

일반역행렬과 대공간구조물의 비선형 해석

Generalized Inverse and Nonlinear Analysis of Large Space Structures



김재열*
Kim Jae Yeol

1. 서 언

구조공학분야 특히 대공간 구조물의 비선형해석은 수치해석이 곤란한 경우가 많다. 이것을 해소하기 위해서는 특이 매트릭스나 장방형 매트릭스의 관계를 역관계를 풀어낼 수 있는 일반역행렬의 도입이 필요시 된다.

일반역행렬을 이용한 대공간 구조물의 해석방법은 일본 동경대 교수였던 故 Y. Hangai 교수가 그의 저서인 形態解析¹⁾에 일목요연하게 정립하였으며, K. Kawaguchi 교수에 의해 영어본으로 출판되기도 하였다. 국내에서는 필자를 비롯하여 세명대 김 승덕 교수, 인하대 한 상을 교수에 의해 일부 응용되기도 하였다. 본 고에서는 일반역행렬에 대한 일반사항과 그동안 발표되었던 관련 논문을 중심으로 일반역행렬을 이용하여 대공간구조물의 해석에 응용되었던 세 가지 예를 요약하여 게재하기로 한다.

일반역행렬이 응용되는 각 예들에 대한 정식화 내용과 일반역행렬이 어디서 어떻게 응용되는지 까지만 다루기로 한다.

2. 일반역행렬

2.1 일반역행렬의 정의

다음에 따르는 4개의 식을 만족시킬 때, A^{-} 를 A 의 일반역행렬이라고 정의한다.

$$\begin{aligned} (AA^{-})^T &= AA^{-} \\ (A^{-}A)^T &= A^{-}A \\ AA^{-}A &= A \\ A^{-}AA^{-} &= A^{-} \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 해의 존재조건

A 가 (m, n) 형 장방형 매트릭스이고, 벡터 b 를 갖는 아래의 식을 고려하자.

$$Ax = b \tag{2}$$

이 때, 식(2)를 만족하는 해가 존재하기 위해서는 아래의 관계가 성립하여야 한다.

$$AA^{-}b = b \tag{3}$$

* 정회원, 협성대학교 건축공학과 조교수, 공학박사

여기서, 단위 매트릭스 I 를 도입하여 다시 나타내면 다음과 같다.

$$(I - AA^{-1})b = 0 \tag{4}$$

즉, 식(4)가 주어진 조건에 대한 해의 존재성을 체크하는 식이 된다.

2.3 해의 형식

식(5)를 만족하는 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = A^{-1}b + [I_n - A^{-1}A]a \tag{5}$$

여기서, $A^{-1}b$ 를 특해(particular solution)라 하고, 나머지 부분을 여해(homogeneous solution)라 한다. 그런데 식(5)에서 보는 바와 같이 a 값에 따라서 해가 결정되고, 또 어떤 a 값을 선택하느냐에 따라서 해의 발산유무, 수렴속도, 정확도를 결정짓게 된다.

일반역행렬의 성질을 이용하면 식(5)의 우변의 둘째항은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$[I_n - A^{-1}A]a = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n \tag{6}$$

h_1, h_2, \dots, h_n 중에서 독립인 열벡터의 수를 p 개라고 하면, 종속인 벡터는 독립인 벡터에 흡수되므로, 식(6)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[I_n - A^{-1}A]a = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_p h_p \tag{7}$$

여기서, 임의의 벡터 a 에 따라 식(5)의 해가 결정된다.

따라서, 해의 발산을 방지하고 수렴속도와 정확도를 향상시킬 수 있는 적절한 일반역행렬의 해를 고려하여 최적의 해를 찾을 수 있다.

3. 제한조건을 갖는 케이블 구조물의 형상해석

3.1 부재-절점 매트릭스

n_{total} 개의 절점과 m 개의 부재를 가진 네트워크 모

델을 고려하자. 고정절점(n_{fix})과 자유절점(n_{free})으로 나누어 $n_{total} = n_{free} + n_{fix}$ 로 나타낸다. j 번째의 부재 번호는 시작 절점을 $i(j)$ 로 하고, 반대편 절점을 $k(j)$ 로 나타낸다. 일반적인 부재-절점 매트릭스 c_j 는 다음과 같이 1, -1 그리고 0을 이용하여 구성한다. 이 매트릭스는 구속절점과 자유절점으로 구분하는 역할을 한다.

$$i(j) = 1 \rightarrow +1$$

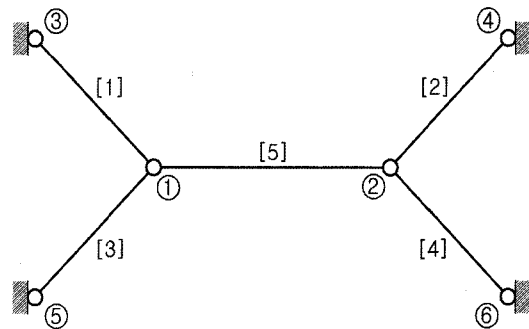
$$c_j(i, i) = k(j) = 1 \rightarrow -1$$

$$\text{다른 모든 경우} \rightarrow 0$$

여기에서, +는 자유절점, -는 고정절점을 나타내며, 고정점의 좌표 C_{fix} 와 자유절점의 좌표를 이용하여 부재 C_{free} -절점관계를 나타내면 다음과 같다.

$$C_{total} = C_{free} + C_{fix} \tag{8}$$

부재-절점 매트릭스 c_j 를 간단한 구조물을 이용하여 나타내어 보면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 절점번호 및 부재번호

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	-1	0	0	0
2	0	1	0	-1	0	0
3	1	0	0	0	-1	0
4	0	1	0	0	0	-1
5	1	1	0	0	0	0
	C_{free}			C_{fix}		

<그림 2> 내력밀도법에서의 부재-절점관계

3.2 제한조건을 포함하는 비선형방정식

지정된 r 개의 부재에 대해 제한조건을 다음과 같이 나타낸다고 가정하자.

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z, q) &= 0 \\ g_2(x, y, z, q) &= 0 \\ &\vdots \\ g_r(x, y, z, q) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서, 제한조건은 내력밀도의 함수로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(x(\mathbf{q}), y(\mathbf{q}), z(\mathbf{q}), \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

이 식은 일반적으로 비선형 방정식이 되며, 선형해석에 의한 초기형상에 대한 내력밀도 $\mathbf{q}^{(0)}$ 에서는 만족하지 않는다. 한편, 여기에서는 이 비선형식을 풀기 위해 각 스텝별 $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(1)}) = \mathbf{0}$ 을 만족하는 $\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}$ 를 결정하여야 하며, 다음과 같이 반복법을 채택한다. 우선, $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(1)}) = \mathbf{0}$ 대신에 $\Delta\mathbf{q}$ 를 만족하는 선형식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(0)}) + \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(0)})}{\partial \mathbf{q}} \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (11)$$

식(11)을 다음과 같이 두면,

$$\mathbf{G}^T = \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(0)})}{\partial \mathbf{q}} \Delta\mathbf{q} \quad (12)$$

$$\mathbf{r} = -\mathbf{g}^*(\mathbf{q}^{(0)}) \quad (13)$$

결국 식(12), 식(13)은 $\Delta\mathbf{q}$ 에 대한 선형조건식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (14)$$

식(14)에서 \mathbf{G}^T 가 부가조건에 대한 비선형성을 포함하는 야코비안 매트릭스가 되며, 주어지는 조건에 따라 다르게 된다.

3.3 부재길이에 대한 제한

제한조건으로써 가해진 부재길이를 l_{spi} 라고 할 때, 다음과 같은 조건식이 된다.

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= l_1(x, y, z) - l_{s1} = 0 \\ g_2(x, y, z) &= l_2(x, y, z) - l_{s2} = 0 \\ &\vdots \\ g_r(x, y, z) &= l_r(x, y, z) - l_{sr} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서, 조건이 부가된 부재에 대한 벡터 \bar{l} , 전체 부재에 대한 벡터 l , 그리고 이들에 대응하는 대각행렬 \bar{L} , \bar{V} , \bar{W} 를 구성한다. 결국, 다음 조건을 만족하는 해를 구하는 문제가 된다.

$$\mathbf{g} = \bar{l} - \bar{L}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (16)$$

여기에서, 다음의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial x} = \bar{C}_{free} \bar{U} \bar{L}^{-1} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial y} = \bar{C}_{free} \bar{V} \bar{L}^{-1} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial z} = \bar{C}_{free} \bar{W} \bar{L}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_d^T &= -\bar{L}^{-1} (\bar{U} \bar{C}_{free} \bar{D}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{U} \\ &+ \bar{V} \bar{C}_{free} \bar{D}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{V} + \bar{W} \bar{C}_{free} \bar{D}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (18)$$

3.4 부재 축력에 대한 제한

제한조건으로서 가해진 부재축력을 s_{spi} 라고 할 때, 다음과 같은 조건식이 된다.

$$\mathbf{g}(x, y, z, \mathbf{q}) = \bar{L}\mathbf{q} - \bar{s}_{sp} = \bar{Q}\mathbf{l} - \bar{s}_{sp} = \mathbf{0} \quad (19)$$

여기에서, 다음의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{L}} \end{aligned} \quad (20)$$

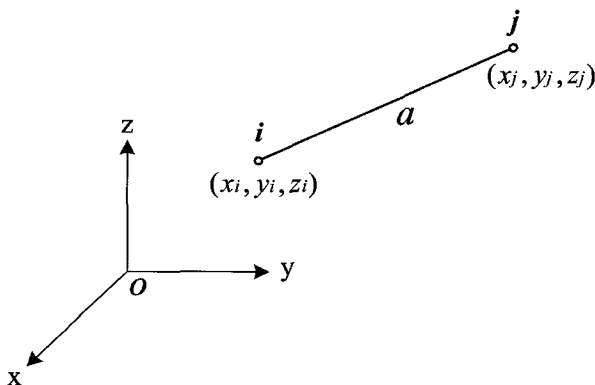
정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f^T &= \bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{L}}^{-1} (\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{U} \\ &+ \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 풀고자 하고 있는 기본식은 (14)이다. 즉, 각각의 제한조건을 포함하는 \mathbf{G}^T 를 구한 후, 이 식을 식(14)에 대입하여 $\Delta \mathbf{q}$ 가 주어진 오차에 수렴하도록 반복법을 계산하고자 한다. 이 과정에서 \mathbf{G}^T 의 역행렬을 구해야 되는데, 식(18)의 \mathbf{G}_i^T 와 식(21)의 \mathbf{G}_f^T 는 $m \times n$ 형(m :총 부재수, n :총 부재수-제한조건이 도입된 부재수) 장방형 매트릭스가 되기 때문에 식(14)에 그대로 적용하여 풀 수가 없다. 이러한 문제를 없애기 위해 장방형 매트릭스의 역행렬을 구할 수 있는 일반역행렬을 도입하였다.

4. 불안정 링크 구조들의 안정화 이행 과정 해석

4.1 기하학적 관계식



<그림 3> 부재의 절점좌표

절점 (i, j) 의 좌표값과 부재 α 의 방향코사인을 벡터로 나타내면 다음식과 같다.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} \\ \mu_{ij} \\ \nu_{ij} \end{bmatrix} \quad (22)$$

부재의 길이 l_α 는 다음과 같이 된다.

$$l_\alpha = [(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)^T (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

식(22)와 식(23)을 이용하여 방향코사인 벡터 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ 를 구하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \quad (24)$$

식(24)를 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} (\dot{\mathbf{X}}_j - \dot{\mathbf{X}}_i) - \frac{\dot{l}_\alpha}{l_\alpha^2} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \quad (25)$$

식(23)을 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\dot{l}_\alpha = \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T (\dot{\mathbf{X}}_j - \dot{\mathbf{X}}_i) \quad (26)$$

식(26)을 미분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\ddot{l}_\alpha = \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T (\ddot{\mathbf{X}}_j - \ddot{\mathbf{X}}_i) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha^T (\dot{\mathbf{X}}_j - \dot{\mathbf{X}}_i) \quad (27)$$

식(26)을 매트릭스의 형태로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$[-\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \quad \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_i \\ \dot{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix} = \dot{l}_\alpha \quad (28)$$

식(28)을 전체로 확장하고 좌변의 첫째항을 \mathbf{A} 로 놓으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{i}} \quad (29)$$

식(29)을 미분하면 다음과 같다.

$$A\ddot{X} + \dot{A}\dot{X} = \dot{i}, \quad \dot{A} = \dot{A}(i, \dot{X}) \quad (30)$$

여기서, 자유도수를 n , 부재수를 m 이라고 하면, A 는 (m, n) 형 매트릭스가 된다. 불안정 강체트러스에서는 부재의 길이의 변화가 일어나지 않으므로, 식(29)와 식(30)에서 우변에 있는 i 과 \dot{i} 은 0이 된다. 따라서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A\dot{X} = 0 \quad (31)$$

$$A\ddot{X} + \dot{A}\dot{X} = 0 \quad (32)$$

식(31)과 식(32)가 불안정 구조물의 기하학적인 관계를 나타내는 식이다.

식(31)에서 나타나는 방향코사인 매트릭스인 A 는 장방형 매트릭스가 되어 수치적인 불안정성이 발생한다. 따라서 이러한 문제를 해결할 수 있는 일반역행렬을 도입한다.

5. 불신장 변위모드를 갖는 불안정 트러스 구조물의 동적안정화 해석

5.1 기하관계식

불안정 트러스 구조물에 있어서의 부재와 절점과의 기하학적인 관계를 식으로 전개하면 다음과 같다.

구조물의 초기 형상을 n 차의 일반화 좌표로 나타내면 다음과 같다.

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \quad (33)$$

여기서, n 은 총 자유도수이다.

다음으로, 불안정 구조물에서는 불신장 변위가 발생하므로, 불신장 변위에 관한 제약조건식을 나타내면 다음과 같다.

$$g = g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (34)$$

여기서, l 은 제약조건수이고, 부재수(m)와 같다.

식(34)는 부재 길이의 변화에 대한 제한조건을 나타내는 식이고, 기하학적인 제약조건은 기하학적인 적합조건으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Ax' = g \quad (35)$$

여기서, A 는 방향여현 매트릭스이고, 방향여현 매트릭스라는 것은 국부좌표계를 전체좌표계로 나타내었을 경우에 좌표변환에 관계되는 매트릭스이다. 또한 A 는 (m, n) 형 장방 매트릭스이다. 그리고, $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}^T$ 이다. 결국 식(35)는 부재의 길이를 절점변위으로써 표현한 것을 뜻하며, 식(35)에 변형을 제어하는 파라미터 s 를 도입하면 다음과 같다.

$$A(s)x'(s) = g(s) \quad (36)$$

식(36)을 s 에 관해서 순차적으로 미분을 행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A'(s)x'(s) + A(s)x''(s) &= g'(s) \\ A''(s)x'(s) + 2A'(s)x''(s) + A(s)x'''(s) &= g''(s) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (37)$$

식(36)과 (37)에서 $s = s_0$ 에서의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x'(s_0) &= A^+(s_0)g(s_0) + H(s_0)a'(s_0) \\ x''(s_0) &= A^+(s_0)\{g'(s_0) \\ &\quad - A'(s_0)x'(s_0)\} + H(s_0)a''(s_0) \\ x'''(s_0) &= A^+(s_0)\{g''(s_0) \\ &\quad - A''(s_0)x'(s_0) - 2A'(s_0)x''(s_0)\} \\ &\quad + H(s_0)a'''(s_0) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (38)$$

식(38)에서 $A^+(s_0)$ 는 $A(s_0)$ 의 일반역행렬을 나타낸다. 일반역행렬이라는 것은, 장방형 매트릭스의 역행렬을 구할 수 있는 매트릭스 수치해석기법이다.

여기서 일반역행렬 이론을 도입하는 이유는 식(36)과 식(37)에서 $x'(s_0), x''(s_0), \dots$ 을 구하기 위해서는 $A(s_0)$ 의 역행렬을 구해야 한다. 그러나, 앞에서도 기술한 바와 같이 $A(s_0)$ 가 장방형 매트릭스가 되기 때문에 임의의 매트릭스에 대한 역행렬을 구할 수 있는 일반역행렬 이론을 도입하는 것이다. 그리고, $H(s_0)$ 는 불신장 변위를 나타내는 매트릭스이다. 또한, $\alpha'(s_0), \alpha''(s_0)$ 는 일반역행렬로부터 나오게 되는 임의의 벡터이고, 변위의 속도와 가속도를 제어하는 벡터이다. 또한 식(38)에서 구한 x', x'', \dots 은 증분방정식에서 사용하게 된다.

5.2 증분방정식

식(33)에서 나타난 구조물의 절점 좌표를 s 의 함수로써 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$x(s) = x(s_0) + x'(s_0)s + \frac{1}{2}x''(s_0)s^2 + \frac{1}{6}x'''(s_0)s^3 + \dots \quad (39)$$

x 의 증분 $d(s) = x(s) - x(s_0)$ $d(s)$ 로 정의하고, 식(39)의 2차항까지 만을 고려하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d(s) = x'(s_0)s + \frac{1}{2}x''(s_0)s^2 \quad (40)$$

식(38)을 식(40)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d(s) &= A^+(s_0) \left\{ g(s_0)s + \frac{1}{2}g'(s_0)s^2 \right\} \\ &+ H(s_0) \left\{ \alpha'(s_0)s + \frac{1}{2}\alpha''(s_0)s^2 \right\} \\ &+ A^+(s_0) \left\{ -\frac{1}{2}A'(s_0)x'(s_0)s^2 \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

식(41)에서 제1항은 신장 변위를 나타내는 항이고, 제2항은 불신장 변위를 나타내는 항이다. 제3항은 증분변위 $d(s)$ 를 신장 변위와 불신장 변위성분으로 나누는 데에 있어서 발생하게 되는 항이다.

제약조건(불신장 변위) $g = l = 0$ 으로 하는 것에 의해서 식(41)의 제1항이 소거된다. 식으로 나타내

면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d(s) &= H(s_0) \left\{ \alpha'(s_0)s + \frac{1}{2}\alpha''(s_0)s^2 \right\} \\ &+ A^+(s_0) \left\{ -\frac{1}{2}A'(s_0)x'(s_0)s^2 \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

여기서 식(42)를 s 와 s^2 에 관한 항으로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d(s) &= H(s_0)\alpha'(s_0)s \\ &+ \{H(s_0)\alpha''(s_0) - A^+(s_0)A'(s_0)x'(s_0)\} \frac{1}{2}s^2 \end{aligned} \quad (43)$$

식(43)을 s 에 관해서 순차적으로 미분을 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d'(s) &= H(s_0)\alpha'(s_0) \\ &+ \{H(s_0)\alpha''(s_0) - A^+(s_0)A'(s_0)x'(s_0)\}s \end{aligned} \quad (44)$$

$$d''(s) = H(s_0)\alpha''(s_0) - A^+(s_0)A'(s_0)x'(s_0) \quad (45)$$

식(43), (44) 그리고 (45)는 각각 증분 변위, 증분 변위속도, 증분 변위가속도를 나타낸다. 따라서, 식(43), 식(44) 그리고 식(45)이 증분방정식을 나타내며, 이 증분방정식을 통하여 각 시간에 따른 절점 변위와 속도 그리고 가속도를 구할 수 있다. 또한 증분방정식에서 $H(s_0)$ 는 불신장 변위성분에 관계된 매트릭스로서 불안정 구조물의 동적 거동에 있어서 매우 중요한 역할을 한다.

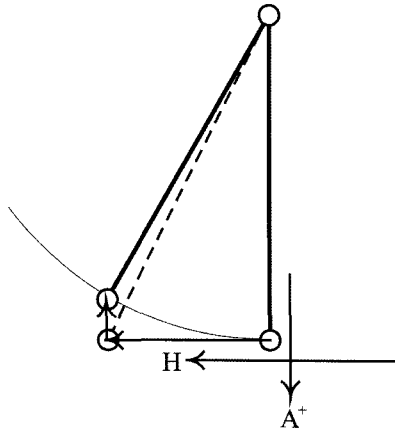
5.3 신장 변위와 불신장 변위

5.3.1 변위의 구성

<그림 4>에서 보는 바와 같이 진자 운동은 불신장 변위성분 (H)과 신장 변위성분 (A^+)으로 나눌 수가 있다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$d(s) = d_E(s) + d_H(s) \quad (46)$$

여기서 $d_E(s)$ 를 포함하는 공간을 W 라 하고, $d_H(s)$ 를 포함하는 공간을 V 라 하면, $d_E(s)$ 와 $d_H(s)$ 는 서로 직교하는 공간 안에서의 변위성분이 된다.



〈그림 4〉 진자 운동

5.3.2 불신장 변위 모드

기하학적인 구속조건은 불신장 변위이므로, 식(35)에서 우변은 0이 된다. 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Ax' = 0 \tag{47}$$

식(47)에서 x' 을 구하기 위해 일반역행렬을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$x' = [I_n - A^+A]a' \tag{48}$$

여기서, A 의 랭크를 r 이라고 하자. 그러면,

$$\text{rank}(A) = r \tag{49}$$

이 되고, 식(49)의 계수 매트릭스의 랭크는,

$$\text{rank}(I_n - A^+A) = n - r \tag{50}$$

이 된다. 여기서 $n - r = p$ 로 놓으면, p 는 미소변위의 범위에 있어서의 불신장 변위의 자유도수이고, 통상은 불안정 차수라 불리우는 것이다.

다음으로, 식(48)의 계수 매트릭스인 $[I_n - A^+A]$ 를 열벡터의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[I_n - A^+A] = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \tag{51}$$

계수 매트릭스의 랭크가 p 이므로, h_1, h_2, \dots, h_n 중에서 독립인 열벡터가 p 개가 되어 차원을 저감하게 된다. 그리고 각각의 독립인 열벡터는 전체적인 구조물에 있어서 각각의 불신장 변위 모드를 나타내고 있다.

6. 결 언

지금까지 대공간 구조물의 비선형해석에 일반역행렬이 도입된 세 가지 예를 설명하였다. 첫째로, 제한조건을 갖는 케이블 네트구조물의 형상해석에 이용된 경우, 두번째는 불신장 변위모드를 갖는 불안정 트러스 구조물의 동적안정화 해석에 도입된 경우, 마지막으로 불안정 링크 구조물의 안정화 이행과정 해석의 도입된 경우를 소개하였다. 이 모든 경우는 이미 국내에도 대공간 연구자들에 의해 논문의 형태로 발표되어 있으며, 자세한 해석 예 및 결과는 논문들을 참조 해주기를 바란다. 아울러, 구조물 안정문제에 있어서 특이점 근방에 대한 해석(분기해석), 텐세그리티형 대공간 구조물의 해석등 토목, 건축, 기계 항공분야등에 매우 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 半谷裕彦, 川口建一, 形态解析, 1991, pp.21~42, 67~93
2. 권택진, 김재열, 김진우, "구성부재의 위상을 이용한 불안정 트러스 구조물의 안정화 이행과정", 한국 전산구조공학회 학술발표대회 논문집, 제14권 제1집, 2001. 4, pp.251~258
3. 김진우, 김재열, 권택진, "일반역행렬을 이용한 불안정 Link 구조물의 형태해석에 관한 연구", 대한건축학회 학술발표대회 논문집, 제21권, 제1호, 2001. 4., pp.183~186

4. 김재열, 이장복, 권택진, “一般逆行列을 이용한 케이블네트 構造物의 形狀決定에 관한 연구”, 대한건축학회 논문집, 제16권 제6호, 2000. 6., pp.3~12
5. Kim, J. Y., Choong, K. K., “A Study on the Stability Boundary for Multi-Loading System by using Generalized Inverse”, 전산구조공학 제12권 제2호, 1999. 6., pp.223~231