선형 제어기 설계를 위한 기본 개념 소개

최 한 호

동국대학교 전기공학과

1. 서 론

참고문헌 [1]-[9]를 토대로 선형 제어 시스템 설계 이론의 연재물의 첫번째로 [10]에서는 궤환 시스템의 성능과 안정도 판별에 관련된 고전 선형 제어 이론과 이와 관련된 Matlab 명령어에 대하여 다루었다. [11]에서는 대표적인 고전 제어기인 진상, 지상 및 PID 제어기 설계에 대하여 다루었다. 그리고 [12]에서는 상태공간상에서 이루어지는 modern, postmodern 제어기 설계에 대하여 다루었다. 본고에서는 위 시리즈물의 부록이 될 수 있는 내용들로 라플라스 변환, 행렬과 벡터, 수학적 모델링 방법에 대하여 논한다.

2. 라플라스 변환

2.1. 라플라스 변환의 정의

• 라플라스 변환 : 주어진 함수 $f(t)$에 대하여 라플라스 변환 $F(s)$는 다음으로 주어진다.

$$F(s)=LAPLACE(f(t))=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

• 라플라스 변환의 존재 조건 : $|f(t)|<Me^{\alpha t}$ 를 만족시키는 어떤 M, α가 존재하면 위에 주어진 적분값이 수렴하고 라플라스 변환이 존재한다. 물리적으로 가능한 신호들은 라플라스 변환이 존재한다.

• 라플라스 역변환 : 라플라스의 역변환은 다음과 같다.

$$f(t)=LAPLACE^{-1}(F(s))=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

• 라플라스 변환의 장점 : 선형 미분방정식을 라플라스변수 s 에 관한 대수 방정식으로 바꿔 간단한 대수법칙에 따라 선형 미분방정식의 해를 구할 수 있다.

2.2. 라플라스 변환의 성질

• 선형정리 : 임의의 상수 k_1, k_2와 라플라스 변환이 존재하는 함수 $f_1(t), f_2(t)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$LAPLACE(k_1f_1(t)+k_2f_2(t))=k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$$

• 미분 : 미분 가능한 함수 $f(t)$에 $\int_0^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=-f(0)+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$ 이성립하므로 결국 다음이 성립한다.

$$LAPLACE(\frac{df}{dt})=sF(s)-f(0)$$

$$LAPLACE\left(\frac{d^nf}{dt^n}\right)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\frac{df(0)}{dt}-\cdots-s\frac{d^{(n-2)}f(0)}{dt^{(n-2)}}-\frac{d^{(n-1)}f(0)}{dt^{(n-1)}}$$

• 적분 : 적분 가능한 함수 $f(t)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$LAPLACE(\int_0^t f(t))=\frac{1}{s}LAPLACE(f(t))=\frac{F(s)}{s}$$

• 복소 이동 정리 : $f(t)$에 지수 함수 $e^{\alpha t}$를 곱한 것의 라플라스 변환은 s영역에서 이동을 일으킨다.

$$LAPLACE(e^{\alpha t}f(t))=F(s-\alpha)$$

• 시간 지연 : 시간영역에서 T만큼 지연 이동시키면 라플라스변환에 e^{-Ts}만큼 곱해진다.

$$LAPLACE(f(t-T))=e^{-Ts}F(s)$$

• 초기값 정리 : $f(t)$의 라플라스 변환 $F(s)$가 주어질 때 초기값에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

• 최종값 정리 : $f(t)$의 라플라스 변환 $F(s)$가 주어질 때 최종값에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

• 라플라스 변환값의 미분 : $f(t)$의 라플라스 변환 $F(s)$가 주어질 때 $F(s)$의 미분값들에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n}=(-1)^nLAPLACE(t^nf(t))$$

• 콘볼루션 : $t\le 0$에서 0인 함수 $f_1(t), f_2(t)$의 라플라스 변환이 $F_1(s), F_2(s)$일 때 다음이 성립한다.

표 1. 라플라스 변환표

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
$\frac{1}{ab}\left(1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-at})\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$\frac{w}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta wt}\sin w\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{w^2}{s^2+2\zeta ws+w^2}$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta wt}\sin(w\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\cos^{-1}\zeta)$	$\frac{w^2}{s(s^2+2\zeta ws+w^2)}$	$t^n \quad (n=1,2,3\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$-\frac{w^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta wt}\sin(w\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\cos^{-1}\zeta)$	$\frac{sw^2}{s^2+2\zeta ws+w^2}$	t^ne^{-at}	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

$$\mathcal{L}(f_1(t)*f_2(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right)$$
$$= \mathcal{L}\left(\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right) = F_1(s)F_2(s)$$

• 스케일링 : $f(t)$의 라플라스 변환 $F(s)$가 주어질 때 다음이 성립한다.

$$LAPLACE(f(at)) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

2.3. 간단한 함수들의 라플라스 변환

• 임펄스 함수 $\delta(t)$: 임펄스 함수는 임의의 함수 $f(t)$에 대하여 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$, $\int_0^t\delta(t-\tau)f(\tau)d\tau=f(t)$를 만족시키는 함수로 라플라스 변환이 $LAPLACE(\delta(t))=1$로 주어진다.

• 상수함수 : 정의에 따라 상수 k의 라플라스 변환은 $LAPLACE(k)=\frac{k}{s}$로 주어진다.

• 등속 경사 함수 : $LAPLACE(t) = -1\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

• 등가속포물선함수 :

$$LAPLACE(t^2) = -1\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

• 지수함수 :

$$LAPLACE(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{(s-a)}$$

• 정현파함수 :

$$LAPLACE(\cos wt) = \frac{1}{2}LAPLACE(e^{jwt}+e^{-jwt}) = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$$LAPLACE(\sin wt) = \frac{1}{2j}LAPLACE(e^{jwt}-e^{-jwt}) = \frac{w}{s^2+w^2}$$

• 주요 함수의 라플라스 변환 : 표1을 참조하라.

2.4. 부분분수 전개에 의한 라플라스 역변환

• 일반적인 함수의 라플라스 변환 형태 :

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad m < n$$

• $m \geq n$인 경우 : $N(s)/D(s)$의 몫과 나머지를 $Q(s), R(s)$라 하면 $N(s)/D(s) = Q(s) + R(s)/D(s)$로 쓸 수 있고 $R(s)/D(s)$부분을 전개한다. $Q(s)$부분은 나누어 구하고 이를 역변환하면 되고 $R(s)/D(s)$ 부분에 대해서만 아래의 방법에 따라 구하면 된다. 실제 시스템에서는 $m \geq n$인 경우는 없다고 간주해도 된다.

2.4.1 $D(s)$의 극점이 서로 다른 실수일 때

• 부분분수 전개 형태 : p_i는 $D(s)$의 극점이라 할 때 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

• 역변환 형태 : $f(t) = k_1e^{p_1t} + \cdots + k_ne^{p_nt}$

• 계수 k_i결정식 : $k_i = \lim_{s \to p_i} \left[(s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right]$

예제 1 : $F(s) = \frac{s^2+1}{s(s+2)}$의 $Q(s)=1$, $R(s)=1-2s$, $D(s)=s(s+2)$이다. 즉 $F(s)=1-\frac{2s-1}{s(s+2)}$로 고쳐 쓸 수 있다. $R(s)/D(s)$를 부분분수로 전개하면 $\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}$가 되므로

$k_1 = \left.\frac{1-2s}{s+2}\right|_{s=0} = 0.5$,

$k_2 = \left.\frac{1-2s}{s}\right|_{s=-2} = -2.5$이다. 결국 역변환은 $f(t)=\delta(t)+0.5-2.5e^{-2t}$로 주어진다.

2.4.2 $D(s)$의 극점에 복소근이 있을 때

• 부분분수 전개 형태 : $a \pm jw$는 복소근 p_i는 $D(s)$의 극점이라 할 때 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{k_1(s-a)+k_2}{(s-a)^2+w^2} + \frac{k_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

• 역변환 형태 :

$$f(t) = k_1 e^{at}\cos wt + \frac{k_2}{w} e^{at}\sin wt + k_3 e^{p_3 t} + \cdots + k_n e^{p_n t}$$

$i \geq 3$인 경우 계수 k_i결정식 : $k_i = \lim_{s \to p_i} \left[(s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right]$

• k_1, k_2 계수 결정식 :

$$k_2 + jwk_1 = \lim_{s \to a+jw} \left[[(s-a)^2+w^2] \frac{N(s)}{D(s)} \right]$$

2.4.3 $D(s)$의 극점에 중복근이 있을 때

• 부분분수 전개 형태 : p_1는 r중근이라 할 때 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

• 역변환 형태 :

$$f(t) = k_1 e^{p_1 t} + \cdots + \frac{k_r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{p_1 t} + k_{r+1} e^{p_{r+1} t} + \cdots + k_n e^{p_n t}$$

• $i \geq r+1$인 경우 계수 k_i결정식 :

$$k_i = \lim_{s \to p_i} \left[(s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right]$$

• $i \leq r$인 경우 계수 k_i결정식 :

$$k_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left. \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s-p_1)^r F(s) \right|_{s=p_1}, \cdots$$

$$k_{r-1} = \left. \frac{d}{ds} (s-p_1)^r F(s) \right|_{s=p_1}, \quad k_r = \left. (s-p_1)^r F(s) \right|_{s=p_1}$$

예제 2 : $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{s}$ 이므로

$k_1 = \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{s} \right|_{s=-1} = -1$,

$k_2 = \left. \frac{1}{s} \right|_{s=-1} = -1$, $k_3 = \left. \frac{1}{(s+1)^2} \right|_{s=0} = 1$이므로 결국 역변환은 $f(t) = -e^{-t} - te^{-t} + 1$로 주어진다.

2.5. 계수 비교에 의한 부분분수 전개 계수 결정

• 부분분수 전개 형태 식의 좌우 양변에 $D(s)$를 곱하고 양변의 계수가 일치하도록 수식을 정리해서 푼다. 예로 $D(s)$의 극점이 서로 다른 실근일 때 부분분수 전개 형태 식의 좌우 양변에 $D(s)$를 곱해 다음을 얻는다.

$$N(s) = b_m s^m + \cdots + b_0 s = F(s)D(s)$$
$$= k_1(s-p_2)\cdots(s-p_n) + \cdots + k_n(s-p_1)\cdots(s-p_{n-1})$$

위식의 양변이 항상 일치해야 하므로 $s^m, \cdots, s^0$의 계수가 일치하도록 수식을 정리해서 구한다.

2.6. 계수 비교와 수치 대입에 의한 부분분수 전개 계수 결정

• 극점이 복소수이거나 중근일 때 유효한 방법으로 부분분수 전개 형태 식의 좌우 양변에 $D(s)$를 곱하여 양변의 계수가 일치하도록 수식을 정리해서 풀되 간단한 형태로 될 수 있도록 적절한 s값을 대입에 계수를 구한다 . 예로 $D(s)$의 극점이 서로 다른 복소수일 때 부분분수 전개식의 좌우 양변에 $D(s)$를 곱해 다음을 얻는다.

$$N(s) = b_m s^m + \cdots + b_0 s =$$

$$(k_1(s+a)+k_2)(s-p_3)\cdots(s-p_n) + \cdots$$
$$+ k_n((s+a)^2+w^2)(s-p_3)\cdots(s-p_{n-1})$$

위식의 양변이 항상 일치해야 하는데 $k_3, \cdots, k_n$값은 $s=p_3, \cdots, p_n$값을 대입해서 쉽게 구할 수 있고 k_1, k_2는 다른 적절한 값을 대입해서 구한다.

예제 3 : $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{s}$ 이므로

$N(s) = 1 = k_1 s(s+1) + k_2 s + k_3(s+1)^2$이다. $s=-1$를 대입하여 $1=-k_2$를 얻고 $s=0$을 대입해 $1=k_3$를 얻고 이 값들과 $s=1$을 대입해 얻은 식 $1=2k_1+k_2+4k_3$에서 $1=2k_1-1+4$에서 $k_1=1$을 얻어 결국 역변환은 $f(t)=-e^{-t}-te^{-t}+1$로 주어진다.

2.7. 라플라스 변환을 이용한 상미분 방정식 풀이

• 풀이 과정 : 다음의 과정을 거쳐 푼다.

라플라스 변환표를 이용하여 주어진 미분방정식을 s에 대한 변환 대수식을 얻는다.

변환된 대수식을 출력변수에 대한 식으로 바꾼다.

부분변수전개를 한다.

라플라스 변환표를 이용하여 역변환을 얻는다.

예제 4 : $y''+2y'+2y=1,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$인 선형 미분방정식을 고려하자. 라플라스 변환을 통하여

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+2Y(s)=\frac{1}{s}$를 얻고

이로부터 출력 $Y(s)$에 대한 식 $Y(s)=\frac{s^2+s+1}{s[(s+1)^2+1]}$을 얻는다. $Y(s)=\frac{k_1(s+1)+k_2}{(s+1)^2+1}+\frac{k_3}{s}$로 표현 가능하므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} s^2+s+1 &= k_1s(s+1)+k_2s+k_3(s+1)^2+k_3 \\ &= (k_1+k_3)s^2+(k_1+k_2+2k_3)s+2k_3 \end{aligned}$$

결국 $k_3=0.5, k_1=0.5, k_2=-0.5$를 얻고 출력에 관한 식 $y(t)=0.5e^{-t}\cos t-0.5e^{-t}\sin t+0.5$를 구할 수 있다.

3. 행렬과 벡터

3.1. 벡터 연산

• 덧셈 : 주어진 벡터 $a=[a_1,\cdots,a_n]^T,\ b=[b_1,\cdots b_n]^T$의 덧셈은 다음처럼 주어진다.

$a+b=[a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n]^T$

• 스칼라곱 : 주어진 벡터 $a=[a_1,\cdots,a_n]^T$의 스칼라 c배는 $ca=[ca_1,\cdots,ca_n]^T$로 주어진다.

• 내적 : 주어진 벡터 $a=[a_1,\cdots,a_n]^T,\ b=[b_1,\cdots b_n]^T$의 내적은 $a^T\cdot b=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$로 주어진다.

• 벡터의 크기 : 주어진 벡터 $a=[a_1,\cdots,a_n]^T$의 크기는 $\|a\|_2=\sqrt{a^T\cdot a}$로 주어진다. 보통 첨자 2는 생략된다.

3.2. Basis와 차원

• 벡터공간 : 벡터공간 X는 다음 7가지 합산 및 스칼라곱에 관련된 공리를 만족시키는 벡터들의 집합이다.

1. $a\in X, b\in X \rightarrow a+b=b+a\in X$
2. $a\in X, b\in X, c\in X\rightarrow(a+b)+c=a+(b+c)\in X$
3. $a+0=0+a=a$를 만족시키는 영벡터 0를 X가 포함한다.
4. 임의의 $a\in X$에 대해 $a+b=0$를 만족시키는 $b\in X$가 존재한다.
5. 임의의 $a\in X$와 임의의 스칼라 $\gamma\in R$에 대해 $\gamma a\in X$가 성립하고, $0a=0, 1a=a$가 성립한다.
6. 임의의 $a\in X$와 임의의 스칼라 $\gamma,\delta\in R$에 대해 $\gamma(\delta a)=(\gamma\delta)a\in X$가 성립한다.
7. 임의의 $a, b\in X$와 임의의 스칼라 $\gamma,\delta\in R$에 대해 $(\gamma+\delta)a=\gamma a+\delta a\in X, \gamma(a+b)=\gamma a+\gamma b\in X$ 이다.

• 선형결합 : 주어진 k개의 벡터 X_i의 적절한 합 $a_1X_1+\cdots+a_kX_k$을 X_i의 선형결합이라 한다.

여기에서 $a_1,\cdots,a_k$를 임의의 스칼라이다.

• 선형독립 : 주어진 k개의 벡터 X_i에서 어떤 벡터도 나머지 벡터의 선형결합 형태로 표현되지 않으면 선형독립이라 한다.

• Span : 주어진 k개의 벡터 X_i의 모든 선형결합을 X_i의 Span이라 한다.

• Basis : 주어진 벡터공간 X에 대해 다음을 두 성질을 만족시키는 벡터집합 B를 Basis라 한다.

벡터공간 X는 B의 Span이다.

벡터집합 B는 선형독립이다.

• 차원 : 주어진 벡터 공간 X의 차원 $\dim(X)$는 X의 Basis 집합 B의 벡터 개수와 같다.

• 직교(Orthogonality) : 임의의 0이 아닌 벡터 a, b가 만약 내적 a^Tb가 0이면 두 벡터는 직교한다고 한다.

• 정규직교(Orthonormality) : 임의의 0이 아닌 벡터 a, b가 직교하며 크기가 1이면 orthonormal하다 한다.

3.3. 행렬의 기본적 정의

• 전치행렬 : 주어진 임의의 행렬 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times m}$의 전치행렬은 $A^T=[a_{ji}]\in R^{m\times n}$로 정의된다.

• 사각행렬 : 행렬의 행의 수와 열의 수가 같을 때 사각행렬이라 한다.

• 대칭행렬 : 주어진 임의의 사각행렬 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$이

$A^T = A$를 만족시키면 대칭이라 한다.

- 대각행렬 : 주어진 임의의 사각행렬 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$에서 $a_{ij} = 0, i \neq j$이면 즉 대각선을 제외한 값들이 0이면 대각행렬이라 하고 $A = diag(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 형태로 표시한다.
- 항등행렬 : 주어진 임의의 대각행렬 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$에서 $a_{ii} = 1$이면 항등행렬이라 하고 I로 표시한다.

3.4. 행렬 연산

- 덧셈 : 주어진 임의의 행렬 $A, B \in R^{n \times m}$에서 덧셈은 $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$로 정의된다.
- 스칼라곱 : 주어진 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$의 스칼라 c배는 $cA = [ca_{ij}]$로 정의된다.
- 행렬곱셈 : 주어진 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}, B \in R^{m \times r}$에서 곱셈 $AB = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right]$처럼 정의된다.
- Trace : 주어진 임의의 사각행렬 $A \in R^{n \times n}$의 trace는 $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$로 정의된다.
- Trace의 성질 : $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(AB) = Tr(BA)$, $Tr(AB) = Tr(B^T A^T)$
- Determinant : 주어진 임의의 사각행렬 $A \in R^{n \times n}$의 determinant는 다음처럼 정의된다.

$$det(A) = |A| = \sum (-1)^s a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

여기에서 $j_1, \cdots, j_n$은 $1, \cdots, n$의 permutation이고 s는 $j_1, \cdots, j_n$를 순열 $1, \cdots, n$으로 복귀시키기 위해 필요한 자 리바꿈이 홀수이냐 짝수이냐에 따라 0이나 1로 결정되는 수 이다.

- Minor , Cofactor, Adjoint : 주어진 임의의 사각행렬 $A \in R^{n \times n}$의 minor M_{ij}는 행렬 A의 i번째 행과 j번째 열을 없애고 만든 $(n-1) \times (n-1)$행렬을 의미하고, a_{ij}의 cofactor는 $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$로 정의되고 adjoint는 $adj(A) = (A_{ij})^T$로 정의된다.
- Determinant의 성질 :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \ |A| = |A^T|, \ |AB| = |A||B|$$

3.5. Rank와 역행렬

- Rank : 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$의 rank는 선형독립적인 행이나 열 숫자의 최대값이다.
- Full rank : 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$은 $rank(A) \leq \min(n, m)$를 만족시키는데 만약 $rank(A) = \min(n, m)$를 만족시키면 A는 full rank를 갖는다고 한다.
- Nonsingular : 주어진 임의의 사각행렬 $A \in R^{n \times n}$이 $rank(A) = n$이면 nonsingular라 한다.
- 역행렬 : 임의의 nonsingular 사각행렬 $A \in R^{n \times n}$에 대하여 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$를 만족시키는 역행렬 A^{-1}이 존재한다.
- 역행렬의 성질 : $A^{-1} = |A|^{-1} adj(A), |A^{-1}| = |A|^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- 2차원 행렬의 역행렬과 Determinant 공식 : 주어진 non-singular 사각행렬 $A \in R^{2 \times 2}$는 다음을 만족시킨다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \ A^{-1} = |A|^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- Null space : 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$의 null 공간 $\aleph(A)$는 $\aleph(A) = \{x : Ax = 0, x \in R^m\}$로 정의된다.
- Nullity : 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$의 null 공간의 차원을 nullity라하고 $\text{nullity}(A)$로 칭한다.
- rank의 성질 : $A \in R^{n \times m}, B \in R^{m \times r}$에서 다음이 성립 한다.

$$rank(A) + \text{vllity}(A) = m,$$
$$rank(A) + rank(B) - m \leq rank(AB) \leq \min(rank(A), rank(B))$$

- Orthogonal complement : 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}, n \geq m \geq rank(m)$의 orthogonal complement는 A^T의 null 공간의 basis를 열벡터로 갖는 행렬이다.

3.6. 선형 행렬 방정식

- 일반화된 역행렬 : 주어진 임의의 행렬 $A \in R^{n \times m}$에 대하여 다음 4가지 성질을 만족시키는 $m \times n$행렬 A^g을 일반화된 역행렬 혹은 Moore-Penrose 역행렬이라 한다.

① $AA^gA = A$

② AA^g는 대칭

③ A^gA도 대칭

④ $A^gAA^g = A^g$.

- 일반화된 역행렬의 주요 성질 : $A \in R^{n\times m}$에 대하여 일반화된 역행렬이 항상 존재하고 다음이 성립한다.
  ① $(A^T)^g = (A^g)^T$,
  ② $(I - AA^g)AA^g = AA^g(I - AA^g) = 0$,
  ③ $(A^TA)^g = A^g(A^g)^T$,
  ④ $rank(A^g) = rank(A)$, ⑤ $(A^g)^g = A$,
  ⑥ $(I - A^gA)A^gA = A^gA(I - A^gA) = 0$,
  ⑦만약 $m = n$이고 A가 nonsingular이면 $A^g = A^{-1}$
  ⑧ 만약 $rank(A) = n \le m$이면 $A^g = A^T(AA^T)^{-1}$이고 $rank(A) = m \le n$이면 $A^g = (A^TA)^{-1}A^T$이다.
- 선형 행렬 부등식 해의 존재조건과 : $Ax = c$ ($A \in R^{n\times m}$, $c \in R^n$)의 해 $x \in R^m$가 존재할 필요충분조건은 $AA^gc = c$가 성립하는 것이다.
- $Ax = c$의 일반해 : 해가 존재하면 일반해는 $x = A^gc + z - A^gAz$ ($z \in R^m$는 임의의 벡터)로 주어진다.

3.7. 벡터와 행렬의 놈

- 벡터의 p놈 : 주어진 벡터 $a = [a_1, \cdots, a_n]^T$의 p놈은 $\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}$로 정의된다.
- 벡터의 ∞놈 : 주어진 벡터 $a = [a_1, \cdots, a_n]^T$의 ∞놈은 $\|a\|_\infty = \max_i |a_i|$로 정의된다.
- 벡터의 크기 : 주어진 벡터 $a = [a_1, \cdots, a_n]^T$의 크기는 $\|a\|_2 = \sqrt{a^T \cdot a}$로 주어진다. 보통 첨자 2는 생략된다.
- 행렬의 p놈 : 임의의 행렬 A의 p놈은 $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$로 정의된다. 특히 1, 2, ∞놈은

$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_i a_{ij}\right), \|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^TA))^{1/2}, \|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_j a_{ij}\right)$로 주어진다. 여기에서 $\lambda_{\max}(\cdot)$는 최대 고유값을 의미한다. 만약 $A > 0$이면 $\lambda_{\min}(A) \le A \le \lambda_{\max}(A)I$ 이다. $\lambda_{\min}(\cdot)$는 최소 고유값을 의미한다.

3.8. 고유값과 고유벡터

- 고유값과 고유벡터 :임의의 사각행렬 $A \in R^{n\times n}$에서 $Ax = \lambda x$를 만족시키는 0이 아닌 벡터 x를 고유벡터라 하고 λ를 고유값 혹은 특성근이라 한다.
- 특성방정식 : 임의의 사각행렬 $A \in R^{n\times n}$에서 $|A - \lambda I| = (-\lambda)^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$로 주어지는 n차 다항식을 특성방정식이라 한다. 이 다항식의 근이 A의 고유값 혹은 특성근이 된다.
- Modal matrix : $A \in R^{n\times n}$가 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$을 갖고 그에 대응하는 고유벡터를 $x_1, \cdots, x_n$라 하자. 그러면 고유벡터 $x_1, \cdots, x_n$는 선형적으로 독립이다. 그리고 고유벡터를 열로 갖는 행렬 $M = [x_1, \cdots, x_n]$을 modal matrix라 한다.
- 행렬의 대각화 : $A \in R^{n\times n}$의 modal matrix에 대하여 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = M^{-1}AM$이 성립한다. λ_i 고유값이 r 중복된 경우 그 중복근 λ_i에 대하여 $n - rank(A - \lambda_i I)$개의 선형독립적인 고유벡터가 존재한다. 만약 $r = n - rank(A - \lambda_i I)$이면 r개의 선형독립적인 고유벡터가 존재해 $A \in R^{n\times n}$를 대각화할 수 있다. 그러나 r 중복된 고유값 λ_i에 대하여 $r > n - rank(A - \lambda_i I)$이면 r개의 선형독립적인 고유벡터가 존재하지 않으면 대각화할 수 없다.
- 일반화된 고유벡터 : $A \in R^{n\times n}$에서 어떤 고유값 λ와 정수 k에 대하여 $(A - \lambda I)^k x = 0, (A - \lambda I)^{k-1} \ne 0$를 만족시키는 벡터 x가 존재하면 이를 일반화된 고유벡터라 한다. r 중복된 고유값 λ_i에 대하여 r개의 선형독립적인 고유벡터가 존재하지 않을 경우 일반화된 고유벡터가 존재한다.
- 일반화된 고유벡터 결정법 : $A \in R^{n\times n}$에서 r 중복 고유값 λ_i에 대한 고유벡터 결정은 다음을 따른다.

중복 고유값 λ_i에 대하여 $(A - \lambda_i I)x_{ij} = 0$를 만족시키는 모든 고유벡터 x_{ij}를 구한다.

여기에서 $1 \le j \le j_m = n - rank(A - \lambda_i I)$이다. 만약 $r = j_m$이면 고유벡터가 r개이므로 끝내라. 아니면 다음 단계로 가라.

구해진 x_{ij}에 대하여 $(A - \lambda_i I)x_{i(j_m+1)} = x_{ij}$를 만족시키는 일반화된 고유벡터 $x_{i(j_m+1)}$를 찾아라. 0인 해 이외의 유의미한 해를 구하지 못했으면 $x_{i(j+1)}$에 대하여 일

반화된 고유벡터를 구하라. 만약 구해진 고유벡터와 일반화된 고유벡터가 r개 이면 끝내라. 아니면 다음 단계로 가라. 구해진 $x_{i(j_m+1)}$에 대하여 $(A-\lambda_i I)x_{i(j_m+2)}=x_{i(j_m+1)}$를 만족시키는 일반화된 고유벡터 $x_{i(j_m+2)}$를 찾아라. 구해진 고유벡터와 일반화된 고유벡터가 r개가 될 때까지 반복한다.

- Jordan form : r_i 중복된 고유값 λ_i에 대하여 r_i개의 선형독립적인 고유벡터가 존재하지 않는 경우 대각화할 수는 없고 Jordan 형을 써서 $J=diag(J_1,\cdots,J_p)=M^{-1}AM$ 이 성립함을 보일 수 있다. 여기에서 M은 고유벡터와 일반화된 고유벡터를 열벡터로 갖는 modal 행렬이고 J_i는 주 대각선의 값들이 λ_i이고 주 대각선 위의 값이 0이거나 1이고 나머지 위치의 값들이 0인 행렬이다.

예제 4 : 5×5 행렬 A의 특성근이 3중근 λ_1과 2중근 λ_2라

면 Jordan form은 다음 6형태 중 하나 일 것이다.

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&&\\&\lambda_1&1&0&\\&&\lambda_1&0&\\&&&0&\\&&&&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&&\\&\lambda_1&1&0&\\&&\lambda_1&0&\\&&&0&\\&&&&0\end{bmatrix}$$

3.9. 행렬 함수값 계산

- Cayley-Hamilton theorem : 주어진 사각행렬 $A\in R^{n\times n}$에서 $\Delta(\lambda)=|A-\lambda I|=(-\lambda)^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_0$라 하면 $\Delta(A)=(-A)^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_0 I=0$가 성립한다. 이는 $f(x)=q(x)\Delta(x)+r(x)$로 표현되는 다항식에서 $f(A)=q(A)\Delta(A)+r(A)$를 얻고 $\Delta(A)=0$이므로 $f(A)=r(A)=r_0 I+r_1 A+\cdots+r_{n-1}A^{n-1}$을 이용하여 계산할 수 있음을 의미한다.

3.9.1 특성근에 중근이 없을 때

- 계수 결정식 : $f(\lambda_i)=q(\lambda_i)\Delta(\lambda_i)+r(\lambda_i)=r(\lambda_i)$에 의해 다음의 n개의 독립적인 선형식을 풀어 구한다.

$$\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_0\\r_1\\\vdots\\r_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)\\f(\lambda_2)\\\vdots\\f(\lambda_n)\end{bmatrix}$$

3.9.2 특성근이 중근을 갖을 때

- 계수 결정식 : λ_1이 p중근을 갖을 때 $f(\lambda_i)=q(\lambda_i)\Delta(\lambda_i)+r(\lambda_i)=r(\lambda_i)$에 의해 다음의 $n-p$개의 독립적인 선형식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix}1&\lambda_{p+1}&\cdots&\lambda_{p+1}^{n-1}\\1&\lambda_{p+2}&\cdots&\lambda_{p+2}^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_0\\r_1\\\vdots\\r_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(\lambda_{p+1})\\f(\lambda_{P+2})\\\vdots\\f(\lambda_n)\end{bmatrix}$$

그리고 다음 p개의 선형식을 얻어 결국 n개의 독립적인 선형식을 풀어 구한다.

$$f(\lambda_1)=r(\lambda_1),\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\lambda_1}=\left.\frac{dr}{dx}\right|_{x=\lambda_1},\cdots,\ \left.\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}}\right|_{x=\lambda_1}=\left.\frac{d^{p-1}r}{dx^{p-1}}\right|_{x=\lambda_1}$$

3.9.3 Modal 행렬 M과 Jordan 행렬 J를 이용하는 방법

- e^{Jt}의 계산값 :

$$J=\begin{bmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\cdots&0\\0&0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{bmatrix},$$

$$e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\lambda^k&t&\frac{1}{2!}t^2&\cdots&\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\\0&1&t&\cdots&\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}\\0&0&1&\cdots&\frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&t\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

- 지수 행렬 함수 공식 : $e^{At}=Me^{Jt}M^{-1}$

3.10. 한정행렬(Definite Matrix)

- 양한정 행렬(positive definite matrix) : 주어진 사각행렬 $A\in R^{n\times n}$가 모든 0이 아닌 임의의 벡터 x에 대하여 $x^TAx>0$를 만족시키면 양한정이라 칭하고 $A>0$이라 표시한다.
- 부양한정(positive semidefinite) 행렬 : 주어진 사각행렬 $A\in R^{n\times n}$가 임의의 벡터 x에 대하여 $x^TAx\geq 0$를 만족시키면 부양한정이라 칭하고 $A\geq 0$로 표시한다.
- 음한정(negative definite)과 부음한정 행렬 : 주어진 사각행렬 $A\in R^{n\times n}$가 모든 0이 아닌 임의의 벡터 x에 대하여

$x^TAx<0(x^TAx\le 0)$를 만족시키면 (부)음한정이라 칭하고 $A<0(A\le 0)$이라 표시한다.

• 양한정 행렬의 성질 : $A>0$이면

$a_{ii}>0, \lambda_i>0, tr(A)=\sum\lambda_i>0, |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n>0, rank(A)=n$이다.

A가 부양한정이되 양한정이 아니면

$a_{ii}\ge 0, \lambda_i\ge 0, tr(A)=\sum\lambda_i\ge 0, |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n=0, rank(A)<n$이다.

• Orthogonal complement : 임의의 행렬 $A\in R^{n\times m}, n\ge m\ge rank(m)$의 orthogonal complement는 A^T의 null 공간의 basis를 열벡터로 갖는 행렬이다.

• Orthogonal(Unitary) 행렬 : 임의의 사각 행렬 $A\in R^{n\times n}$이 $A^TA=AA^T=I$를 만족시키면 Orthogonal 행렬 혹은 Unitary 행렬이라 칭한다.

• Orthogonal(Unitary) 행렬의 성질 : 임의의 Orthogonal 행렬 $A\in R^{n\times n}$에 대하여

$\lambda_i=1$ or $-1, |A|=1$ or -1이며 $A^{-1}=A^T$이다.

• 대칭행렬의 성질 : 주어진 대칭 행렬 $A=A^T\in R^{n\times n}$의 고유치 λ_i는 항상 실수이며 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=M^TAM$를 만족시키는 orthogonal 행렬 M이 존재한다.

• Singular value : 주어진 임의의 행렬 $A\in R^{n\times m}$에서 AA^T의 고유값의 제곱근을 singular값이라 한다.

• Singular 값 분해 : 주어진 임의의 행렬 $A\in R^{n\times m}$에 대하

여 $rank(A)=r\le\min(n,m)$이라 하자. 그러면 행렬 A는 $A=UDV$형태로 분해될 수 있다.

여기에서

$U\in R^{n\times n}$, $V\in R^{m\times m}$는 orthogonal 행렬이고

$D\in R^{n\times m}$은 d_{ii}가 A의 singular 값들로 그 요소가 $d_{ij}=0, i\ne j, d_{ii}\ge 0, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$을 만족시킨다.

3.11 Jacobian과 gradient

• 벡터 x에 대한 스칼라 함수 $f(x)$의 gradient :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

• 벡터 x에 대한 벡터 함수 $g(x)=[g_1(x),\cdots,g_m(x)]^T$의

$$\text{Jacobian}:\ \frac{\partial}{\partial x}g(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

• Ax의 Jacobian과 x^TAy의 gradient :

$$\frac{\partial}{\partial x}Ax=A,\qquad \frac{\partial}{\partial x}x^TAy=y^TA$$

5. 수학적 모델링

5.1. 시스템의 분류

• 시스템의 정의 : 어떤 목적을 이루기 위해 상호 작용하는 여러 개의 요소가 모인 복합체를 시스템이라 하고 시스템에 영향을 미치는 물리량을 입력, 입력에 따라 변하는 시스템의 양을 상태변수 혹은 줄여 상태라 하고 그 중에서 관심있는 상태를 출력이라 한다.

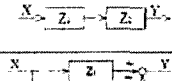
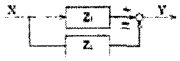
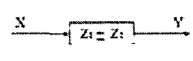
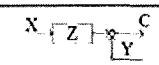
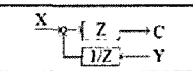
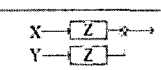
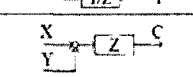
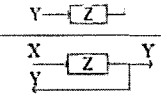
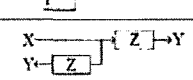
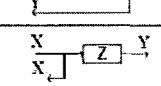
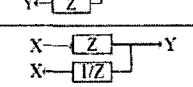
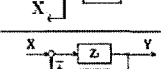
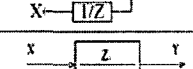
• 선형과 비선형 : α를 임의의 스칼라 상수라 하고, 입출력 함수를 $f(\cdot)$라 하고, 주어진 입력값 x_1, x_2에 대하여 출력 y_1, y_2를 $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$라 할때 다음 두 가지 성질이 성립하면 선형시스템이다. 실제 시스템은 두 성질을 만족시키지 않는 비선형시스템이나 관심있는 작은 범위에서는 선형으로 근사화하여 해석과 설계를 쉽게 할 수 있다.

중첩(superposition) : $f(x_1+x_2)=y_1+y_2$

동질성(homogeneity) : $f(\alpha x_1)=\alpha f(x_1)=\alpha y_1$

• 시불변과 시변 : 시스템 관계를 묘사하는 함수 즉 시스템 동역학이 시간에 따라 변하지 않는 시스템을 시불변시스템이라

표 2 블록 등가 변환

변환사항	변환전	변환후
직렬결합		
병렬결합		
가산점 앞으로 이동		
가산점 뒤로 이동		
분기점 뒤로 이동		
분기점 앞으로 이동		
치환		

하고 시간에 따라 변하는 시스템을 시변시스템이라 한다.

• 연속시간과 이산시간 : 시스템 동역학이 모든 시간에 대해 정의되면 연속시간 시스템이라 하고 일부라도 이산 시간에 대하여 정의되면 이산시간 시스템이라 한다.

• SISO 와 MIMO : 입력과 출력변수가 각각 하나인 시스템을 SISO(Single Input Single Output) 시스템이라 하고 다중입력과 출력을 갖는 시스템을 MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템이라 한다.

5.2. 전달함수

• 전달 함수의 정의 : 선형 시스템에서 모든 초기 조건을 0으로 했을 때 출력변수의 라플라스 변환을 입력변수의 라플라스 변환으로 나눈 함수값을 전달함수라 한다.

• 임펄스 응답 : 초기값을 0으로 한 상태에서 임펄스 $\delta(t)$를 입력으로 했을 때의 출력으로 이의 라플라스 변환은 전달함수와 같다.

• 전달함수의 일반 형태 :

$H(s)=\dfrac{b_m s^m+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\dfrac{N(s)}{D(s)}$, $m<n$으로 분모의 차수가 분자의 차수보다 큰 strictly proper 형태를 갖는다. $n\geq m$인 경우는 proper하다고 한다.

• 특성 방정식 : 위 일반 형태에서

$a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$를 특성방정식이라 하는데 전달함수의 분모를 0으로 하여 얻는다.

• 특성근 : 특성방정식의 해를 특성근이라 하는데 뒤에 보겠지만 시스템 응답의 특성을 좌우한다.

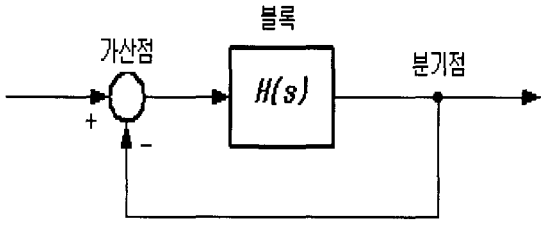


그림 1. 블록선도의 요소

5.3. 블록선도

• 블록선도의 정의 : 자동 제어시스템에 포함된 각 요소의 신호의 전달을 나타내는 그림을 블록선도라 한다.

• 블록선도의 네가지 요소 : 블록선도는 아래의 네가지 요소로 이루어진다.

블록 : 입력신호를 받아서 출력 신호를 만드는 전달요소로 전달함수가 표시된다.

화살표 : 신호의 흐름 방향을 표시한다.

가산점 : 두가지 이상의 신호가 합쳐지는 점을 표시한다.

분기점 : 하나의 신호를 나누기 위한 인출점을 표시한다.

• 등가 변환 : 표 2 참조

5.4.신호흐름선도

• 신호흐름선도란? : 여러 방향성 가지가 연결된 마디로 구성된 선도로 블록선도에 비해 간략화 과정이 쉽고 선형 다중시스템의 경우 해석과 설계를 단순화할 수 있는 장점이 있다.

• 신호 흐름선도의 구성요소와 용어의 정의 : 그림 2를 참조하라.

가지(branch) : 일정 방향성의 경로선분으로 블록선도의 블록과 같이 입력과 출력의 관계를 나타낸다.

마디(node) : 입력점, 출력점, 교차점 등이 존재하며 가지들이 입력되거나 출력되는 점을 나타낸다. 그림 1.4에서 E_i는 입력점, E_o는 출력점, E_1은 교차점이라 할 수 있다.

경로이득 : 하나의 마디에서 다른 마디로 가로지르는 하나의 가지 또는 연속적인 가지들의 연결을 경로라 하고 이때 마디는 두 번이상 지나치지 않아야 한다. 이때 이득을 경로이득이라 한다.

전향경로(Forward path) : 입력점에서 출력점으로 끝나는 경로로 그림 2에서 E_i에서 E_1에 이르는 전향 경로는 하나이고 그 이득은 $Y_1Z_2Y_3Z_4$로 주어진다.

루프(loop)와 루프이득 : 같은 마디에서 시작하고 끝나는 닫혀진 경로로 그 경로에서 한 마디를 두 번 지나지 않는다. 그림 2에서 $-Z_2Y_1$, $-Y_3Z_2$, $-Z_4Y_3$가 루프이득이다.

미접 루프(nontouching loop) : 루프가 공통의 노드를 공유하지 않는 경우 접하지 않는다 한다. 그림 2에서 루프이득이 $-Y_3Z_2$, $-Z_4Y_3$인 루프는 만나고 있지만 $-Z_2Y_1$, $-Z_4Y_3$인 루프는 만나지 않고 있다.

• Mason's rule : N개의 전향경로와 K개의 루프로 구성된 신호흐름선도의 입력 마디 y_i에서 출력 마디 y_o의 이득 M은 $M=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{M_k\Delta_k}{\Delta}$ 으로 주어진다.

여기에서 M_k는 y_i, y_o사이 N개의 전향경로 중에서 k번째 전향경로의 이득

Δ = 1 −(모든 루프이득의 합)
+(두개의 미접루프의 가능한 조합의 이득곱)
−(세개의 미접루프의 가능한 조합의 이득곱)
+(네개의 미접루프의 가능한 조합의 이득곱)
−(5개의 미접루프의 가능한 조합의 이득곱) + ⋯

$\Delta_k =$ N개의 전향경로 중에서 k번째 전향경로와 접하는 모든 루프이득을 0으로 했을 때 Δ값

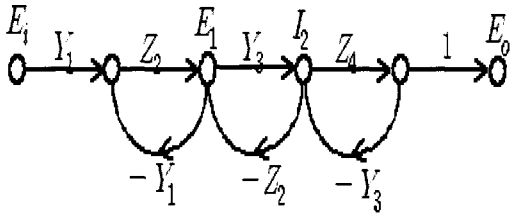


그림 2. 신호흐름선도의 예

$\Delta_k =$ N개의 전향경로 중에서 k번째 전향경로와 접하는 모든 루프이득을 0으로 했을 때 Δ값

예제 5 : 그림2의 신호흐름선도에서 E_o/E_i를 구해보자.

전향경로는 하나로 즉 $N=1$이고 그 이득은 $M_1 = Y_1Z_2Y_3Z_4$이다. 루프는 모두 세 개로 즉 $K=3$이고 이득은 $L_1=-Z_2Y_1$, $L_2=-Y_3Z_2$, $L_3=-Z_4Y_3$이다. 이 때 L_1, L_3는 미접루프이다. 또 Δ, Δ_1는 다음처럼 된다.

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_3$$
$$= 1+Z_2Y_1+Y_3Z_2+Z_4Y_3+Z_2Z_4Y_1Y_3,$$
$$\Delta_1 = 1$$

결국 E_o/E_i는 다음처럼 구해짐을 알 수 있다.

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta}\frac{Z_2Z_4Y_1Y_3}{1+Z_2Y_1+Z_2Y_3Z_4Y_3+Z_2Z_4Y_1Y_3}$$

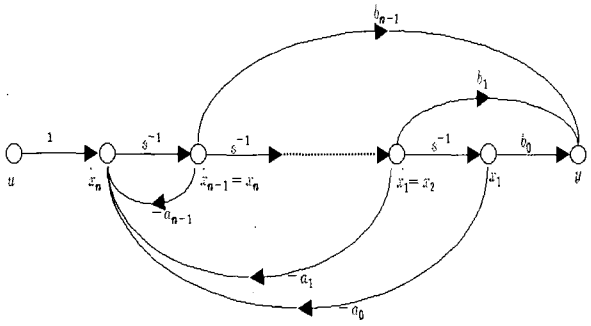


그림 3.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

의 controllable form 상태흐름선도

5.5. 상태공간모델

• 일반적인 시불변 다변수 시스템의 상태 공간식:

$x\in R^n$, $y\in R^p$, $u\in R^m$는 각각 상태, 출력, 입력변수이다.

$\dot{x} = Ax+Bu, \quad y = Cx+Du$

• 상태 공간식의 라플라스 변환식 :

$sX-x(0) = AX+BU$, $Y = CX+DU$에서 다음을 얻는다.

$$X = (sI-A)^{-1}x(0)+[(sI-A)^{-1}B+D]U,$$
$$Y = C(sI-A)^{-1}x(0)+[C(sI-A)^{-1}B+D]U$$

• 상태 천이 행렬 :

$\Phi(t) = LAPLACE^{-1}[(sI-A)^{-1}] = e^{At}$

• 영입력 응답 : 입력이 0일 때의 응답으로 위의 상태식에서는 $LAPLACE^{-1}[C(sI-A)^{-1}x(0)] = Ce^{At}x(0)$ 이다.

• 영상태 응답 : 초기조건이 $x(0)=0$일 때의 응답으로 위의 상태식에서는 $\int_0^t (Ce^{A(t-\tau)}B+D)u(\tau)d\tau$이다.

• $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$의 상태공간식 얻는 방법 1 : controllable form

① 전달함수의 분모 분자를 s^{-n}으로 나눈다.

② $X(s)$를 도입해 다음을 얻는다.

$$Y = (b_{n-1}s^{-1}+\cdots+b_0s^{-n})X,$$
$$X = U-(a_{n-1}s^{-1}+\cdots+a_0s^{-n})X$$

③ $X\to x_n$, $s^{-1}X\to x_{n-1}=\dot{x}_n$, $\cdots$; $s^{-(n-1)}X\to x_3=\dot{x}_2$, $s^{-n}X\to x_1$으로 할당하여 그림 3와 같은 흐름선도를 얻고 다음의 상태공간식을 얻는다.

$$\dot{x}_1=x_2,\cdots;\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\ \dot{x}_n=u-(a_1x_n+\cdots+a_0x_1),$$
$$y=b_{n-1}x_n+b_{n-2}x_{n-1}+\cdots+b_0x_1$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix},\ D=0$$

• $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$의 상태공간식 얻는 방법 2 : observable form

① 전달함수의 분모 분자를 s^{-n}으로 나눈다.

② $Y=(b_{n-1}s^{-1}+\cdots+b_0s^{-n})U-(a_{n-1}s^{-1}+\cdots+a_0s^{-n})Y$를 얻는다.

③ $b_0 s^{-1}U - a_0 s^{-1}Y \to x_1, \cdots, Y \to x_n$으로 할당하여 그림 4와 같은 흐름선도를 얻고 다음을 얻는다.

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 u,\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + b_1 u, \cdots,\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u,\quad y = x_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T,\quad D = 0$$

• $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$ 의

상태공간식 얻는 방법 3 : modal form

① 전달함술를 부분분수 전개해서

$H(s) = \dfrac{k_1}{s-p_1} + \dfrac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \dfrac{k_n}{s-p_n}$ 형태를 얻는다(p_i는 서로 다른 실근).

② $Y = \sum X_i,\ X_i = k_i U/(s-p_i)$로 할당하여 다음을 얻는다.

$$\dot{x}_1 = p_1 x_1 + k_1 u, \cdots,\ \dot{x}_n = p_n x_n + k_n u,\ y = x_1 + \cdots + x_n$$

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T,\quad D = 0$$

• 상태공간 모델에서 전달함수행렬 얻는 공식 :

$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 여기에서 보통 $D = 0$가 된다.

5.6. 비선형 시스템의 선형화

• 일반적인 비선형 시스템의 생태공간 모델식 :

$\dot{x} = f(x, u),\quad y = g(x, u)$

• 평형 조건식 : 여기에서 x_0, u_0, y_0는 평형시의 상태와 입력, 출력

• 변수의 섭동 :

$\delta x = x - x_0,\quad \delta u = u - u_0,\quad \delta y = y - y_0$

• Taylor 급수 전개 : x_0, u_0에서 Taylor 급수 전개값은 아래와 같이 주어진다. $0 = f(x_0, u_0),\ y_0 = g(x_0, u_0)$

$$\dot{x} = f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, u_0)} \delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0, u_0)} \delta u + \cdots$$

$$y = g(x, u) \approx g(x_0, u_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0, u_0)} \delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(x_0, u_0)} \delta u + \cdots$$

• 선형화된 상태공간식 :

$\dot{x} - f(x_0, u_0) = \delta\dot{x} \to x,\ \delta u \to u,\ \delta y \to y$에 의해 다음처럼 구해진다.

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, u_0)} x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0, u_0)} u$$

$$y = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0, u_0)} x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(x_0, u_0)} u$$

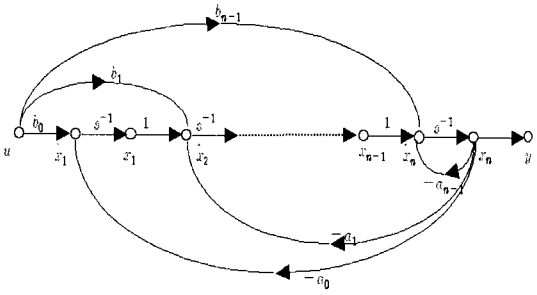


그림 4.

$H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$ 의 observable form 상태흐름선도

6. 결 론

본고에서는 [1]-[9]를 토대로 선형 제어 시스템 설계 이론에 대하여 연재되었던 [10]-[12]의 부록이 될 수 있는 내용들로 라플라스 변환, 행렬과 벡터, 수학적 모델링 방법에 대하여 논하였다.

참고문헌

[1] B. Shahina and M. Hassul, Control System Design Using Matlab, Prentice Hall, 1993

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory,SIAM,1994, http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/

[3] W.C. Levine, The Control Handbook, CRC Press, 2000

[4] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland

[5] A. Damen and S. Weiland, Robust Control, http://

www.cs.ele.tue.nl/SWeiland
[6] 김종식, 선형 제어 시스템 공학, 청문각, 1991년
[7] G. Balas et al., Robust Control Toolbox, Mathworks, 2005
[8] Control System Toolbox for Use with Matlab : User's Guide, Mathworks, 2005
[9] 최한호, 로봇공학 강의 노트, http://home.dongguk.edu/user/hhchoi
[10] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(I): 궤환 시스템의 성능과 안정도 판별, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제1호, pp. 55-69, 2006
[11] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(II): 고전 제어기 설계, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제2호, pp. 54-63, 2006
[12] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(III): 상태 공간 제어기 설계, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제3호, pp.42-50 2006

저자약력

《최 한 호》
- 1966년 8월 25일생.
- 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과 (공학사).
- 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사).
- 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사).
- 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원.
- 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수.
- 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수.
- 관심분야 : 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스
- E-mail : hhchoi@dongguk.edu