4.6369, 0.5)



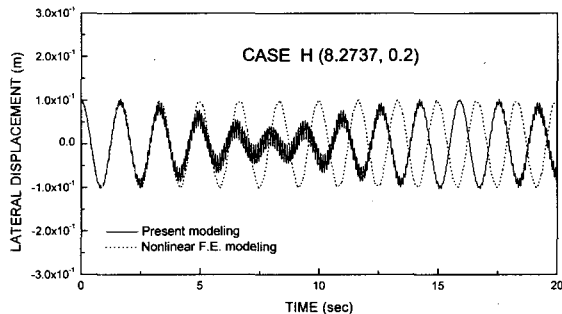
(c) Position C with parametric values (1.7, 0.5)



(g) Position G with parametric values (6.3, 0.5)



(d) Position D with parametric values (3.1, 0.5)



(h) Position H with parametric values (8.2737, 0.2)

Fig. 4 Dynamic response simulation results

을 때 얻어진 결과로 그림에서 빗금친 부분들은 불안정한 영역을 그 외의 부분들은 안정한 영역을 각각 나타낸다. 안정 영역과 불안정 영역을 구분하는 선을 전이 곡선이라(transition curves) 하는데 $\gamma = \omega_p + \omega_q$ 와 $\gamma = (\omega_p + \omega_q)/2$ 근처에서 나타난다. Fig. 3에는 동적 반응 수치해석을 수행할 8개 점들의 위치들이 표시되어 있고 Fig. 4에는 이 점들의 매개변수 값들을 사용하여 차원화된 동적반응 결과가 비선형 유한요소 해석 결과와 비교되어 있다. 비선형 유한요소해석을 위해 상용 프로그램인 LS-DYNA를 사용하였다.^(11,12) 수치해석에 사용된 데이터들은 Table 1과 같으며 급힘방향 모드수는 5개를 사용하였다. 초기조건은 외팔보 자유단에서 횡방향 변위를 0.1m로 주었다. 이 논문에서는 횡 방향 변위가 전체 길이 L 의 10%인 1m를 초과하여 발산하는 경우 외팔보의 동적 반응이 불안정하다고 판단하였다.

Fig. 4(a)와 4(h)는 안정한 영역에 위치한 Fig. 3의 A점과 H점에 대한 동적 반응 수치해석 결과와 비선형 유한요소해석 결과를 나타낸다. 예측한 대로 두 경우 모두 안정된 운동을 하고 있다. 전이곡선 근처 안정한 영역에 위치한 Fig. 3의 C점과 E점은 시간이 갈수록 변위와 위상의 차이는 있으나 안정된 결과를 Fig. 4(c)와 4(e)에서 보여주고 있다. Fig. 4(b)와 4(g)에서 보듯이 비교적 넓은 폭의 불안정 영역에 위치한 Fig. 3의 B점과 G점은 두 해석 결과 모두 초기에 급격하게 발산하는 횡 방향 변위를 보인다. 좁은 폭의 불안정 영역에 위치한 Fig. 3의 D점과 F점은 Fig. 4(d)와 4(f)에서 보듯이 두 해석 결과 모두 안정된 반응을 보이다가 일정시간 이후 서서히 진동하며 발산한다. 그러나 비선형 유한요소해석은 수치해석보다 늦게 발산한다. 비선형 유한요소해석 프로그램에서 수치 적분기는 수치적 안정성을 보장하기 위해서 수치 damping을 사용한다. 초기에 급격하게 발산하는 경우 이러한 damping의 영향이 작아 수치해석과 비선형 유한요소해석이 비슷하게 발산한다. 그러나 안정된 반응을 보이다가 일정 시간 후 서서히 진동하며 발산하는 경우의 비선형 유한요소해석은 이러한 적분기의 차이로 수치해석보다 늦게 동적 불안정성이 발생한다.

5. 결 론

이 논문에서는 조화함수로 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보형 구조물의 동적 안정성을 규명하기 위한

모델링 및 검증에 대한 연구가 수행되었다. 축 방향 왕복 조화운동에 따른 운동방정식 상의 강성변화가 규명되었으며 이를 근거로 multiple scale perturbation method를 이용한 안정성 해석이 수행되었다. 안정성 도표 상의 8개 지점을 대상으로 수치 해석한 시뮬레이션 결과를 상용 프로그램을 이용한 비선형 유한요소해석과 비교함으로써 선형 모델링 방법의 정확성을 검토하였다. 안정과 불안정 영역 모두에서 이 논문의 선형 안정성 해석 모델이 비선형 유한요소해석 결과와 동일한 동적 반응이 나타남을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Leissa, A., 1981, "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blade," Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, pp. 629~635.
- (2) Rao, J., 1987, "Turbomachine Blade Vibration," Shock and Vibration Digest, Vol. 19, pp. 3~10.
- (3) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.
- (4) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion," J. of Sound of Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (5) Yoo, H. and Chung, J., 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motion," J. of Sound of Vibration, Vol. 239, No. 1, pp. 123~137.
- (6) Hyun, S. and Yoo, H., 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," J. of Sound of Vibration, Vol. 228, No. 3, pp. 543~558.
- (7) Kim, N., Hyun, S. and Yoo, H., 2003, "Nonlinear Modeling Employing Hybrid Deformation

Variables and Frequency Response Characteristics of a Cantilever Beam Undergoing Axially Oscillating Motion," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.13, No. 3, pp. 210~216.

(8) Eisenhart, L., 1947, An Introduction to Differential Geometry, Princeton University Press.

(9) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics, Theory and Applications, McGraw-Hill Book

Co.

(10) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degree of Freedom," J. Acoust. Soc. Am., 62, pp. 375~381.

(11) LS-DYNA 970 Keyword User's Manual, Livermore Software Technology Corp., CA, 2003.

(12) LS-DYNA Theoretical Manual, Livermore Software Technology Corp., CA, 2003.