

RAG 기반 계층 분류 (2)

이 상 훈[†]

경원대학교 산업공학과

RAG-based Hierarchical Classification

Sang-Hoon Lee[†]

Kyungwon University

Abstract : This study proposes an unsupervised image classification through the dendrogram of agglomerative clustering as a higher stage of image segmentation in image processing. The proposed algorithm is a hierarchical clustering which includes searching a set of MCSNP (Mutual Closest Spectral Neighbor Pairs) based on the data structures of RAG(Regional Adjacency Graph) defined on spectral space and Min-Heap. It also employs a multi-window system in spectral space to define the spectral adjacency. RAG is updated for the change due to merging using RNV (Regional Neighbor Vector). The proposed algorithm provides a dendrogram which is a graphical representation of data. The hierarchical relationship in clustering can be easily interpreted in the dendrogram. In this study, the proposed algorithm has been extensively evaluated using simulated images and applied to very large QuickBird imagery acquired over an area of Korean Peninsula. The results have shown its potentiality for the application of remotely-sensed imagery.

Key Words : image classification, unsupervised analysis, hierarchical clustering, RAG, heap, denrogram.

요약 : 본 연구는 원격 탐사의 영상 처리에서 영상 분할의 상위 수준으로 응집 계층 clustering의 dendrogram을 통한 무감독 영상 분류를 제안한다. 제안된 알고리즘은 분광 영역에서 정의된 RAG (Regional Agency Graph)와 min-heap 자료 구조를 이용하여 MCSNP (Mutual Closest Spectral Neighbor Pair)의 집합을 검색하면서 합병을 수행하는 계층 clustering 방법이다. 계산 시간과 저장 기억의 사용에 대한 효율을 증가시키기 위해 분광적 인접성을 정의하는 분광 공간(spectral space)내의 다중 창을 사용하였고 RNV (Region Neighbor Vector)을 이용하여 합병에 의하여 변하는 RAG 갱신하였고 적절한 단계 수가 주어진다면 제안된 알고리즘은 집단 합병의 계층적 관계를 쉽게 해석 할 수 있는 dendrogram을 생성한다. 본 연구는 simulation 자료를 사용하여 광범위하게 제안된 알고리즘에 대한 평가 실험을 수행 하였으며 실험 결과는 알고리즘의 효율성을 입증하였다. 또한 한반도에서 관측된 방대한 크기의 QuickBird 영상의 적용 결과는 제안된 알고리즘이 무감독 영상 분류를 위한 강력한 수단임을 보여준다.

2006년 11월 28일 접수 ; 2006년 12월 26일 수리.

[†] 교신저자: 이상훈(shl@mail.kyungwon.ac.kr)

1. 서론

원격 탐사에서 수집된 지표면 영상은 한정된 수의 지역적 유형인 클래스들로 분류되어 지고 각 클래스는 화소(pixel)들의 집단이다. 영상 분석에서는 같은 클래스 내 화소들의 물리적 특성은 동일하며 서로 다른 클래스의 특성은 동일하지 않고, 클래스와 연계된 지역의 물리적 특성은 관측 값의 통계적 특성에 의해 대표된다고 가정한다. 영상 분류를 위하여서는 최대 우도 분류(maximum likelihood classification)와 같이 관측된 정경(scene)에 존재하는 클래스 수와 각 클래스와 연관된 관측 값의 통계적 특성에 대한 사전 지식이 필요한 감독(supervised) 기법을 일반적으로 사용한다. 분석 대상 정경에 포함 된 지역적 유형들을 알고 있을 경우 클래스의 통계적 특성에 대한 사전 정보는 훈련 견본(training sample)을 사용하여 얻을 수 있다. 그러나 훈련 과정을 통하여 클래스의 통계적 특성 값을 추정하는 작업은 대단히 많은 시간과 인력이 필요할 뿐 아니라 지상의 많은 구역은 한반도 이북처럼 정치적 혹은 지형적 이유 때문에 접근이 불가능하므로 많은 경우 정확한 훈련 지역을 설정하는 것조차 매우 어렵거나 불가능하다. 그러므로 관측 정경의 특성에 관한 사전정보 없이 클래스와 관련된 통계적 특성 값의 추정을 포함하는 무감독(unsupervised) 분석 기법은 매우 중요하다.

무감독 영상 분류는 일반적으로 clustering에 의해 수행된다. 이러한 clustering은 같은 집단에 속하는 요소들은 가능한 유사하고 다른 집단의 요소들과는 가능한 상이하도록 전체 자료를 여러 수의 집단으로 나누는 과정으로 가장 대표적인 방법들은 분할(partitional) clustering과 계층(hierarchical) clustering으로 구분될 수 있다. 분할 clustering은 하나의 초기 분할 형태를 선택한 후 집단의 요소들을 바꾸어가면서 미리 정의된 목적 함수에 따라 더 나은 분할 형태를 발견하는 과정으로 대표적인 알고리즘으로는 K-means (Macqueen, 1967) 방법과 Fuzzy c-Means(Bezdek, 1973) 방법이 있다. 그러나 분할 방법은 사전에 클래스의 수가 주어지지 않고 초기 분할 형태의 선택에 따라 분석 결과에 상당한 차이가 있을 수 있다. 원격 탐사 분석에서는 시간에 따라 지표면 현상이 변하므로 클래스의 수의 결정은 어려운 과제이다. 계층 clustering (Anderberg, 1973)

과정은 응집(agglomeration) 혹은 분리(division)에 수행되어지고 연속적으로 합병(혹은 분리)된 집단 간의 계층적 관계를 나타내는 graph인 dendrogram을 생성한다. 응집은 초기에 전체 자료의 모든 요소들을 개별 집단으로 정의한 후 연속적으로 집단을 합병하는 과정이고 분리는 역으로 하나의 전체 자료집단을 연속적으로 분리하는 과정이다. 계층 clustering의 장점은 병합 집단 간의 계층 관계를 용이하게 해석할 수 있는 dendrogram을 생성하며 분석 결과는 클래스 수와 초기 상태에 영향을 받지 않는다는 것이다.

본 연구는 원격 탐사의 영상 처리에서 영상 분할의 상위 수준으로 응집 계층 clustering의 dendrogram을 통한 무감독 영상 분류를 제안한다. 하위 수준의 하나 이상의 작은 지역(sub-region)들이 상위 수준의 하나의 더 큰 지역으로 구성되는 수치 영상(digital image)의 계층 구조(hierarchical structure)(Tanimoto and Klinger, 1990)에서는 응집 과정이 분리 과정보다 더 자연스럽게 적합할 수 있다. 원격 탐사에서 관측된 정경은 방대한 크기의 자료를 가지며 관측된 자료의 크기에 비해 매우 적은 수의 클래스를 가진다. 이러한 경우 통상적인 응집 clustering 과정은 계산상 매우 비효율적이며 그리고 실제적인 분석에서 계층 구조의 상위 단계의 dendrogram만이 필요하다. 제안된 알고리즘은 분광 영역에서 정의된 RAG과 MCSNP의 검색을 사용하는 계층 clustering 방법이다. RAG은 일반적으로 영상 분할을 위한 자료 구조로 공간 영역에서 지역을 대표하는 nodes와 인접 nodes를 연결하는 edges로 구성된 graph이다(Ballard and Brown, 1982). 본 연구에서 분광 영역에 정의된 RAG에서 인접성은 공간적 가까움이 아니고 그 지역을 대표하는 특성치인 분광 값의 유사성을 의미한다(앞의 공간적 RAG과 구별하기 위하여 본 논문에서는 S-RAG이라고 지칭한다). 또한 MCRNP (Mutual Closest Regional Neighbor Pair)가 공간적으로 인접한 지역들의 쌍이라면(Lee, 2004; 이상훈, 2006) MCSNP은 가장 유사한 분광 값을 갖고 있는 집단들의 쌍이다(본 논문에서는 지역은 공간적으로 연결되어 있는 화소들의 집합을 의미하고 집단은 이러한 지역의 집합으로 집단 내 화소들의 공간적 연결성에 대한 제약을 가지지 않는다). 그리고 계산 시간과 저장 기억의 사용에 대한 효율을 증가시키기 위해 분광적 인접성

을 정의하는 분광 공간(spectral space)내의 다중 창을 사용하였고 RNV(이상훈, 2006)을 이용하여 합병에 의하여 변하는 RAG 갱신하였고 적절한 단계 수가 주어지면 제안된 알고리즘은 최종 분석을 위한 dendrogram을 생성한다.

2. S-RAG 기반 Clustering

S-RAG 기반 clustering은 매 단계 두 개의 S-RAG에서 정의된 서로 인접한 두 집단의 쌍 중 서로 가장 유사한 집단 간의 합병을 하는 과정이다. 영상이 m 개의 집단 형태를 가졌을 경우 S-RAG은 $S-RAG_m = (J_m, E_m)$ 으로 정의된다. $J_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 은 각 집단을 대표하는 nodes의 집합이고 $E_m \subset J_m \times J_m$ 은 J_m 에 속하는 두 집단이 분광 공간상에서 서로 인접하다면 존재하는 edges의 집합이다. Graph의 각 edge에 두 인접 지역 사이의 비유사성(dissimilarity)을 나타내는 비용이 정해지고 최소 비용의 edge가 인접 지역 중 가장 유사한 쌍에 해당한다. S-RAG 기반 clustering은 모든 edges 중 최소 비유사 계수(disimilarity coefficient)를 가지는 edge를 발견하여 edge에 연결되어 있는 두 nodes와 연관된 집단들의 쌍을 합병한다. 매 단계에서 최선의 edge를 검색하기 위해 edges를 저장하기 위한 자료 구조는 heap에 의한 priority queue이다. 모든 edges는 그들의 비용에 따라 낮은 순서로 하나의 mini-heap에 저장될 수 있다. 그러나 집단의 수가 많다면 모든 edges를 저장한 heap의 검색은 계산상 매우 비효율적이다.

R_j 는 J_m 의 소 집합(subset) ($R_j \subset J_m, j \in J_m$)으로 집단 j 에 분광 공간에서 이웃하고 있는 집단들의 색인 집합이라고 하면 집단 j 의 CSN (Closest Spectral Neighbor)는 다음과 같이 정의된다:

$$CSN(j) = \operatorname{argmin} \{ \lambda(j, k) : k \in R_j \} \quad (1)$$

$\lambda(j, k)$: 집단 j 와 집단 k 의 합병과 연관된 비유사 계수.

그리고 집단 j 와 집단 k 가 다음과 같은 필요충분조건에 의해 MCSNP으로 정의된다:

$$k = CSN(j) \text{ and } j = CSN(k). \quad (2)$$

최소 비유사 계수의 edge는 MCSNP 중에만 존재한다는 사실에 의거하여 최선의 edge 검색을 위한 heap은

MCSNP edges로만 구성함으로써 heap의 크기를 현저히 감소시킬 수 있다.

3. MCSNP 검색

S-RAG 기반 clustering에서 최선의 edge를 검색하기 위하여 Min-Heap을 구성한다. Heap이란 완전한 이분목(binary tree)구조를 가지고 저장된 값들은 부분적으로 크기의 순서에 따라 정렬되어있는 자료구조 형식이다(Wyk, 1988). Min-Heap은 모든 node에 저장된 값은 그의 하위 node의 저장 값보다 적거나 혹은 같은 구조이다. 그러므로 최소의 비유사 계수를 가지는 edge는 root-node에 저장되어 있다. 집단의 합병으로 인한 MCSNP의 생성과 소멸에 대해서 MCSNP edges의 Min-Heap의 갱신은 교체, 삽입, 제거 과정에 의해 이루어진다:

- 1) 교체: MCSNP의 비유사 계수값이 변하여 하위 수준의 값보다 커졌을 경우 경우이거나 Min-Heap에 존재하는 MCSNP가 소멸되어 대신에 새로운 생성된 MCSNP로 교체할 시
- 2) 삽입: 새로운 생성된 MCSNP와 교체할 Min-Heap에서 소멸된 MCSNP가 없을 시
- 3) 제거: Min-Heap에서 소멸된 MCSNP와 교체할 새로운 생성된 MCSNP가 없을 시.

Fig. 1은 root-node에 위치한 MCSNP의 비유사 계수값이 변하여 하위 수준의 node 값보다 커졌을 경우의 예를 보여주고 Fig. 2는 Min-Heap에서 하나의

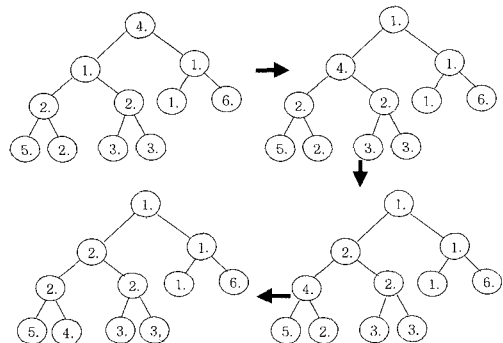


Fig. 1. Update of Min-Heap due to change of root-node's value.

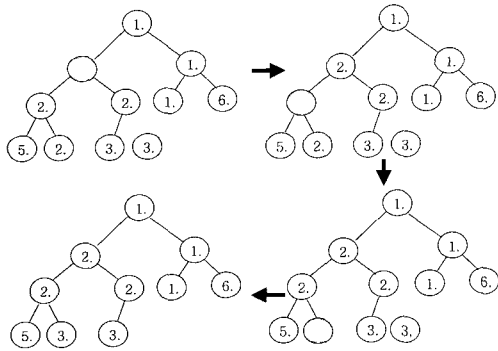


Fig. 2. Update of Min-Heap due to replacement of node.

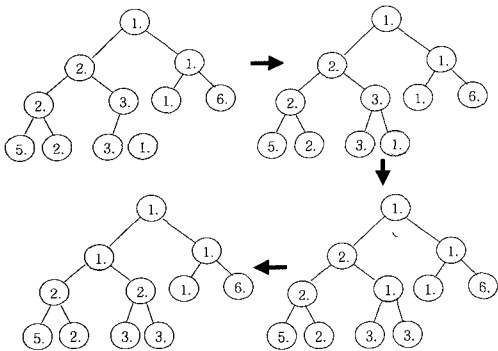


Fig. 3. Update of Min-Heap for insertion of new node.

MCSNP가 소멸되어 제거되고 새로 생성된 MCSNP로 교체되는 예를 보여주고 Fig. 3은 Min-Heap에서 소멸된 MCSNP가 없고 새로 생성된 MCSNP로 삽입되는 예를 보여 준다.

4. 분광 공간의 창 작업

S-RAG 합병 과정에서 계산의 복잡성과 필요한 저장 기억 크기는 초기의 edge 수에 의존한다. 만약 분광 공간 내의 인접성에 대한 제약없이 모든 집단들 사이에 edges가 존재한다는 가정하고 집단 수가 n 이라면 초기 edge 수는 $n(n-1)/2$ 이다. 원격 탐사에서 넓은 정경으로부터 관측된 방대한 크기의 자료의 영상 분할 결과는 자주 매우 많은 수의 지역들을 포함하고 있다. 이러한 경우 하나의 분할 지역을 개별 집단으로 가정하여 모든 집단들 간에 유사성을 고려하는 응집 계층 clustering의

Cluster	Intensity
1	100
2	108
3	115
4	97
5	91
6	112

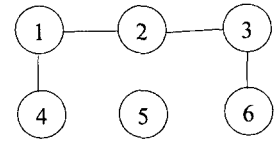


Fig. 4. Example of S-RAG with spectral window of $Sv_d = 10$ for 6 clusters.

사용은 실제적이지 못하다. 본 연구는 많은 수의 집단들을 가진 영상 형태를 분석하기 위해 분광 공간의 인접성에 대한 범위를 결정하는 “분광 창”을 정의한다.

집단 간의 비유사성은 집단의 특성치인 분광 강도 벡터의 차이에 비례하므로 강도 차이가 적을수록 가장 유사한 집단 쌍일 가능성이 크다. 이러한 사실에 의거하여 강도 차이가 상대적으로 작은 범위 내에서 검색함에 의해서 최선의 쌍을 선택할 수 있다. 분광 공간 창의 크기는 최선의 합병을 선택할 강도 차이의 범주의 크기에 해당한다. 하나의 집단에 대해서 분광 창 내 강도 값을 가진 집단들을 인접 집단들로 정의하고 분광 창의 크기 S 가 주어진다면 집단 j 의 이웃 집단들의 색인 집합은

$$R_j = \{k: |\mu_j - \mu_k| \leq Sv_d\} \quad (3)$$

식 3)에서 μ_j 는 집단의 특성을 대표하는 집단 내의 화소들의 강도 값의 평균 벡터이며 v_d 는 강도 차이 단위 벡터로 그의 요소는 해당하는 band에서 평균 강도의 신뢰 구간으로 선택될 수 있다. 초기에 작은 크기에서 시작해서 분광 창의 크기를 증가시키면서 S-RAG 기반 clustering을 수행함에 의해 계산 시간과 저장 기억의 효율성을 증가시킬 수 있다.

제안된 알고리즘은 RAG 기반 영상 분할 논문(이상훈, 2006)에서 사용한 Mahalanobis 거리 값의 비유사성 계수와 Schwarz 기준에 기반한 연결 중지 규칙을 사용하였다. 우선 창의 크기를 증가시켜 나가면서 연결 중지 규칙을 만족하는 집단들을 합병하고 주어진 dendrogram을 위한 단계에 이르거나 주어진 dendrogram을 위한 단계에 이르기 전에 중지 규칙에 의해 clustering 작업이 중지된다면 창의 크기를 무한대로 하여($S = \infty$) 중지 규칙없이 하나의 집단으로 합병될 때 까지 dendrogram을 형성한다.

5. 실험

본 논문에서는 제안된 알고리즘에 대한 평가를 위해 우선 simulation 자료에 대한 실험을 하였다. 본 연구의 실험은 2개의 Dual-core Intel Xeon 3.0GHz Processors와 8GB RAM을 장착한 Windows XP Professional64 운영체제 PC 시스템을 사용하였다. 본 실험에서는 simulation을 위하여 7개, 5개, 4개의 클래스들로 구성된 3개의 다른 patterns를 사용하였고 band별 8-bit의 단일/다중 band simulation 관측 영상 자료를 additive Gaussian 모형을 사용하여 생성하였다. Fig. 1은 simulation 실험에서 사용한 4K×4K 크기의 pattern 영상들을 보여준다. 평가 목적상 동일 지역에서 모든 band의 평균 강도 값은 동일하도록 하였다. Simulation 영상의 noise 수준을 나타내기 위해 영상의 noise의 편차에 대한 인접 클래스간의 평균 강도의 차이로 정의되는 SNR(Signal Noise Ratio)을 사용하였다.

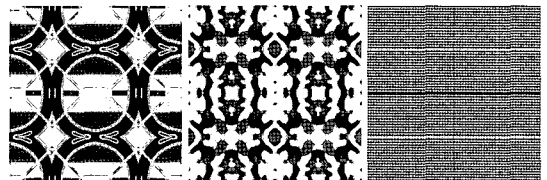
본 실험에서는 S-RAG 계층 분류를 RAG 기반 다중창 영상 분할(이상훈, 2006)을 수행한 후 나누어진 지역에 대해 적용하였다. Simulation 자료 분석의 연결 중지 규칙을 위해서는 $\beta = 2.0$ 인 Schwarz 기준을 사용하였다. Table 1은 band 수가 서로 다르고 SNR=1의 noise 수준을 갖고 있는 3개의 다른 patterns의 simulation 자료들을 5번 반복 실험한 평균 결과이다. Table 1에서 보여 지는 분류 오류율(classification error)은 분할 지역을 pattern이 갖고 있는 클래스의 수와 동일한 수의 집단으로 분류한 후 분류된 집단 내 화소들이 가장 많이 갖고 있는 pattern의 원래 클래스로 집단의 클래스 지정한 후 비교한 오류율이다. Table 2

Table 1. Average classification errors in percentage of S-RAG clustering. for 5 replications of multi-band imagery of SNR =1 simulated using 3 patterns in Fig. 5.

Number of Bands	Pattern		
	A	B	C
1	17.17	39.53	40.12
3	0.35	0.52	3.06
5	0.11	0.21	1.42
10	0.04	0.08	0.52
20	0.01	0.03	0.15

Table 2. Average classification errors in percentage of S-RAG clustering. for 5 replications of 3-band imagery with various SNRs simulated using 3 patterns in Fig. 5.

SNR	Pattern		
	A	B	C
0.5	4.68	4.60	16.03
1.0	0.35	0.52	3.06
2.0	0.03	0.05	0.32
3.0	0.00	0.01	0.04
6.0	0.00	0.00	0.00



(Pattern A: 7 Classes) (Pattern B: 5 Classes) (Pattern C: 4 Classes)

Fig. 5. Patterns for simulation.

는 서로 다른 noise 수준을 갖고 있는 3-band simulation 자료들을 5번 반복 실험한 평균 결과이다. 모든 반복 실험 결과는 거의 일치하므로 영상 분할에 관한 논문(이상훈, 2006)과 마찬가지로 5번 반복 실험을 실시하였다. 이 결과들을 보면 pattern에 따라 다소 차이는 있으나 band 수의 증가와 noise 수준의 감소는 오류율을 현저히 떨어뜨리는 것을 알 수 있다. 그리고 제안된 알고리즘은 다중 밴드 영상과 낮은 noise 수준에서는 0.01% 이하의 거의 완벽한 성능을 보여준다.

다음으로 한반도 강원도 지역에서 관측된 9256×12363 크기의 4-band QuickBird 영상 분석에 RAG 기반 다중창 영상 분할과 S-RAG기반 계층 분류를 적용하였다. 이 실험의 분석 결과를 명확히 보여 줄 수 있도록 전체 큰 영상의 한 소구역에 대한 결과를 확대하여 보여준다. Fig. 6은 사용된 전체 관측 영상을 보여준다. 이 figure에서 보이는 것처럼 관측 영상은 기하 보정으로 인하여 분석 영상이 일정한 sample lines를 유지하기 위해 많은 부분은 자료 값을 갖지 못한다. 제안 알고리즘의 프로그램은 이러한 missing 부분을 분석 과정에서 고려하지 않도록 masking하는 장치를 갖고 있다. Fig. 6의 사각 구역은 확대 결과를 위한 소구역을 표시하고 있으며 이 소구역의 관측 영상은 Fig. 7에 포함되어 있다. 연결 중지 규칙의 β 값의 선택은 분류 결과에

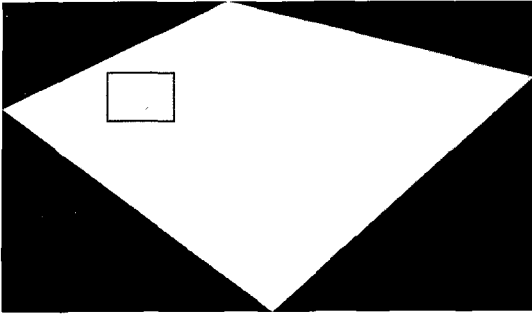


Fig. 6. 4-band QuickBird image of 9256 × 12363 acquired over Kangwon area in Korean Peninsula.

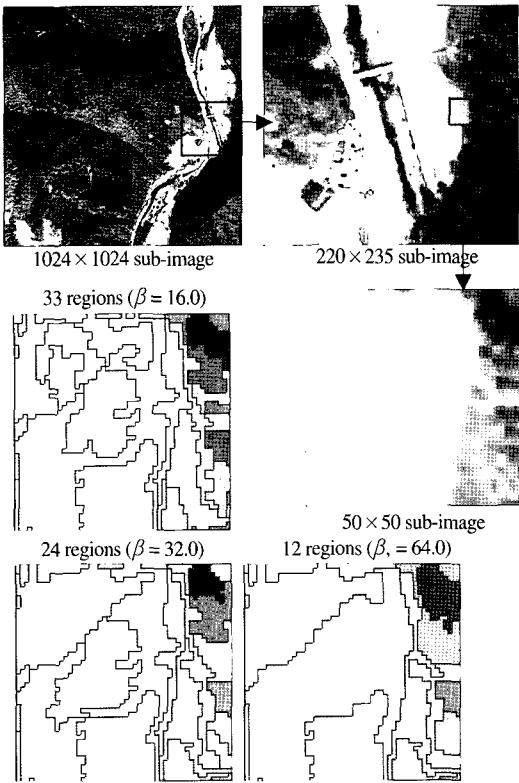


Fig. 7. Segmentation results of various β s for sub-image.

영향을 미친다. 특히 분할에서 상호 인접 지역 간의 합병 허용 범위에 따라 분할 형태가 크게 달라질 수 있기 때문이다. 대부분의 실제 자료 분석에서는 simulation 자료 실험에서와는 달리 작은 β 값의 연결 중지 규칙은 너무 많은 분할 지역을 생산할 가능성이 많으므로 어느 정도 큰 β 값의 사용이 더 적절할 수 있다. 그러나 영상 관측된 정경에 대한 정확한 진실을 알지 못하는 상황에서는 β 값의 선택은 사용자의 임의의 선택일 수밖에 없

Iteration	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Linking	X	1	1	2	2	3	1	5	1	3

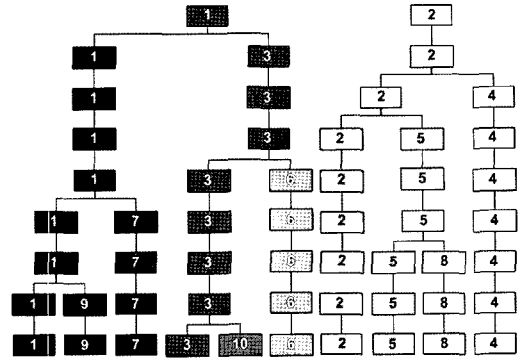
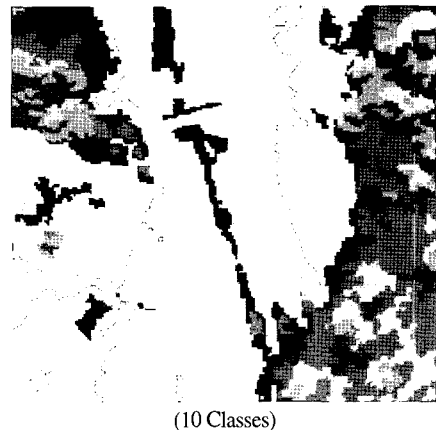


Fig. 8. Table output of hierarchical linking generated by S-RAG classification and corresponding dendrogram.



(10 Classes)



(5 Classes)

Fig. 9. Class maps of 220 × 235 sub-image generated by S-RAG clustering.

다. 이 실험에서는 $\beta = 16, 32, 64$ 를 사용하여 분할을 수행한 결과 분할 지역 수(즉 분류의 초기 집단 수)는 각

각 571024, 32819, 185785이었다. Fig. 7은 50×50 크기의 소구역에서 각각의 경우에 대한 분할 결과를 포함하고 있다. Fig. 8은 계층 분류 결과 생성된 마지막 10 단계에서 단계별 합병 집단 간의 연결 관계 table과 그 table에 의한 dendrogram을 보여준다. Fig. 9는 Fig. 7에 나타난 220×235 소구역들의 5 클래스 분류 결과이다.

6. 결론

본 연구는 원격 탐사의 영상 처리에서 영상 분할의 상위 수준으로 응집 계층 clustering의 무감독 영상 분류를 제안한다. 응집 계층 clustering과정을 커다란 원격 탐사 영상에 적용하기 위해 본 연구에서는 분광 영역에서 정의된 S-RAG에 의한 합병과 Min-Heap 구조를 사용한 MCSNP의 검색 알고리즘을 사용하고 있다. 그리고 계산 시간과 저장 기억의 사용에 대한 효율을 증가시키기 위해 분광 공간(spectral space)내의 다중 창을 사용하여 S-RAG의 구성을 위한 분광적 인접성을 정의하였다. 분광 공간내의 다중 창 사용에 대한 합법성은 집단 간의 비유사성은 집단의 특성치인 분광 강도 벡터의 차이에 비례하고 강도 차이가 적을수록 가장 유사한 집단 쌍일 가능성이 크다는 사실에 있다.

응집 계층 clustering 과정은 하위 수준의 두 개의 작은 지역들이 상위 수준의 하나의 더 큰 지역으로 구성되는 수치 영상의 계층 구조에서 가장 자연적인 무감독 분석 방법이나 계산의 복잡성과 기억 용량의 제약으로 방대한 크기의 원격 탐사 자료에 대한 적용은 비실제적이었다. 제안된 S-RAG 기반 clustering은 응집 계층

clustering 과정을 가능케 하였고 또한 연속적인 집단 합병 간 계층적 관계를 쉽게 이해할 수 있는 dendrogram을 작성하여 분석 영상의 계층적으로 해석하여 자동 혹은 interactive하게 분류를 효과적으로 수행할 수 있다.

참고문헌

- 이상훈, 2006. RAG 기반 다중 창 영상 분할, 대한원격 탐사학회지, 22(6): 601-612.
- Anderberg, M. R., 1973. *Cluster Analysis for Application*, Academic Press, NY.
- Ballard, D. and C. Brown, 1992. *Computer Vision*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hal.
- Bezdek, J. C., 1973. *Fuzzy mathematics in pattern classification*, Ph.D. dissertation, Appl. Math. Cornell Univ., Ithaca, NY.
- Lee, S-H, 2004. Unsupervised image classification using region-growing segmentation based on CN-chain, *Korean Journal of Remote Sensing*, 20: 215-225.
- MacQueen, J., 1967. Some methods for classification and analysis of multivariate observations, *Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, pp281-296.
- Tanimoto, S. and A. Klinger, 1980. *Structured Computer Vision*, Academic, NY.
- van Wyk, C., 1988. *Data Structures and C Programs*. Reading, MA: Addison-Wesley.