적응 격자 고차 해상도 해법을 위한 다차원 내삽법

장 세 명,*1 필립 존 모리스2

MULTIDIMENSIONAL INTERPOLATIONS FOR THE HIGH ORDER SCHEMES IN ADAPTIVE GRIDS

S.M. Chang*1 and P.J. Morris2

In this paper, the authors developed a multidimensional interpolation method inside a finite volume cell in the computation of high-order accurate numerical flux such as the fifth order WENO (weighted essentially non-oscillatory) scheme. This numerical method starts from a simple Taylor series expansion in a proper spatial order of accuracy, and the WENO filter is used for the reconstruction of sharp nonlinear waves like shocks in the compressible flow. Two kinds of interpolations are developed: one is for the cell-averaged values of conservative variables divided in one mother cell (Type 1), and the other is for the vertex values in the individual cells (Type 2). The result of the present study can be directly used to the cell refinement as well as the convective flux between finer and coarser cells in the Cartesian adaptive grid system (Type 1) and to the post-processing as well as the viscous flux in the Navier-Stokes equations on any types of structured and unstructured grids (Type 2).

Key Words : 다차원 내삽(Multidimensional interpolation), WENO 방법(WENO scheme), 적응 격자(Adaptive grids)

1. 서 론

지난 1990년대 중반을 기점으로, 전산유체역학(CFD)과 전산공력음향학(CAA)에서 유동장과 소음 해석을 위한 고해상도의 수치기법들이 개발되어 왔다[1]. 고차 정확도의 수치 기법이 갖는 가장 큰 문제점은 압축성 유동장 내의 충격파와 같이 날카로운 구배를 가지는 비선형 파동에 대해 불필요한 진동을 일으킨다는 사실이다(dissipation error). 이러한 문제점을 해결하기 위해 풍상 차분법(upwind difference)이나 TVD(total variation diminishing)법이 제안되었다. 이 방법들의 기본 원리는 급격한 구배 근방에서 공간 정확도를 줄여서 퍼짐성(dispersion)을 이용하여 고차 진동수의 Fourier 오차들을 걸러내는 것이다. 그러나 유량이나 기울기 제안자(limiter)의 사용은, 필연적으로 수치적 감쇠(numerical dissipation)를 일으킬 수 밖에 없어서, 공력음향의 발생과 전파를 해석하는 데는 적합하지 못하기 때문에, DRP(dispersion relation preserving)법이나 Compact 차분법 같은 유한 차분법들이 이 분야에서 인기를 누려 왔다[2,3].

WENO 법[4,5]은 기존의 ENO 방법을 바탕으로 유량 계산이나 물리량의 재건(reconstruction)에서 가중 평균의 개념을 도입하고, 유량 혹은 물리량의 구배에 따라 그 가중치를 적절하게 조절함으로서 수치적 진동을 최소로 하는 방법이다. 이 방법은 고 마하수의 압축성 유동장 해석에 매우 유익하며, 비선형 파동의 해석에도 유효하다. 최근에는 유동 구배에 따라 이 방법과 기존의 선형 파동 해석에 사용되던 중앙 차분법들을 교차 사용하는 하이브리드 방법들이 개발되고 있다[6,7].

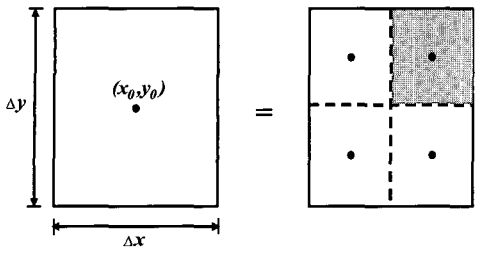
본 논문의 책임 저자는 지난 10여 년 동안 MUSCL-TVD 방법을 사변형 적응 격자(QUAG: quadrilateral unstructured adaptive grids)위에서 사용하는 공간과 시간에 대한 2차 정확도의 수치 기법을 연구 개발하였다[8,9]. 이 방법은 계산 도중 구배가 큰 쪽에 보다 많은 격자들을 배치하여 비선형 파동들에 대한 높은 해상도를 보다 높은 계산 효율로 구현하는 방법이다. 한편 보다 개선된 수치 결과를 얻기 위해, 적응 격자 위에서 앞에서 설명한 WENO 법을 사용하여 공간과 시간에 대한 5차 정확도의 수치 기법을 개발하던 도중, 다음과 같은 문제점들에 봉착하게 되었다.

접수일: 2006년 8월 8일, 심사완료일: 2006년 12월 1일.

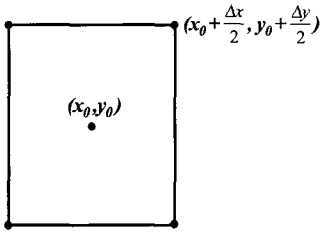
1 정회원, 군산대학교 공과대학 기계공학부

2 Department of Aerospace Engineering, Penn State University, PA, USA

* Corresponding author, E-mail: smchang@kunsan.ac.kr



(a) type 1



(b) type 2

Fig. 1 Two kinds of interpolations

(1) 격자의 크기가 급격하게 변하는 경계면에서 연속적인 파형의 찌그러짐이 발생하여 고차 정확도의 해를 크게 오염시킨다. 또한 WENO 법과 같은 풍상 차분법을 사용하면, 격자에 대한 비대칭의 영향 때문에 불필요한 수치적 파동의 발생이 증가하는 경우도 관찰된다. 이러한 영향은 낮은 정확도에서는 무시할 정도로 작지만, 고차 정확도에서는 종종 심각한 문제를 일으키기 때문에 적절한 내삽법을 사용하여 경계면의 값을 정확히 예측해야 한다.

(2) 균일 격자와 같은 정도의 질을 갖는 고차 정확도 수치 해를 얻기 위해서는, 적어도 수치 해법의 정확도보다 크거나 같은 정도의 내삽법을 사용하여야 한다[10]. 만일 저차의 내삽법을 사용하였다면, 수렴 검사를 하였을 경우 오차의 감소 차수를 원하는 정도까지 올릴 수 없다.

이 논문에서는 이러한 문제점들을 동시에 해결할 수 있는 다차원 내삽법을 소개하고, 연구 결과를 사용자가 직접 이용할 수 있도록 닫힌 꼴로 제공하기로 한다. 개발된 알고리즘은 검증 문제를 통하여 그 효용성을 보였다.

2. 문제 정의 및 이론 전개

2.1 격자 평균값

2차원 Cartesian 격자 계에서 가로 세로의 크기가 각각 Δx와 Δy인 장방형 격자를 생각한다. 어떤 변수의 이 격자 내에서의 평균값(cell-averaged value)을 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{u}(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} u(x,y)\,dxdy \tag{1}$$

한편 격자 내에서 도심(centroid)인 (x_0,y_0)를 중심으로 하는 Taylor 급수 전개를 도입하면 다음과 같다.

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Big|_{(x_0,y_0)}}{(n-k)!\,k!}(x-x_0)^{n-k}(y-y_0)^k + O(\Delta^{N+1}) \tag{2}$$

이 관계식은 공간에 대해 N차 정확도를 갖는다. 식 (2)를 식 (1)의 좌변 대입하고, 이중 적분을 수행하면 도심에 대해 대칭인 기함수 꼴의 항은 모두 소멸하고, 우함수 꼴의 항들만 남게 된다. 그 결과 식을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$u(x_0,y_0) = \overline{u}(x_0,y_0;\Delta x,\Delta y) + O(\Delta^2) \tag{3}$$

식 (3)이 의미하는 바는 격자 내의 도심 값과 격자 평균값은 오직 2차 정확도 이내에서만 일치한다는 사실이다. 따라서 서론에서 언급한대로 2차 정확도 이내의 수치 해법에서는 이 둘을 특별히 구분할 필요가 없었지만, 본 논문에서 다루고자 하는 내삽법에서는 짝수 차수의 고차 항들까지 고려해야 한다.

2.2 다차원 내삽법

본 논문에서는 두 가지 종류의 내삽법을 다루기로 한다. 먼저 격자 평균값이 주어졌다고 가정하고, 첫째, 한 개의 격자를 네 개의 균일한 종속 격자로 나눌 때 각 격자에 어미 격자의 값을 상속시키는 방법과, 둘째, 주어진 사격형 격자의 네 꼭지점 위의 값을 알아내는 방법이다. Fig. 1 참조.

2.2.1 타입 1: 격자 평균값 분할 내삽법

식 (1)에서 Fig. 1(a)의 1 사분면의 종속 격자 평균값을 고려하면 다음과 같다.

$$\overline{u}(x_0+\frac{\Delta x}{4}, y_0+\frac{\Delta y}{4}; \frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}) = \frac{4}{\Delta x \Delta y} \int_{y_0}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \int_{x_0}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} u(x,y)\,dxdy \tag{4}$$

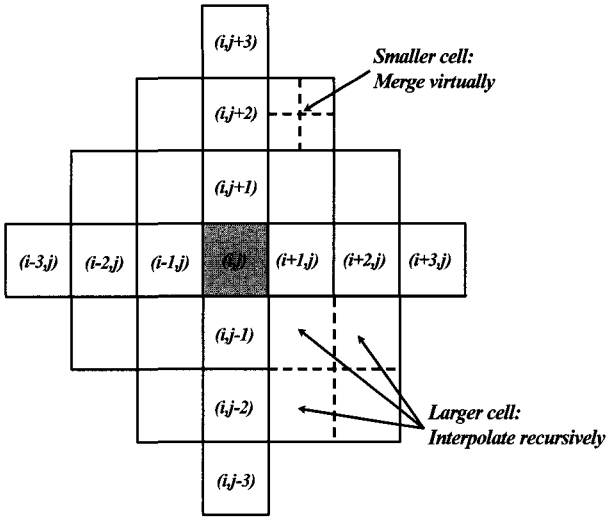


Fig. 2 Neighbor cells for the finite difference

앞에서와 같은 방법으로, 식 (2)를 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음 결과를 얻는다. 이때 식 (3)을 고려하여 도심 값을 격자 평균값으로 치환한다.

$$\bar{u}(x_0+\frac{\Delta x}{4},y_0+\frac{\Delta y}{4};\frac{\Delta x}{2},\frac{\Delta y}{2}) = \bar{u}(x_0,y_0;\Delta x,\Delta y) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x)^{n-k}(\Delta y)^k + O(\Delta^{N+1}) \tag{5}$$

여기에서

$$C_{n,k}=\begin{cases}0 & \text{if } n,k: even, all\\ \dfrac{1}{2^n(n-k+1)!(k+1)!} & otherwise\end{cases} \tag{6}$$

2.2.2 타입 2: 꼭지점값 내삽법

다음은 Fig. 1(b)에서와 같이 주어진 격자 평균값으로부터 오른쪽 위 방향 꼭지점에서의 함수값을 구한다. 식 (2)를 이용하면,

$$u(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0+\frac{\Delta y}{2}) = \bar{u}(x_0,y_0;\Delta x,\Delta y) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x)^{n-k}(\Delta y)^k + O(\Delta^{N+1}) \tag{7}$$

여기에서

$$D_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n(n-k)!k!}\left\{1-\dfrac{1}{(n-k+1)(k+1)}\right\} & \text{if } n,k \text{ even, all}\\ \dfrac{1}{2^n(n-k)!k!} & otherwise\end{cases} \tag{8}$$

식 (5), (7)에서 각각 나머지 세 대칭점들의 값들은 Δx와 Δy의 부호를 바꾸어 구할 수 있다.

특히 식 (5)는 보존 변수(conservative variable)를 다루고 있기 때문에, 다음 부가 조건을 만족 시켜야한다: Fig. 1(a) 참조.

$$\bar{u}(x_0,y_0;\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}\bar{u}(x_0+\frac{(-1)^i\Delta x}{4},y_0+\frac{(-1)^j\Delta y}{4};\frac{\Delta x}{2},\frac{\Delta y}{2}) \tag{9}$$

식 (5)의 결과를 식 (9)의 우변에 대입하면, 도심 점 (x_0,y_0)에 대해 부호가 반대인 대칭 항들이 서로 상쇄되어 그 결과가 정확히 좌변과 같음을 보일 수 있다. 따라서 본 연구에서 개발한 내삽법(Type 1)은 유한체적법과 마찬가지로 유체역학의 기본 보존 법칙들을 만족시킨다.

한편 식 (6), (8)에서 계수 값인 $C_{n,k}$와 $D_{n,k}$는 5차 정확도까지 Table 1, 2에 별도로 계산하여 제시한다.

Table 1 The coefficient $C_{n,k}$

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
1	1/4	1/4	-	-	-	-
2	0	1/16	0	-	-	-
3	1/192	1/96	1/96	1/192	-	-
4	0	1/768	0	1/768	0	-
5	1/23,040	1/7,680	1/4,608	1/4,608	1/7,680	1/23,040

Table. 2 The coefficient $D_{n,k}$

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
1	1/2	1/2	-	-	-	-
2	1/12	1/4	1/12	-	-	-
3	1/48	1/16	1/16	1/48	-	-
4	1/480	1/96	1/72	1/96	1/480	-
5	1/3,840	1/768	1/384	1/384	1/768	1/3,840

3. 미분 값들의 수치 계산

앞 절의 식 (5)나 (7)을 계산하기 위해서는 미분 값인 $\partial^n u/\partial x^{n-k}\partial y^k|_{(x_0,y_0)}$ 값들을 알아야 한다. 그러나 일반적인 수치 계산에서는 고계 미분 값을 따로 계산하지 않는다. 따라서 이 값은 주변 점들의 정보로부터 유한 차분법 등을 이용하여 구해야 한다.

3.1 주변 격자의 탐색 알고리즘

예를 들어 5차 정확도의 내삽법을 구현하기 위해서는 Fig. 2와 같은 주변 격자들의 정보가 필요하다. 적응 격자의 경우 격자들의 크기가 제각기 다르므로, 기준 격자에 대해 주변 격자의 크기를 맞추어야 한다. 즉, 작은 격자는 병합하여 식 (9)와 같이 평균값을 구하고, 큰 격자는 내삽법을 이용하여 분할한다. 따라서 주변 격자를 탐색하는 알고리즘은 자기호출, 혹은 재귀적(recursive)인 구조를 지닌다. 단, 매 시간 단계마다 레벨이 낮은 (크기가 큰) 격자를 먼저 계산하고, 레벨이 높은 (크기가 작은) 격자는 나중에 계산한다.

이 알고리즘을 오토메타로 표현하면 다음과 같다.

```
open index_neighbor
if level_neighbor = level_reference
   find and restore value_neighbor
end if
else
   if level_neighbor < level_reference
      interpolation: recursion                ..... Eq. (5)
      restore value_interpolated as value_neighbor
   end if
   if level_neighbor > level_reference
      merge virtually: recursion              ..... Eq. (9)
      restore value_merged as value_neighbor
   end if
end else
close index_neighbor
```

3.2 유한 차분식

Fig. 2에서 앞의 탐색 알고리즘을 이용하여 기준 격자 주변에 24개의 격자 정보를 구한다. 여기에 식 (2)를 적용하여 관계식을 만들면 모두 24개의 연립 방정식을 구성할 수 있을 것이다. Table 1, 2에서 미지수 (미분 값들과 도심 값 $u(x_0,y_0)$)는 5차 정확도의 경우 모두 21개이므로, 얼핏 보면 이 시스템은 불필요한 제약 조건들을 포함하게 된다. 그러나 비선형 파동 근방에서는 수치 진동을 방지하기 위하여 차수를 줄여야 하므로, 이는 결과적으로 타당한 선택이다.

임의 방향으로 1계 미분 값의 표현은 다음과 같다[11].

$$u'_i = \frac{\bar{u}^-_{i+1/2} - \bar{u}^+_{i-1/2}}{\Delta} + O(\Delta^5) \in (\bar{u}_{i-2}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}) \tag{10}$$

여기에서 u^-나 u^+는 격자 경계면에서 WENO 필터를 사용한 값으로, 다음 절에서 자세히 설명한다. 식 (10)과 같은 방법으로 연속한 5개의 유한 차분 스텐실로부터

$$u'_{i+1} = \frac{\bar{u}^-_{i+3/2} - \bar{u}^+_{i+1/2}}{\Delta} + O(\Delta^5) \in (\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}, \bar{u}_{i+3}) \tag{11}$$

$$u'_{i-1} = \frac{\bar{u}^-_{i-1/2} - \bar{u}^+_{i-3/2}}{\Delta} + O(\Delta^5) \in (\bar{u}_{i-3}, \bar{u}_{i-2}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}) \tag{12}$$

다음 이보다 고계 미분값들을 단순히 중앙 차분법을 이용하여 필요한 정확도까지 확장하여 사용한다.

$$u''_i = \frac{u'_{i+1} - u'_{i-1}}{2\Delta} - \frac{1}{6}u'''_i\Delta^2 + O(\Delta^4) \tag{13}$$

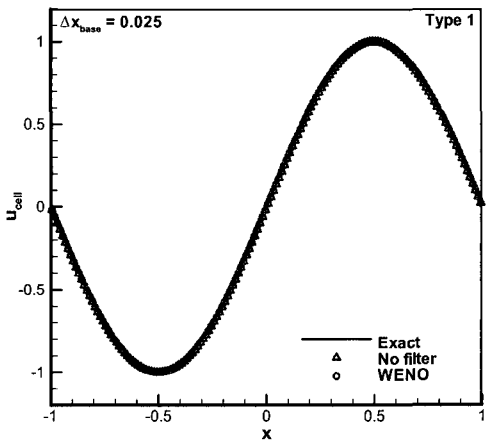
$$u'''_i = \frac{u'_{i+1} - 2u'_i + u'_{i-1}}{\Delta^2} - \frac{1}{12}u''''_i\Delta^2 + O(\Delta^3) \tag{14}$$

이보다 낮은 정확도를 요구하는 가장 높은 계수의 도함수들은, 식 (3)의 사실에 의거 격자 평균값으로 단순하게 격자 평균값들을 차분하여 2차 정확도로 구할 수 있다.

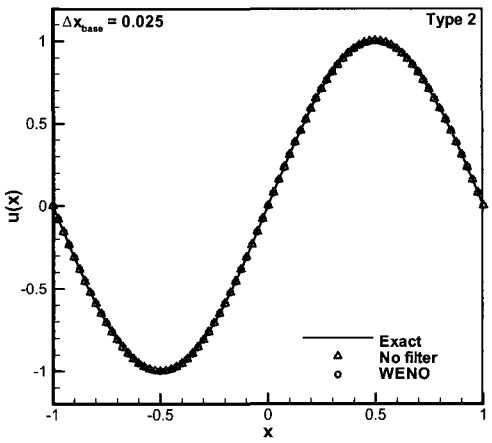
$$u''''_i = \bar{u}''''_i + O(\Delta^2) = \frac{\bar{u}_{i+2} - 4\bar{u}_{i+1} + 6\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_{i-2}}{\Delta^4} + O(\Delta^2) \tag{15}$$

$$u''''_i = \frac{u'''_{i+1} - u'''_{i-1}}{2\Delta} + O(\Delta) \tag{16}$$

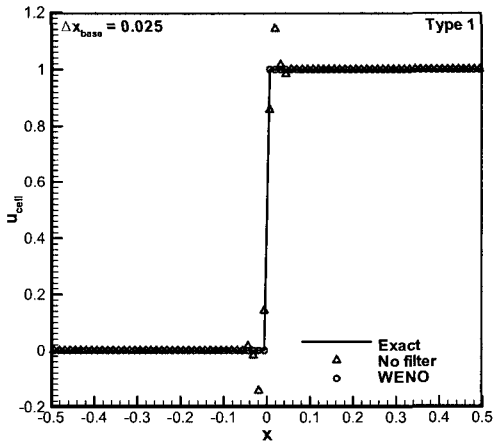
이 밖에도 다차원 내삽에서는 독립변수들이 조합된 미분 값



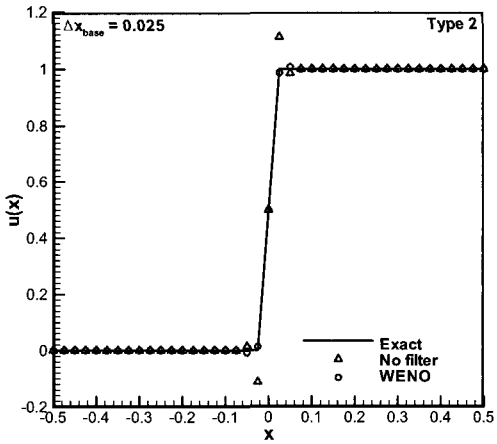
(a) linear, type 1



(b) linear, type 2



(c) nonlinear, type1



(d) nonlinear, type2

Fig. 3 Test for simple models

(coupled derivative term)들을 구해야 한다. 식 (13)을 이용하면,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j}^{(1)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i+1,j} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial^3 x \partial y}\Big|_{i,j}\Delta x^2 + O(\Delta^4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j}^{(2)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i,j+1} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}\Big|_{i,j}\Delta y^2 + O(\Delta^4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j}^{(1)} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{i,j}^{(2)}\right) + O(\Delta^4) \tag{17}$$

여기에서 고계 도함수들은 식 (3)으로부터 다음과 같이 2차 정확도로 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^3 \partial y} + O(\Delta^2) \\ &= \frac{1}{4\Delta x^3 \Delta y}\{\bar{u}_{i+2,j+1} - 2\bar{u}_{i+1,j+1} + 2\bar{u}_{i-1,j+1} \\ &\quad - \bar{u}_{i-2,j+1} - \bar{u}_{i+2,j-1} + 2\bar{u}_{i+1,j-1} - 2\bar{u}_{i-1,j-1} \\ &\quad + \bar{u}_{i-2,j-1}\} + O(\Delta^2)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x \partial y^3} + O(\Delta^2)$$
$$= \frac{1}{4\Delta x \Delta y^3}\{\bar{u}_{i+1,j+2} - 2\bar{u}_{i+1,j+1} + 2\bar{u}_{i+1,j-1} \quad (19)$$
$$- \bar{u}_{i+1,j-2} - \bar{u}_{i-1,j+2} + 2\bar{u}_{i-1,j+1} - 2\bar{u}_{i-1,j-1}$$
$$+ \bar{u}_{i-1,j-2}\} + O(\Delta^2)$$

여기에서 식 (15), (18), (19)와 같은 고계 도함수의 2차 정확도 차분 식들의 유도 방법은 참고문헌[12]에 제시되어 있다. 나머지 조합 항들도 같은 방법으로 구할 수 있다.

4. 필터링

앞 절의 식 (10)~(12) 식에서 격자 경계면의 값에 WENO 필터를 적용한다. 기준 격자 전후로 각각 3개씩의 이웃한 격자 정보를 알 때, 최대 구현 가능한 정확도는 중앙 차분을 했을 경우 6차이다[7]. 그러나 중앙 차분법은 비선형 파동에 대해 불필요한 수치적 진동을 보이므로 이를 걸러내는 WENO 필터가 필요하다. 5차 정확도의 WENO 필터에 관한 자세한 사항은 참고문헌[5,12]를 참조하라.

4.1 WENO 필터의 효과

앞에서 개발한 두 가지 내삽법에 대해 다음의 두 가지 테스트 함수를 이용하여 비교하여 보았다.

$$u(x) = \sin(\pi x) \quad (20)$$

$$u(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \quad (21)$$

식 (20)은 한 개의 Fourier 성분으로 나타나는 선형에 가까운 파동 모델이며, 식 (21)은 재건을 위해 무한한 Fourier 항들이 필요한 충격파와 같은 비선형 파동 모델이다. 그 결과는 Fig. 3에 제시되어 있다. 예상대로 선형 파동의 경우 필터링을 한 것과 안한 것은 별다른 차이가 없지만 (Fig. 3(a), (b)), 비선형 파동의 경우 필터링이 수치 진동을 효과적으로 제거하고 있음을 알 수 있다 (Fig. 3(c), (d)). Fig. 3(b), (d) (type 2)에서 한 격자 경계점에서의 함수 값은 각각 격자 좌측과 우측의 Riemann 불연속 값인 u^-와 u^+의 산술 평균으로 정의하였다.

4.2 수렴 검사

이와 같은 내삽법이 실제 보존 변수의 계산에서도 잘 작동하는지 확인해 보기 위하여 수렴 검사 (convergence test)를 실시하였다. 검사에 사용된 방법은 다음의 선형 파동 방정식 (linear advection equation)이다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

여기에서 초기 조건은 다음 두 가지 종류를 사용한다[5].

Test 1:

$$u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x) \quad : -1 \le x \le 1 \quad (23)$$

Test 2:

$$u(x,0) = u_0(x) = \sin^4(\pi x) \quad : -1 \le x \le 1 \quad (24)$$

또한 양끝 경계에서는 주기 경계 조건(periodic boundary condition)을 사용한다. 그리고 본 논문에서 개발된 내삽법은 2차원에 관한 것이므로, 수직 축에 대해서도 주기 경계 조건을 함께 사용하면 된다. 모든 격자의 경계면에서 수치 유량의 방법은 Roe의 방법을 사용 한다[4]. 즉, 식 (10)에서 WENO 법으로 구한 u^-나 u^+를 리만 풀개의 좌우 불연속 값으로 사용하는 방법이다. 여기에서 특성치에 해당하는 파동의 전달 속도는 항상 양의 값을 가지므로 격자 왼쪽의 값 (즉, WENO 법으로 재건되는 u^-)을 사용하면 된다. 또한 시간 적분은 양해법 (explicit method)으로서 5차 정확도의 Runge-Kutta 방법을

Table 3 The convergence test 1

level	N	N_{base}	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
2	16	10	2.16E-03	-	4.19E-03	-
3	32	10	1.37E-04	3.98	5.65E-04	2.89
4	60	10	8.67E-06	4.39	7.59E-05	3.19
5	116	10	4.73E-07	4.41	4.39E-06	4.32

Table 4 The convergence test 2

level	N	N_{base}	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
2	32	20	8.82E-03	-	2.09E-02	-
3	60	20	1.83E-03	2.50	8.43E-03	1.44
4	120	20	1.84E-04	2.31	1.15E-03	2.87
5	232	20	4.95E-06	5.48	3.71E-05	5.21

사용한다. 여기에서 CFL 수는 0.2로 고정하며, 이렇게 하는 이유는 참고 문헌[5]의 데이터와 직접 비교하기 위해서다.

Table 3, 4는 실제 적응 격자 코드를 이용하여 이와 같은 수렴 검사를 수행하여 $t=1$ 에서 해석해와 오차를 비교한 결과이다. 초기에 10개(test 1) 또는 20개(test 2)의 격자로부터 출발하여 다음과 같은 조건으로 격자를 분할(refinement) 또는 병합(merging)하는 알고리즘을 사용하였다[8,9].

격자를 분할할 것인지 병합할 것인지 결정하는 기준은 다음과 같은 오차 지시자(error indicator)를 이용하여 그 값을 기준 값과 비교한 다음 결정한다. 오차 지시자는 이웃한 격자 값들과의 일차 구배를 구하여 가장 큰 값을 선택한다.

Error indicator:

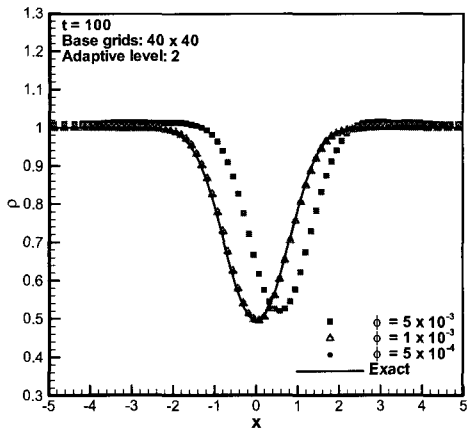
$$\epsilon = \max\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{reference,\ neigbor}\right)$$

$$\Phi = 2.45,\ \Psi = 0.091 \tag{25}$$

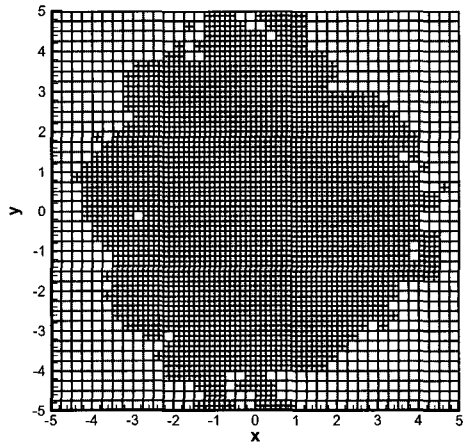
위 식 (25)에서 Φ와 Ψ값은, 각 수준(level)을 정의하는 데 필요한, 오차 지시자의 기준 값을 정의하기 위해 사용되는 파라미터들이다. 맨 처음 격자 분할을 시작하는 2단계에서는 초항 Φ값을 기준으로 하고, 그 다음 3 단계부터는 공비 Ψ값을 등비급수로 적용하여 좀 더 세밀한 구배 값에 대해 분할시켜 간다. 이상의 과정을 오토메타로 정리한 알고리즘은 다음과 같다.

open index_reference
if $\frac{\varepsilon}{\Phi} < \Psi^{n_{max}-2}$ *and level_reference* $\neq 1$
  merge or refine until level_reference = 1
end if
do n = 2 to n_{max}*-1 step 1*
  if $\Psi^{n_{max}-n-1} < \frac{\varepsilon}{\Phi} < \Psi^{n_{max}-n}$ *and level_reference* $\neq n$
    merge or refine until level_reference = n
  end if
end do
if $\frac{\varepsilon}{\Phi} > 1$ *and level_reference* $\neq n_{max}$
  merge or refine until level_reference = n_{max}
end if
close index_reference

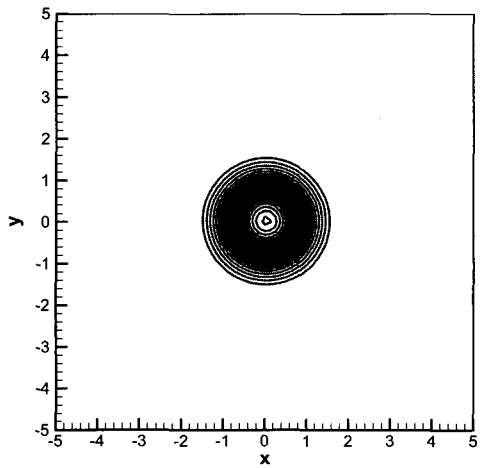
비교적 부드러운 곡선인 식 (23)의 초기 조건에 대해서 목



(a) density along the horizontal axis



(b) sample grids for $\Phi = 1\times10^{-3}$ case (4,432 cells)



(c) density field view of (b), $\Delta\rho = 0.02$ (25 contours)

Fig. 4 Vortex advection models

표인 5차 정확도에 근접한 수렴 결과를 보여 준다 (Table 3). 이는 격자가 병합하면서 원래 초기 조건의 정보를 일부 잃어 버리기 때문에 해의 질이 저하되는 것으로 해석된다. 격자의 병합 회수와 오차 수준을 적절히 조절하여 균일 격자에 점점 가까워지게 할수록, 더 높은 정확도를 구현할 수 있다. 좀 더 급한 구배를 갖는 식 (24)의 초기 조건에 대해서 적응 격자는 좀 더 유리한 수렴 정도를 보여 준다. 왜냐하면 격자의 분포를 좀 더 구배가 큰 쪽으로 모아줄 수 있기 때문이다.

4.3 다차원 문제에의 적용

본 논문에서 개발한 다차원 내삽법을 일반적인 2차원 압축성 비점성 유동장의 지배 방정식인 Euler 방정식에 적용하여 보았다. 수치 해법은 4.2절과 동일한 방법을 사용하되, WENO 재건된 u^-와 u^+값을 바탕으로 Roe 해법을 적용하였다[13].

수준이 다른 격자 사이 수치 유량의 계산에는 type 1, 그리고 후처리를 위한 격자 절점 (node)에서의 값을 계산하는 데는 type 2의 내삽법을 사용한다.

이 때, 초기 조건은 다음과 같이 주어진다[10].

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2\pi} e^{(1-x^2-y^2)/2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$p = \rho^{\gamma}$$

$$\rho = 1 - \frac{25(\gamma-1)}{8\gamma\pi^2} e^{1-x^2-y^2} \qquad (26)$$

여기에서 계산 영역은 $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$ 이고, 경계에서는 주기 조건을 사용한다. 식 (26)에서 압력 (p)과 밀도 (ρ)의 관계는 등엔트로피 조건을 만족시키고, 속도 성분 (u, v)는 대류 속도인 $(1, 1)$에 와동 중심으로부터 방사상 방향의 운동량 방정식 (힘의 평형)을 만족시키도록 하였다.

와동 중심은 일정한 대류 속도로 움직이므로, 한 주기에 해당하는 $\Delta t = 10$ 의 배수에 해당하는 시각에 와동을 관찰하여 원래의 초기 조건과 비교한다면, 수치 해법이 얼마만큼 정확하게 적용되었는지 판단할 수 있을 것이다.

일단 기본 격자를 40×40, 그리고 2단계의 적응 격자를 사용하였을 때, Fig. 4(a)에서 적절한 오차 지시자 경계 값 $\Phi = 1 \times 10^{-3}$ 에서 (식 (25)와 알고리즘 참조) 원래의 해가 10 주기 ($t = 100$)까지 그대로 보존되고 있음을 알 수 있다. 이보다 큰 값을 주면 (덜 민감하면) 해가 적절하게 전달되지 못하고, 보다 작은 값을 주었을 때 (더 민감하면) 수렴성을 가진다.

Fig. 4(b)는 적응 격자계의 예를 보여준다. 모든 격자들을 분할한다면 6,400개의 균일 격자가 발생한다. 이에 대한 계산 결과는 참고문헌[10]을 참조하라. 그러나 4,432개(69.3 %)의 격자만 가지고도 초기 정보를 잘 보존할 수 있으므로, 적응 격자가 더 효율적이라고 할 수 있다. Fig. 4(b)에서 수준이 다른 격자 사이의 연결 형태가 불규칙하더라도, Fig. 4(c)에서와 같이 보존 법칙을 제대로 만족시키는 매끄러운 해를 기대할 수 있다.

일반적으로 계산 시간은 격자의 개수와 비례한다. 그러나 본 연구에서 사용한 적응 격자에서는, 각 시간 단계마다 격자의 오차 지시자 값을 계산하면서 적응 격자 분포를 재배치하고, 적응 격자 내부에서 고차 미분 값들을 계산하여 내삽을 수행하므로, 여기에 다소 시간을 더 소비하게 된다. 그러나 기존 연구에서 적응 격자의 재 분포에는 전체 계산량에 대해 수 % 이내의 짧은 시간만이 소모되는 매우 효율적인 방법이라는 사실이 잘 알려져 있고[14], 현재의 내삽법은 수치 유량 계산을 위한 WENO 재건을 하면서 동시 수행되므로 (식 (10)~(12) 참조), 추가 계산 시간의 영향은 극히 미미하다고 할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서 저자들은 적응 격자를 이용한 고차 정확도 수치 해법을 위한 다차원 내삽법을 연구 개발하였다. 이 방법은 실제 유동 방정식의 해법에서 다음과 같이 이용될 수 있다.

(1) Type 1: 주어진 격자 평균값으로부터 분할된 격자 평균값을 예측하는 내삽 방법으로, 서로 다른 크기 격자 경계면에서의 대류항의 수치 유량 계산, 적응 격자의 분할 등에 사용된다.

(2) Type 2: 주어진 격자 평균값으로부터 격자의 꼭지점 위에서의 값들을 예측하는 내삽 방법으로, 점성 수치 유량 계산을 위한 물리량의 미분값 계산, 비정렬 격자의 후 처리 (post-processing) 등에 사용된다.

후 기

본 논문은 2005 년도 한국학술진흥재단 (Korea Research Foundation)의 지원에 의해 연구되었음 (KRF-2005-214-D00009, M01-2005-000-10179-0).

참고문헌

[1] Colonius T. and Lele S.K., 2004, "Computational Acoustics: Progress on Nonlinear Problems of Sound Generation,"

Progress in Aerospace Science, Vol.40, pp.345-416.

[2] Cheong C. and Lee S., 2001, "Grid-Optimized Dispersion Relation Preserving Schemes on General Geometries for Computational Aeroacoustics," *J. Computational Physics*, Vol.174, pp.248-276.

[3] Kim J.W. and Lee D.J., 1996, "Optimized Compact Finite Difference Schemes with Maximum Resolution," *AIAA J.*, Vol.34, No.5, pp.887-893.

[4] Liu X.D., Osher S. and Chan T., 1994, "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes," *J. Computational Physics*, Vol.115, pp.200-212.

[5] Jiang G. and Shu C.W., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *J. Computational Physics*, Vol. 126, pp.202-228.

[6] Pirozzoli S., 2002, "Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction Problems," *J. Computational Physics*, Vol.178, pp.81-117.

[7] Kim D. and Kwon J.H., 2005, "A High-Order Accurate Hybrid Scheme Using a Central Flux Scheme and a WENO Scheme for Compressible Flowfield Analysis," *J. Computational Physics*, Vol.210, pp.554-583.

[8] Chang S.M. and Chang K.S., 2000, "On the Shock-Vortex Interaction in Schardin's Problem," *Shock Waves*, Vol.10, No.5, pp.333-343.

[9] Chang S.M., Chang K.S. and Lee S., 2004, "Reflection and Penetration of a Shock Wave Interacting with a Starting Vortex," *AIAA J.*, Vol.42, No.4, pp.796-805.

[10] Shu C.W., 2003, "High-Order Finite Difference and Finite volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD," *International J. of Computational Fluid Dynamics*, Vol.17, No.2, pp.107-118.

[11] Shu C.W., 1997, "Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *NASA/CR-97-206253*, *ICASE Report* No.97-65, Brown University.

[12] 장세명, 2004, "유체역학 응용: 유체역학의 수학적 원리," *군산대학교*, http://my.dreamwiz.com/smc1972 <*강의*> *게시판 참조*, *NURI 사이버콘텐츠*, Vol.1, pp.210-212.

[13] Roe P.L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *J. Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372.

[14] Oden J.T., Strouboulis T. and Devloo P., 1986, "Adaptive Finite Element Methods for the Analysis of Inviscid Compressible Flow," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.59, pp.327-362.