

극직교 이방성 회전원판의 진동해석 및 임계속도 I : 정식화 및 해법

Vibration Analysis and Critical Speeds of Rotating Polar Orthotropic Disks, Part I : Formulation and Solution Method

구 교 남†

Kyo-Nam Koo

(2005년 10월 25일 접수 ; 2006년 1월 23일 심사완료)

Key Words : Critical Speed(임계속도), Polar Orthotropic(극직교 이방성), Rotating Disk(회전 원판), Vibration(진동)

ABSTRACT

Rotating annular disks are widely used in data storage devices such as CDs, DVDs(digital versatile disks), and HDs(hard disks). Higher data transfer rate in data storage disks could not be achieved by polycarbonate disks in the present market. The problem can be solved by applying the fiber-reinforce composite materials to the disks. In this paper, an application of composite materials to rotating disks is proposed to increase the critical speed. Dynamic equation is formulated in order to calculate the natural frequency and critical speed for rotating composite disks by the Galerkin method. The orthogonal functions are used in series solution. A companion paper(Part II) presents and discusses the numerical results of vibration analysis and critical speed for rotating polar orthotropic disk using the formulation and solution method given in this paper (Part I).

1. 서 론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD-ROM(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 특히 컴퓨터에서 취급하는 정보량이 증가함에 따라 정보 저장기기의 저장용량이 급격히 증가하고 정보 전달속도를 높이기 위해 이들 정보저장기기에 들어가는 디스크의 회전속도의 증가도 급격하게 이루어

지고 있다. 현재 시판되고 있는 CD-ROM의 최대 회전속도는 52배속이며 디스크의 임계속도(critical speed)는 약 7,000 rpm 정도로 이미 초임계속도(supercritical speed)에서 구동되고 있다.⁽¹⁾ 따라서 CD의 데이터 전송률의 증가는 한계에 이르고 있다. 임계속도는 후진파(backward travelling wave)의 전파속도가 디스크의 회전속도와 같아질 때의 회전속도이다. 비회전 좌표에서 보았을 때 후진파는 임계속도에서 정지(stationary)되며 이때 정지한 횡하중은 좌굴 불안정(buckling instability)을 야기하게 된다. 또한 횡하중이 없는 경우에도 디스크는 공기역학적으로 가진되어 플러터(flutter) 불안정성이 발생할 수 있다.

회전하는 등방성 원판의 진동을 다룬 초기의 논문들은 주로 고유진동수를 다루었다.^(2~5) 특히 Lamb과 Southwell의 논문은⁽²⁾ 이 분야의 효시로 회전 원판의 고유진동수는 원심력에 의한 응력과 휨 응력을 별도로 구한 뒤 그 조합으로 표현될 수 있음을 보였다.

† 책임저자 : 정회원, 울산대학교 항공우주공학과
E-mail : knkoo@mail.ulsan.ac.kr
Tel : (052) 259-1261, Fax : (052) 259-1682

Iwan과 Moeller는⁽⁶⁾ 회전하는 등방성 원판에 작용하는 횡하중이 안정성에 미치는 효과를 연구하였다. 그들은 횡하중에 의한 불안정성은 임계속도이상에서 발생하고 있음을 보고하였다. Kirkhope와 Wilson은⁽⁷⁾ 회전 등방성 원판에 유한요소법을 적용하여 응력 및 진동해석을 수행하였다. 그들은 변형의 축대칭성을 활용한 요소를 개발하였으며 원판의 두께의 변화도 고려하였다. 이승엽 등은⁽⁸⁻¹⁰⁾ 등방성 정보저장기기의 임계속도 및 플러터 불안정성에 대한 연구를 수행한 바 있다.

복합재료 원판에 대한 진동해석은 많지 않은 형편이다. Minkarah와 Hopemann은⁽¹¹⁾ 경계가 단순지지된 극직교 이방성 원판의 축대칭 모드에 대한 급수해를 구하였다. Pandalai와 Patel은⁽¹²⁾ 단순지지 및 고정 경계조건을 갖은 극직교 이방성 원판의 고유진동수를 구하였다. Ginesu 등은⁽¹³⁾ Kirkhope와 Wilson이⁽⁷⁾ 사용한 유한요소법을 극직교 이방성 환형판에 적용하여 다양한 경계조건에 대한 진동해석을 수행하였다. Ghosh는⁽¹⁴⁾ 열응력이 회전하는 극직교 이방성 원판(polar orthotropic disk)의 횡진동에 미치는 영향을 살펴보았다. 그는 후진파의 속도가 회전속도가 같아지는 임계속도를 구하였으며 열응력에 의한 파괴회전속도도 구하였으나 직교이방성이나 회전속도에 따른 진동특성에 따른 연구결과는 제시하지 않았다. Son 등은^(15,16) 횡하중과 열하중을 받는 이방성 원판이 회전할 때 회전단변형과 회전관성을 고려하여 진동문제에 대한 유한요소 정식화를 수행하고 회전하는 직교이방성 원판에 적용하였다. 그러나 그들이 적용한 예제는 폴리카보네이트(Polycarbonate) 기판과 알루미늄 층으로 이루어진 적층판으로 반경방향과 원주방향의 물성치가 같은 원판이었다. Kim과 Dickinson은⁽¹⁷⁾ 직교합수의 급수해를 가정하여 비회전 복합재료 원판의 진동해석을 수행하였다. 그들은 반경방향으로 두께의 변화와 다양한 경계조건에 대한 수치예를 제시하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 극직교 이방성을 포함한 복합재료 원판의 진동해석에 대한 연구는 매우 부족한 실정이며 회전하는 복합재료 원판의 진동해석 및 임계속도에 대한 연구는 전무한 상황이다. 따라서 이 연구에서는 극 직교이방성 회전 원판의 임계속도를 구하기 위해 지배방정식의 정식화를 수행하였다. 급수해를 구하기 위해 갤러킨 방법을 적용하였으며

특별히 생성된 직교합수들을 이용해 해의 수렴성을 높이도록 하였다. 자매논문(II 편)에서는⁽¹⁸⁾ 이 논문(I 편)에서 제시된 지배방정식 및 해법을 이용하여 회전하는 복합재료 원판의 진동해석을 수행하고 임계속도를 제시하였다.

2. 지배방정식 및 해법

2.1 극직교 이방성 복합재료

극직교 이방성 원판으로 모델링할 수 있으며 응력-변형을 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & \frac{\nu_{\theta r}E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & 0 \\ \frac{\nu_{r\theta}E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & \frac{E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

여기서 r 과 θ 는 각각 반경방향과 원주방향을 나타내며, E_r 과 E_θ 는 각각 반경방향과 원주방향의 탄성계수, $G_{r\theta}$ 는 전단계수를 나타낸다. 또한 포아송 비와 탄성계수는 대칭성에 의해 다음과 같은 관계가 있다.

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \quad (2)$$

2.2 복합재료 회전원판의 진동방정식

회전속도 Ω 인 원판의 동적거동은 Fig. 1에 정의된 것과 같이 원판에 부착된 회전좌표계 $r-\theta$ 좌표계와 회전하지 않는 관성좌표계인 $r-\phi$ 좌표계로 기술할 수 있으며 원판의 변위는 $r-\theta$ 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$u_r = u_r^0 - z \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.1)$$

$$u_\theta = u_\theta^0 - z \frac{\partial w}{r \partial \theta} \quad (3.2)$$

$$w = w \quad (3.3)$$

여기서 u_r , u_θ , w 는 각각 r , θ , z 방향으로의 변위이고, 첨자 0은 중립면에서의 변수를 나타낸다.

식 (3)의 변위를 이용하면 원통 좌표계에 대한 변형을 구할 수 있다.

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \epsilon_r^0 - z\chi_r \quad (4.1)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \epsilon_\theta^0 - z\chi_\theta \quad (4.2)$$

$$\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \gamma_{r\theta}^0 - z\chi_{r\theta} \quad (4.3)$$

여기서

$$\epsilon_r^0 = \frac{\partial u_r^0}{\partial r} \quad (5.1)$$

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{u_r^0}{r} + \frac{\partial u_\theta^0}{r \partial \theta} \quad (5.2)$$

$$\gamma_{r\theta}^0 = -\frac{u_\theta^0}{r} + \frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta^0}{r \partial \theta} \quad (5.3)$$

$$\chi_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (6.1)$$

$$\chi_\theta = \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \quad (6.2)$$

$$\chi_{r\theta} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (6.3)$$

식 (1.2)와 (4)를 이용하여 응력에 z 를 곱하여 원판의 두께 h 에 대해 적분하면 원판에 작용하는 단위 길이 당 작용하는 모멘트를 구할 수 있다.

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = -D_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right] \quad (7.1)$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz = -D_\theta \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \nu_{r\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (7.2)$$

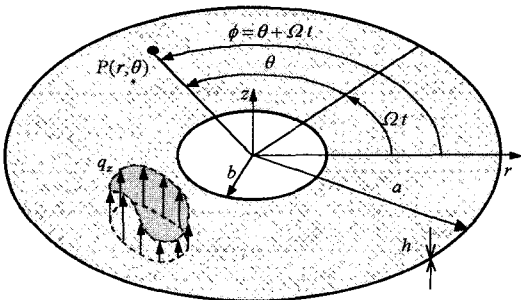


Fig. 1 Coordinates and geometry of rotating disk

$$M_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{r\theta} z dz = -2D_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (7.3)$$

여기서 각 방향으로의 휨 강성은 다음과 같이 정의된다.

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})} \quad (8.1)$$

$$D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})} \quad (8.2)$$

$$D_{r\theta} = \frac{G_{r\theta} h^3}{12} \quad (8.3)$$

z -방향으로의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial r} (rQ_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (rQ_\theta) \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{N}_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{N}_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \\ & + r\rho h \frac{\partial w}{\partial t^2} = r q_z \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 Q_r 과 Q_θ 는 각각 r 과 θ 에 수직한 면에서의 횡전단하중, \bar{N}_r 과 \bar{N}_θ 는 각각 r 과 θ 방향으로의 평면력, ρ 는 원판의 밀도, q_z 는 원판에 작용하는 분포 횡하중이다.

식 (9)에서 Q_r 과 Q_θ 는 식 (7)의 모멘트를 이용하면 다음의 관계식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial}{r \partial r} (rM_r) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (M_{\theta r}) - \frac{M_\theta}{r} \\ &= -D_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) + \frac{D_\theta}{r} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) - (\nu_{\theta r} D_r + 2D_{\theta r}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \frac{\partial}{r \partial r} (rM_{r\theta}) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (M_\theta) + \frac{M_{\theta r}}{r} \\ &= -D_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \\ & \quad - (\nu_{\theta r} D_r + 2D_{\theta r}) \frac{\partial^3 w}{r \partial r^2 \partial \theta} \end{aligned} \quad (10.2)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하면 횡변위 w 에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[w] & - \frac{\partial}{r \partial r} \left(\bar{N}_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ & - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\bar{N}_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 \mathcal{L} 은 편미분연산자로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & D_r \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3}{r \partial r^3} \right) + D_\theta \left(\frac{\partial^4}{r^4 \partial \theta^4} + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial^2}{r^4 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial}{r^3 \partial r} \right) + \\ & 2(\nu_{\theta r} D_r + 2D_{r\theta}) \\ & \left(\frac{\partial^4}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3}{r^2 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{r^4 \partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 회전원판에 작용하는 평면력

식 (9)에서 \bar{N}_r 과 \bar{N}_θ 는 원심력에 의해 발생하는 평면력으로 미지수이므로 다음과 같은 r -방향으로의 평형방정식으로 결정된다.

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r \bar{N}_r) - \frac{\partial \bar{N}_{r\theta}}{\partial \theta} + \bar{N}_\theta = r q_r \quad (13)$$

여기서 반경방향으로의 하중 q_r 은 원심력에 의한 하중으로 $q_r = \rho \Omega^2 r$ 로 주어진다.

\bar{N}_r , \bar{N}_θ , $\bar{N}_{r\theta}$ 는 식 (1.2)에 주어진 응력을 두께 방향으로 적분하면 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{N}_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = K_r \frac{d \bar{u}_r}{dr} + \nu_{r\theta} K_\theta \frac{\bar{u}_r}{r} \quad (14.1)$$

$$\bar{N}_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = \nu_{\theta r} K_r \frac{d \bar{u}_r}{dr} + K_\theta \frac{\bar{u}_r}{r} \quad (14.2)$$

$$\bar{N}_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} dz = h G \left(-\frac{\bar{u}_\theta}{r} + \frac{d \bar{u}_r}{dr} \right) \quad (14.3)$$

여기서

$$K_r = \frac{E_r h}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} \quad (15.1)$$

$$K_\theta = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} \quad (15.2)$$

축대칭 문제이므로 $\partial \bar{N}_{r\theta} / \partial \theta = 0$ 이 되고 식 (14)를 식 (13)에 대입하며 정리하면 다음과 같은 \bar{u}_r 에 대한 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$r^2 \frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + r \frac{d \bar{u}_r}{dr} - \mu^2 \bar{u}_r = -\frac{\rho h \Omega^2 r^3}{K_r} \quad (16)$$

식 (16)에서 $\mu^2 = E_\theta / E_r$ 로 정의되며 코시-오일러 (Cauchy-Euler) 미분방정식의 형태이다.

$r = b$ 에서 고정되고 $r = a$ 에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{u}_r(b) = 0 \quad (17.1)$$

$$\bar{N}_r(a) = \left(K_r \frac{d \bar{u}_r}{dr} + \nu_{r\theta} K_\theta \frac{\bar{u}_r}{r} \right)_{r=a} = 0 \quad (17.2)$$

식 (17)의 경계조건을 적용하여 식 (16)의 해인 \bar{u}_r 를 구하고 식 (14)에 대입하여 원심력에 의한 평면력 \bar{N}_r 와 \bar{N}_θ 를 구할 수 있다. $\mu^2 = 9$ 인 경우에는 \bar{u}_r , \bar{N}_r , \bar{N}_θ 값이 특이하게 (singular) 되므로 이 경우에는 별도로 해를 구해야 한다. μ^2 값에 따라 각각 해를 구하여 통합식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_r = & k \Omega^2 \{ (C_{r1} - \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} \\ & - \frac{C_{r2}}{r^{\mu+1}} - C_{r3} r^2 g(r) \} \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_\theta = & k \Omega^2 \{ (C_{\theta 1} - \nu_{\theta r} \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} + \frac{C_{\theta 2}}{r^{\mu+1}} \\ & - C_{\theta 3} r^2 g(r) \} \end{aligned} \quad (18.2)$$

여기서

$$\begin{aligned} C_{r1} = & (1 + \mu \nu_{r\theta}) \{ [(3 + \mu^2 \nu_{r\theta}) g(a) + \delta_{\mu 3}] a^3 b^{-\mu} \\ & + \mu (1 - \mu \nu_{r\theta}) a^{-\mu} b^3 g(b) \} \frac{\rho h}{C} \end{aligned} \quad (19.1)$$

$$\begin{aligned} C_{r2} = & \{ \mu (1 + \mu \nu_{r\theta}) g(a) - (3 + \mu^2 \nu_{r\theta}) g(b) \\ & + \delta_{\mu 3} \} a^\mu b^3 \frac{\rho h}{C} \end{aligned} \quad (19.2)$$

$$C_{r3} = 3 + \mu^2 \nu_{r\theta} \quad (19.3)$$

$$C_{\theta 1} = \mu C_{r1}, \quad C_{\theta 2} = \mu C_{r2}, \quad C_{\theta 3} = \mu^2 (1 + 3 \nu_{\theta r}) \quad (19.4)$$

$$C = (1 + \mu \nu_{r\theta}) (a/b)^\mu + (1 - \mu \nu_{r\theta}) (b/a)^\mu \quad (19.5)$$

$$\begin{cases} k = 1/(9 - \mu^2), \quad \delta_{\mu 3} = 0, \quad g(r) = 1 \text{ for } \mu \neq 3 \\ k = 1/6, \quad \delta_{\mu 3} = 1, \quad g(r) = \ln(r) \text{ for } \mu = 3 \end{cases} \quad (19.6)$$

식 (18)에 주어진 \bar{N}_r , \bar{N}_θ 를 식 (11)에 대입하면 회전하는 원판에 부착된 $r-\theta$ 좌표계에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

2.4 갤러킨 방법

식 (11)을 $r-\phi$ 좌표계로 기술하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[w] - \frac{\partial}{r\partial r} \left(\bar{N}_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r\partial \phi} \left(\bar{N}_\theta \frac{\partial w}{r\partial \phi} \right) \\ + \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \phi} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) = q_z \end{aligned} \quad (20)$$

이때 \mathcal{L} 은 편미분 연산자로 (12)에 주어진 \mathcal{L} 에서 θ 를 ϕ 로 바꾸어 얻어진다.

자유진동해석을 위해 식 (11)에서 횡하중 $q_z = 0$ 으로 하고 변형의 확대칭성을 고려하여 $w = R(r)e^{in\theta}e^{i\omega t}$ 로 변수분리하면 식 (11)은 다음과 같은 고유치문제가 된다.

$$D[R] - \rho h \omega^2 R = 0 \quad (21)$$

여기서 D 는 상미분 연산자로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} D[R] = D_r \left(\frac{d^4 R}{dr^4} + 2 \frac{d^3 R}{rd r^3} \right) \\ - D_\theta \left[\frac{d^2 R}{r^2 dr^2} - \frac{dR}{r^3 dr} - n^2(n^2 - 2) \frac{R}{r^4} \right] \\ - 2n^2(\nu_{\theta r} D_r + 2D_{r\theta}) \left(\frac{d^2 R}{r^2 dr^2} - \frac{dR}{r^3 dr} + \frac{R}{r^4} \right) \\ - \left(\frac{d\bar{N}_r}{dr} - \frac{\bar{N}_r}{r} \right) \frac{dR}{dr} + \bar{N}_r \frac{d^2 R}{dr^2} + n^2 \bar{N}_\theta \frac{R}{r^2} \end{aligned} \quad (22)$$

상미분방정식은 해는 $R(r, t) = \sum_{k=1}^N q_k f_k(r)$ 와 같이 급수해를 가정하여 갤러킨(Galerkin) 방법으로 구한다.

$$\int_b^a \left[D \left[\sum_{k=1}^N q_k f_k \right] - \omega^2 \rho h \sum_{k=1}^N q_k f_k \right] f_i dr = 0 \quad (23)$$

식 (23)의 적분을 수행하여 정리하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$([K^b] + \Omega^2 [K^a] - \omega^2 [M])(q) = \{0\} \quad (24)$$

여기서 $[K^b]$ 은 휨에 의한 강성행렬, $[K^a]$ 는 회전에 의한 강성행렬, $[M]$ 은 질량행렬로 각 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{ki}^b = \int_b^a [D_r f_k'' f_i'' r + \nu_{r\theta} D_\theta (f_k'' f_i' + f_k' f_i'')] \frac{1}{r} \\ - n^2 \nu_{r\theta} D_\theta (f_k'' f_i' + f_k' f_i'') \\ + (D_\theta + 4n^2 D_{r\theta}) f_k' f_i' \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - n^2 (D_\theta + 4D_{r\theta}) (f_k' f_i' + f_k f_i'') \frac{1}{r^2} \\ + n^2 (n^2 D_\theta + 4D_{r\theta}) f_k f_i' \frac{1}{r^3} \Big] dr \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} K_{ki}^a = k \int_b^a [\{ (C_{r1} - \delta_{r3}) r^\mu \\ - C_{r2} r^{-\mu} - C_{r3} r^3 g(r) \} f_k' f_i' \\ + n^2 \{ (C_{\theta 1} - \nu_{\theta r} \delta_{r3}) r^{\mu-2} \\ + C_{\theta 2} r^{-\mu-2} - C_{\theta 3} r g(r) \} f_k f_i'] dr \end{aligned} \quad (26)$$

$$M_{ki} = \rho h \int_b^a f_k f_i r dr \quad (27)$$

마찬가지로 식 (20)에 $w(r, \phi, t) = R(r)e^{in\phi}e^{i\omega t}$ 를 대입하고 식 (24)를 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\lambda^2 + i2n\Omega\lambda + (\omega^2 - n^2\Omega^2) = 0 \quad (28)$$

식 (28)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} -i(\omega_{mn} + n\Omega) \\ i(\omega_{mn} - n\Omega) \end{cases} \quad (29)$$

여기서 $\omega_{mn} + n\Omega$ 는 전진파의 진동수이며 $\omega_{mn} - n\Omega$ 는 후진파의 진동수이다. 식 (29)의 m 과 n 은 각각 절원과 절선을 나타낸다. 후행파의 진동수가 원판의 회전수와 같아질 때 즉 $\omega_{mn} = n\Omega$ 일 때 회전속도는 임계속도 Ω_{cr} 로 정의된다. 원판이 임계속도에서 회전할 때, 감쇠가 전혀 없다면 외부의 정적 횡하중에 의해 원판의 운동은 발산하게 된다.

2.5 직교함수

급수해 $R(r, t) = \sum_{k=1}^N q_k f_k(r)$ 을 구하기 위해서 $f_k(r)$ 의 선정이 매우 중요하다. 이 연구에서는 일반적인 다항식인 $f_k(r) = (r-b)^{k+1}$ 을 이용하여 해를 시도 하였으나 $N \geq 4$ 로 하면 수렴하지 못하는 결과를 얻었다. 따라서 이 연구에서는 고차모드에 대해서도 안정적인 해를 얻고자 Kim과 Dickinson이⁽¹⁷⁾ 사용한 직교 다항식을 도입한다.

첫 번째 함수는 다음과 같이 설정될 수 있다.

$$f_1(\xi) = \sum_{j=1}^5 a_j \xi^{j-1} \quad \text{where } \xi = r/a \quad (30)$$

여기서 고정-자유지지 경계조건에 대해 변위 (essential) 및 하중(natural) 경계조건을 만족하는 각 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= c^2(6-8c+3c^2) \\ a_2 &= -4c(3-3c+c^2) \\ a_3 &= 6, \quad a_4 = -4, \quad a_5 = 1, \quad c = b/a \end{aligned} \quad (31)$$

$k \geq 2$ 인 경우인 두 번째 함수부터는 다음과 같은 방법으로 결정할 수 있으며 변위 경계조건만 만족한다.

$$f_{k+1}(\xi) = (\xi - b_k)f_k(\xi) - c_k f_{k-1}(\xi) \quad (32)$$

이때 $f_0 \equiv 0$ 로 정의되며 b_k 와 c_k 는 다음과 같이 계산된다.

$$b_k = \int_c^1 \xi^2 f_k^2(\xi) d\xi / \int_c^1 \xi f_k^2(\xi) d\xi \quad (33-1)$$

$$c_k = \int_c^1 \xi f_k^2(\xi) d\xi / \int_c^1 \xi^2 f_{k-1}^2(\xi) d\xi \quad (33-2)$$

3. 결 론

이 연구에서는 직교이방성 재료로 구성된 회전 원판의 동적 방정식을 정식화하였으며 회전좌표계와 비회전 좌표계에 대한 고유진동수에 대한 식을 유도하였다. 이들 진동수에 대한 관계식으로부터 직교이방성 원판의 임계속도 식을 구하였다. 직교이방성 회전 원판에 작용하는 평면력은 반경방향과 원주방향의 탄성계수의 비 $E_\theta/E_r = 9$ 일 때는 특이하게 되므로 이에 대한 해를 통합식으로 제시하였다.

갤러킨 방법에 의한 급수해법을 제시하였으며 급수해는 서로 특별히 생성된 직교함수들을 이용하여 해의 수렴성과 정확성을 높이도록 하였다. 자매논문인 II편에서는 이 논문에서 제시된 지배방정식 및 해법을 적용하여 회전하는 복합재료 원판의 진동해석을 수행하고 임계속도를 제시하고 이에 대한 결과를 분석한다.

참 고 문 헌

(1) Lee, S. -Y., Kim, J. -Y. and Lim, S., 2002, "Critical and Flutter Speeds of Optical Disks," *Microsystem Technologies*, Vol. 8, pp. 206~211.

(2) Lamb, H. and Southwell, R. V., 1921, "The Vibration of a Spinning Disk," *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 99, pp. 272~280.

(3) Barash, S. and Chen, Y., 1972, "On the Vibration of a Rotating Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 39, pp. 1143~1144.

(4) Tobias, S. A. and Arnold, R. N., 1957, "The Influence of Dynamic Imperfections on the Vibrations of Rotating Disks," *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, Vol. 171, pp. 669~690.

(5) Mote, C. D. Jr., 1967, "Natural Frequencies in Annuli with Induced Thermal Membrane Stresses," *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME, Vol. 89, pp. 611~618.

(6) Iwan, W. D. and Moeller, T. D., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 43, pp. 485~490.

(7) Kirkhope, J. and Wilson, G. J., 1976, "Vibration and Stress Analysis of Thin Rotating Discs Using Annular Finite Elements," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44, No. 4, pp. 461~474.

(8) Lee, S. Y., 1999, "On Critical Speed of a Roataing Disk in Information Storage Devices," *Proceedings of the KSNVE Spring Annual Conference*, pp. 185~191.

(9) Lee, S. Y. and Yun, D. H., 2001, "Critical and Flutter Speeds of Rotating Disks in Information Storage Disks," *Proceedings of the KSNVE Autumn Annual Conference*, pp. 484~489.

(10) Lee, S. Y. and Lim, H., 2003, "Vibration Characteristics of CD and DVD Disks," *Roceedings of the KSNVE Spring Annual Conference*, pp. 998~1003.

(11) Minkarah, I. A. and Hopemann, W. H., II, 1964, "Flexural Vibrations of Cylindrically Aeolotropic Circular Plates," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 12, No. 3, pp. 470~475

(12) Pandalai, K. A. and Patel, S. A., 1965, "Natural Frequencies of Orthotropic Circular Plates," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 780~181.

(13) Ginesu, F., Picasso, B. and Priolo, P., 1979, "Vibration Analysis of Polar Orthotropic Annular Discs," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 65, No. 1, pp. 97~105.

(14) Ghosh, N. C., 1985, "Thermal Effect on the Transverse Vibration of High Speed Rotating Anisotropic Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 543~548.

(15) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G. and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part I: Modelling and Solution Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 3, pp. 457~485.

(16) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G. and Yigit

A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part II: Application to a Specially Orthotropic Disk," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 3, pp. 457~485.

(17) Kim, C. S. and Dickinson, S. M., 1989, "On the Lateral Vibration of Thin Annular and Circular Composite Plates Subject to Certain Complicating Effects," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 130, No. 3, pp. 363~377.

(18) Koo, K. N., 2006, "Vibration Analysis and Critical Speeds of Rotating Polar Orthotropic Disks, Part II : Analysis Results," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 16, (to be Published).