

자유표면유동 해석을 위한 비정렬격자계에 적합한 경계면포착법 연구

명 현 국,^{*1} 김 종 은²

A STUDY ON AN INTERFACE CAPTURING METHOD APPLICABLE TO UNSTRUCTURED MESHES FOR THE ANALYSIS OF FREE SURFACE FLOW

H.K. Myong^{*1} and J.E. Kim²

A conservative finite-volume method for computing 3-D flow with an unstructured cell-centered method has been extended to free surface flows or two-fluid systems with topologically complex interfaces. It is accomplished by implementing the high resolution method(CICSAM) by Ubbink(1997) for the accurate capturing of fluid interfaces on unstructured meshes, which is based on the finite-volume technique and is fully conservative. The calculated results with the present method are compared to show the ease and accuracy with available numerical and experimental results reported in the literature.

Key Words : 경계면포착법(Interface Capturing Method), 자유표면유동(Free Surface Flow), 비정렬격자(Unstructured Meshes), 이류체계(Two-Fluid System)

1. 서 론

현재 다상유동(multi-phase flow) 및 금속이나 유리 성형공정 등과 같이 자유표면(free surface)이 존재하는 복잡한 유동현상들을 해석하기 위한 수치기법으로 VOF(Volume of Fluid) 방법[1]과 LS(Level Set) 방법[2]이 많이 사용되고 있다.

먼저, LS 방법은 상경계면으로부터 거리로 정의된 LS 값을 사용하여 상경계면을 계산하는 방법으로, 연속적인 LS 함수 값은 수치적으로 다루기 용이 하고, 높은 정확도로 경계면에 수직인 방향이나 곡률 등을 나타낼 수 있다. 그러나 LS 방법은 각 상의 체적을 일정하게 유지하지 못하는 근본적인 문제점이 있어, 이를 개선하기 위한 추가과정이 요구되는 단점을 가지고 있다.

한편 VOF 방법은 셀(또는 검사체적)내에 액상의 체적비로 정의된 VOF 값 α 를 사용하여 상경계면을 추적하며, 각 상의 체적이 잘 보존되는 장점 때문에 다상유동의 물리적인 현상을 왜곡 없이 표현할 수 있는 대표적인 방법으로 인식되어

현재 대부분의 상용 CFD코드에서 널리 사용되고 있다. 이 VOF 방법은 검사체적 내 자유표면의 위치와 α 를 직접적으로 추적하고 계산하는 경계면추적법(Interface tracking method)[1,3]과, α 를 자유표면의 정확한 위치에 대한 정보가 필요 없는 함수형태로 표현하고 이를 이송하는 방정식을 HR도식(high resolution differencing scheme)으로 풀어 경계면의 움직임을 포착하는 경계면포착법(interface capturing method)[4,5]으로 크게 구분된다. 이 두 방법은 둘 다 고정격자계를 사용하여 계산한다는 공통점이 있다. 그러나 경계면추적법은 질량보존을 잘 만족시키고, 자유표면의 정확한 위치를 추적해 내는 장점이 있으나, α 의 이류를 수치확산 없이 계산하기 위해 계산적으로 복잡한 상경계면 재구성과정을 거쳐야하므로, 완전한 경계면을 가지는 자유표면유동으로 적용범위가 제한되는 단점이 있다. 이에 반해 경계면포착법은 보다 적은 계산상의 노력으로 경계면이 혼합 또는 분리되는 등의 변화가 큰 문제를 풀 수 있을 뿐만 아니라, 3차원 문제로의 확장도 용이한 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법은 일반적으로 번짐(smearing)현상과 같은 경계면의 비물리적인 변형 및 수치확산이 문제가 되므로, 이를 개선하기 위해 최근 HRIC(High Resolution Interface Capturing)도식[4]과 CICSAM (Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes)[5]등과 같은 방법들이

접수일: 2005년 11월 14일, 심사완료일: 2006년 12월 13일.

1 정희원, 국민대학교 기계자동차공학부

2 학생회원, 국민대학교 대학원 기계공학과

* Corresponding author, E-mail: myong@kookmin.ac.kr

제안되고 있다.

또한, 기존의 VOF 및 LS 방법들은 거의 대부분 정렬격자계에 적합한 형태로, 비정렬격자계에는 직접 적용될 수 없는 근본적인 문제점을 가지고 있다.

본 연구의 목적은 다상유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 높은 정확도로 해석할 수 있는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법을 개발하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 Myong and Kim[6]이 개발한 비정렬 셀 중심 방법을 채용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석 코드(PowerCFD)에 비정렬격자계에 적용이 용이한 경계면포착법인 CICSAM 방법을 적용한다. 또한, 수치해석방법(PowerCFD 코드)의 검증을 위해, 2차원 및 3차원 댐붕괴 문제와 함께 바다면에 장애물이 존재하는 댐붕괴 문제에 대한 계산결과들을 기존의 실험결과들과 비교한다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식

유동을 비압축성이라고 가정하면, 기상-액상 모든 영역에 적용되는 질량보존, 운동량보존 및 액상의 체적비 α 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 적분형태로 표현할 수 있다.

$$\int_S \underline{v} \cdot d\underline{S} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_S [\rho \underline{v} \otimes \underline{v}] \cdot d\underline{S} = \int_S \underline{\tau} \cdot d\underline{S} - \int_S p d\underline{S} + \int_V \underline{s} dV \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \int_S \alpha \underline{v} \cdot d\underline{S} = 0 \tag{3}$$

그리고 국소물성치인 밀도와 점성계수는 다음과 같이 계산한다.

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \tag{4}$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \tag{5}$$

여기서 아래첨자 1과 2는 다른 종류의 유체를 각각 나타내며, 격자내에 자유표면이 위치하고 있을 때와 같은 일반적인 경우를 모두 고려하면 α 는 0과 1 사이의 값을 가진다.

2.2 α 에 대한 이산화 및 이류 알고리즘

식 (3)을 셀(체적 V_p)에 대해 이산화하면 다음과 같이 액상의 체적비 α 에 대한 이산화식이 얻어진다.

$$\alpha_p^{t+\delta t} = \alpha_p^t + \frac{\delta t}{V_p} \sum_{f=1}^n \alpha_f^* F_f \tag{6}$$

위식에서 F_f 는 셀 면에서의 체적유량으로 일반적으로 작은 시간변화 동안 일정하다고 가정한다.

위식을 정확하게 계산하기 위해서는 셀 면에서의 α_f^* 를 수치확산을 최소화시키며 구할 수 있는 이류 알고리즘, 즉 해의 한정성(boundedness)을 보장하면서도 급격한 기울기를 가지는 경계면을 유지하도록 인접한 셀 중심값을 사용하여 적절히 보간하여 α_f^* 를 구하는 방법이 필요하다. 일반적으로 이 방법은 해의 한정성을 보장하지만, 수치확산 및 번짐현상이 심한 상류차분(upwind differencing)도식과 한정성은 유지하지 않으나 급격한 기울기를 가지는 경계면을 잘 보존해주는 특성을 가진 하류차분(downwind differencing)도식을 적절히 조합시킨 형태이다.

일례로, 모든 VOF 방법의 기본이 되는 Donor-Acceptor 방법[1]에서는 상류차분도식과 Donor 셀 내 유체의 이용성기준(availability criteria)에 기초를 둔 제어된 하류(controlled downwind)차분도식을 조합시켜 간단한 형태를 가지면서도 효율적으로 α_f^* 를 구하고 있다. 그러나 이 방법은 국소한정기준(local boundedness criteria)을 준수하지 않아 경우에 따라선 자유표면의 형태가 변형되어 나타나는 단점이 있다[5].

2.3 CICSAM 방법

본 연구에서는 셀 면에서의 α_f^* 를 구하기 위해 기존의 경계면포착법에 적용된 여러 차분도식들이 가지고 있는 경계면의 번짐현상과 같은 물리적으로 적합하지 않은 변형 및 수치확산 등의 문제점과 정렬 사각형 격자계에만 제한되는 한계점을 극복하기 위해 개발된 CICSAM 방법[5]을 사용한다. 이 CICSAM은 NVD(Normalized Variable Diagram)[7]에 기초를 둔 HR 도식으로, 이 방법 다음과 같다.

정규화변수(normalized variable)로 표현된 Donor셀(Fig. 1참고)과 셀 면에서의 VOF 값 $\tilde{\alpha}_D$ 와 $\tilde{\alpha}_f$ 는 각 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\alpha}_D = \frac{\alpha_D - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} = 1 + \frac{\alpha_D - \alpha_A}{2(\nabla\alpha)_D \cdot \underline{d}} \tag{7}$$

$$\tilde{\alpha}_f = \frac{\alpha_f - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} = 1 + \frac{\alpha_f - \alpha_A}{2(\nabla\alpha)_D \cdot \underline{d}} \tag{8}$$

위식에서 아래첨자 U, D, A는 1차원적으로 세 개의 이웃하는 셀로 Upwind 셀, Donor 셀, Acceptor 셀을 각각 나타낸다. 그러나 비정렬격자계에서는 일반적으로 Upwind 셀을 정

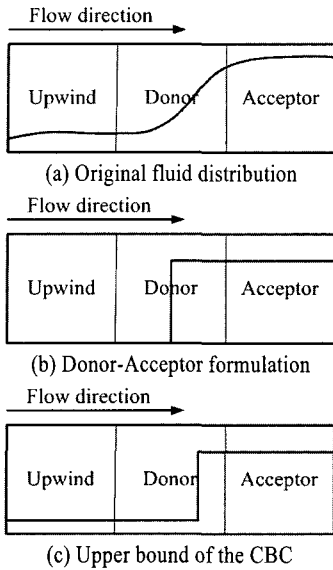


Fig. 1 Comparison between the donor-acceptor formulation and the upper bound of the CBC(Hyper-C).

의하는 것이 용이하지 않다. 따라서 비정렬격자계에서는 Upwind 셀 값을 Donor 셀의 구배값과 Acceptor 셀 값 및 $d = r_A - r_D$ 로부터 백터연산을 사용하여 외삽으로 구하며, 이 값을 대체시킨 형태가 위 두식의 마지막 형태이다.

식 (6)에 사용될 실제 셀 면에서의 α_f 값은 식 (7)과 (8)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_f = (1 - \beta_f)\alpha_D + \beta_f\alpha_A \tag{9}$$

$$\beta_f = \frac{\tilde{\alpha}_f - \tilde{\alpha}_D}{1 - \tilde{\alpha}_D} \tag{10}$$

여기서 식 (10)으로 표현된 가중계수(β_f)는 유동방향에 관계된 경계면의 방향뿐만 아니라 Upwind 셀을 포함하여 Donor 셀 및 Acceptor 셀에서의 모든 정보를 함축적으로 포함하고 있다.

Donor-Acceptor 방법에 국소한정기준을 항상 만족할 수 있는 정규화변수의 범위를 규정하는 CBC(Convective Boundedness Criteria)의 상한을 따르는 Hyper-C 도식[8]은 다음과 같다.

$$\tilde{\alpha}_{f\text{CBC}} = \begin{cases} \max \left[\tilde{\alpha}_D, \min \left\{ 1, \frac{\tilde{\alpha}_D}{c_f} \right\} \right] & \text{if } 0 \leq \tilde{\alpha}_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & \text{if } \tilde{\alpha}_D < 0, \tilde{\alpha}_D > 1 \end{cases} \tag{11}$$

여기서, Courant number인 c_D 는 다음과 같다.

$$c_D = \sum_{f=1}^n \max \left\{ \frac{F_f \Delta t}{V_D}, 0 \right\} \tag{12}$$

참고로, Fig. 1(a)에 나타난 것과 같이 세 개의 이웃하는 셀 사이에서의 임의의 유체형상에 대해 앞에서 언급한 두 도식의 차이점을 살펴본다. Fig. 1(b)는 Donor-Acceptor 도식으로 예측된 유체분포로, Donor 셀에서의 유체분포를 예측할 때 Upwind 셀의 유체가 무시되어, 급격한 경계면 기울기를 가지는 틀린 결과를 야기 시켜 결국 물리적으로 합당하지 못한 경계면의 형태를 나타내게 된다. 반면에 Fig. 1(c)는 CBC의 상한을 따르는 도식인 Hyper-C 도식을 사용하여 예측한 유체 분포로, Upwind 셀의 유체를 고려하여 Donor 셀에서 더 현실적인 유체분포를 만들어 낸다.

식 (11)은 국소한정기준을 만족하는 최적의 차분도식으로 적어도 1차원에서는 계단분포의 이류를 위한 최적의 도식이다. 그러나 이 도식은 경계면이 유동방향과 거의 접선을 이루는 경우에도 기울기를 계단형태로 만드는 경향이 있어, 다차원으로 확장하여 적용할 경우 경계면에서 주름지는(wrinkle)현상이 발생한다.

이 문제는 적절한 조건하에서 잘 제어된 하류차분도식으로부터 상류차분도식으로 전환시키는 방법으로 해결될 수 있다. 일례로 VOF 방법[1]은 제어체적면과 경계면 사이의 각도가 45°이상이면 제어된 하류차분도식으로부터 상류차분도식으로 무조건적으로 도식을 바꾸도록 하였다. 그러나 이 방법은 1차의 상류차분도식을 사용하였기 때문에 경계면의 형상을 정확하게 유지해 주지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 CICSAM에서는 상류차분도식으로 여러 가지 HR 도식을 비교한 Leonard[7]의 연구결과에서 가장 우수한 성능을 가진 다음과 같은 UQ(Ultimate-Quickest) 도식을 사용한다.

$$\tilde{\alpha}_{f\text{UQ}} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{8c_f\tilde{\alpha}_D + (1-c_f)(6\tilde{\alpha}_D+3)}{8}, \tilde{\alpha}_{f\text{CBC}} \right\} & \text{when } 0 \leq \tilde{\alpha}_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & \text{when } \tilde{\alpha}_D < 0, \tilde{\alpha}_D > 1 \end{cases} \tag{13}$$

또한, CICSAM에서는 수치확산이 보다 작은 정규화된 셀 면에서의 값을 예측하기 위해 셀 면과 유동의 움직임방향이 이루는 각을 고려하여 유연하게 변하는 가중계수(γ_f)를 사용하여 식 (11)과 식 (13)의 선형적인 변환형태의 아래 식을 구성하였다.

$$\tilde{\alpha}_f = \gamma_f \tilde{\alpha}_{f\text{CBC}} + (1 - \gamma_f) \tilde{\alpha}_{f\text{UQ}} \tag{14}$$

참고로, 위식은 CBC가 경계면에서의 구배를 보존하지 못

할 경우에는 UQ가, UQ가 경계면의 급격한 구배를 유지하지 못할 경우에는 CBC가 각각 작동하는 것을 의미한다.

한편, 기존의 VOF 방법에서는 일정한 형태의 정렬격자에 만 사용이 국한된 현시적 분할자(split operator)를 적용하고 있기 때문에, 새로운 시각에서의 α 를 나타내는 임의의 특정 셀면을 통과한 체적비의 총합이 좌표축의 방향에 따른 전개(sweep)순서에 따라 다르게 나타나게 된다. CICSAM에서는 식 (6)에서 필요로 하는 셀 면에서의 α_f^* 값을 다음과 같이 2차 정확도를 가진 Crank-Nicholson 도식의 형태로 구하여,

$$\alpha_f^* = \frac{1}{2}(\alpha_f^t + \alpha_f^{t+\delta t}) \quad (15)$$

전개순서에 대한 의존성을 제거함으로써 비정렬격자계에도 용이하게 적용될 수 있도록 하였다. 또한 식 (10)으로 정의된 새로운 시점에서의 가중계수가 시간간격이 매우 짧다면 경계면과 유동의 움직임방향이 이루는 각도변화가 매우 작으므로, 현시점의 가중계수로 대체되어도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 최종적으로 셀 면에서의 α_f^* 값은 식 (9)와 식 (15)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha_f^* = (1 - \beta_f) \frac{\alpha_D^t + \alpha_D^{t+\delta t}}{2} + \beta_f \frac{\alpha_A^t + \alpha_A^{t+\delta t}}{2} \quad (16)$$

그러나 식 (16)을 적용하여도 모든 경계기준을 항상 만족하는 것은 아니다. 경우에 따라선 α 값이 미세하게 0보다 작거나, 1보다 크게 나타날 수 있다. 이와 같은 값을 수정하기 위해 초기 VOF 방법인 Donor-Acceptor 방법[1]은 물리적으로 불합리한 값을 0과 1로 강제적으로 대체시켜 해결하였다. 그러나 물리적으로 불합리한 α 값을 수정하는 것 자체가 오히려 운동량방정식에 영향을 주어 보존량 오차를 유발시키므로, CICSAM에서는 Predictor 과정과 Corrector 과정을 도입하여 이 두 단계에 걸쳐 α 식을 계산함으로써 해결하였다. 여기서 Predictor 과정은 CICSAM의 가중계수 계산과 새로운 체적비 계산으로 구성되고, 후자인 Corrector 과정은 계산상의 노력을 감소시키기 위해 물리적으로 불합리한 값을 나타낼 때만 실행되도록 되어 있다.

3. 계산결과 및 고찰

3.1 댐붕괴(Dam-break)

Fig. 2는 자유표면유동과 2상 유체시스템의 수학적 모델에 대한 타당성을 확인하기 위해 자주 활용되는 2차원 댐붕괴 문제를 나타낸다. 이는 Martin and Moyce[9]의 실험조건과 같

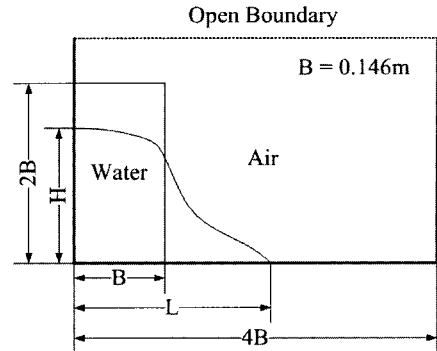


Fig. 2 Initial geometry of the water column.

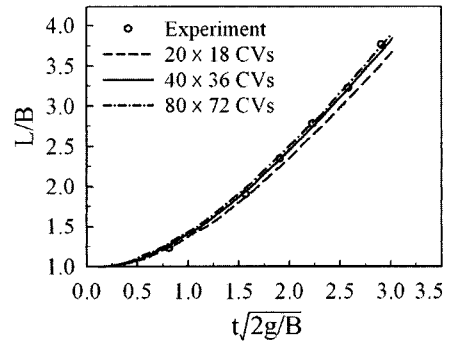


Fig. 3 The position of the leading edge versus time.

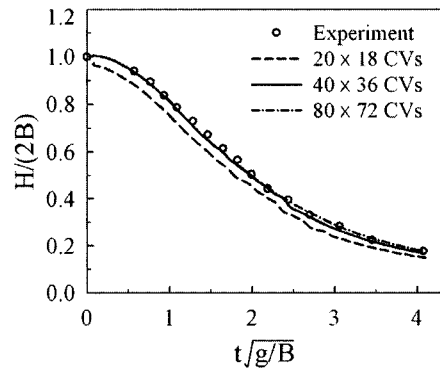


Fig. 4 The height of the collapsing water column versus time.

이 초기 상태는 그림과 같고, 수조의 전체영역과 일치하는 수치계산을 위한 영역은 0.584m × 0.365m이다. 그리고 Neuman 조건을 활용한 상부면을 제외한 나머지 면에 대해서는 벽면의 경계조건을 활용하였다.

Fig. 3은 시간간격 $\Delta t = 0.001$ 일 때 20 × 18, 40 × 36, 80 × 72 CVs의 세 가지 비정렬 사각형 격자계로 격자수가 계산 결과에 미치는 영향을 확인하기 위해 무차원 시간에 따른 길

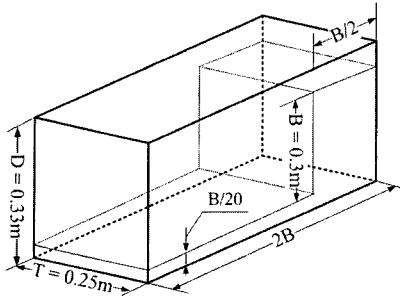


Fig. 5 Schematic geometry for 3D dam break benchmark solution.

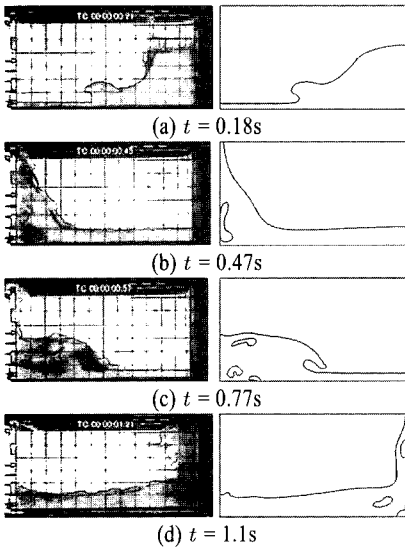


Fig. 6 Comparison of experimental visualization and present numerical results of the collapsing water column.

이방향으로 물이 흘러간 거리와 초기 댐 폭의 비(L/B)로 실험 결과[9]와 비교하여 나타낸 것이다. 비교적 적은 격자수에서는 시간이 경과할수록 다소 차이를 보이면서 실험결과와 멀어지는 경향을 나타내지만, 세 가지 경우 모두 실험결과와 비슷한 결과를 나타내고 있다. 그리고 이와 같은 사실은 Fig. 4에 나타낸 바와 같이 무차원 시간에 따른 높이방향으로 물이 감소하는 거리와 초기 댐 높이의 비(H/2B)에서도 확인할 수 있다.

Fig. 5는 Sueyoshi and Naito[10]의 실험조건과 같은 3차원 댐붕괴 문제에 실험에 사용한 수조의 형태와 자유수면의 초기 위치를 나타낸다. 초기 조건에서 수조의 바닥은 일정한 수위로 채워져 있다. 수치계산을 위해서 104 × 28 × 56C Vs인 등간격 비정렬 정육면체격자를 사용하였다. 또한 본 검증용해의 수치계산을 위해 적용된 시간간격은 Δt=0.001s이다.

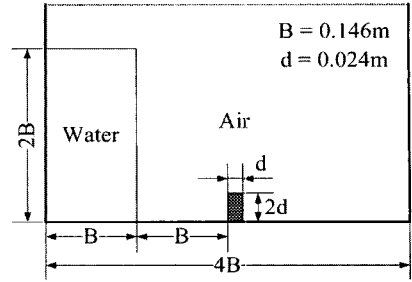


Fig. 7 Geometry of collapsing water experiment with an obstacle.

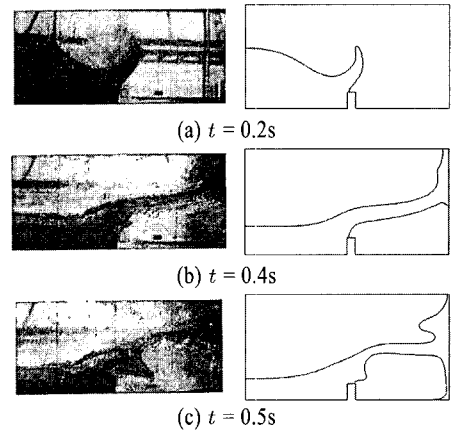


Fig. 8 Comparison of experimental visualization and present numerical results of a collapsing water problem with an obstacle.

Fig. 6은 수조 중앙단면(z=0)에서 각각의 시간 t=0.18s, 0.47s, 0.76s, 1.1s 내 시점에서의 실험결과와 수치계산으로 예측한 자유수면의 형태를 본 실험실에서 개발 중인 Post-Processor를 사용하여 α가 0.5인 Contour line을 나타낸 것이다. 수치예측결과는 두 번째 시점까지 실험결과와 상당히 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 다소 시간이 경과한 후에는 Fig. 6(c)를 통해 확인할 수 있듯이 전체적인 자유표면의 형태는 잘 예측하고 있지만, 그림의 좌측 아랫부분에서 형성되는 공기주머니(air bag)의 크기나 형태는 다소 차이를 나타낸다.

Fig. 7은 Koshizuka et al.[11]의 실험조건과 같은 형태로 수조의 바닥면에 장애물이 설치되어 있는 경우의 댐붕괴 문제를 나타낸다. 이와 같이 장애물이 있는 댐붕괴 문제는 자유수면의 변형이 상당히 복잡한 경우로 장애물이 없는 댐붕괴 문제에 비해 상대적으로 자유표면의 분리와 혼합이 크게 발생한다.

Fig. 8은 3가지 시간(t = 0.2s, 0.4s, 0.5s)에 대한 Koshizuka

et al.[11]의 실험에 의한 사진과 본 수치계산을 통한 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 그림에 나타난 것과 같이 본 수치계산을 통한 예측결과는 실험을 통한 유동형태와 국소적인 차이를 나타내고 있지만, 전체적인 유동형태나 0.4s 이후에 장애물 후면부에 발생하게 되는 공기주머니의 크기나 그 형태를 적절하게 예측하고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 0.5s에 본 수치계산결과는 장애물 상부에 사람의 혀와 같은 물기둥의 전진현상이 실험결과와 비교하였을 때 다소 짧은 형태로 나타나는 것을 확인할 수 있는데, 이는 실험결과와 수치해석 결과를 나타내는 시간이 정확하게 일치하지 않는 점에서 나타나는 차이라고 할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 Myong and Kim[6]이 개발한 비정렬 셀 중심 방법을 채용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석코드(PowerCFD)에 경계면포착법인 CICSAM을 적용하여 다상유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 높은 정확도를 가지고 해석할 수 있는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법을 개발하였다. 또한, 2차원 및 3차원 댐붕괴 문제에 대한 실험결과[9,10]와 장애물이 있는 댐붕괴 문제의 실험결과[11]를 본 연구를 통하여 얻어진 수치계산결과와 비교·검토함으로써 수치해석방법을 검증하였다. 연구결과, 본 해석방법(PowerCFD 코드)은 간단한 자유표면 유동문제뿐만 아니라 자유표면의 분리와 혼합이 크게 발생하는 문제에 이르기까지 물리적으로 타당한 실제현상을 적절하게 예측할 수 있음을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Hirt, C. W. and Nicholls, B. D., 1981, "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol.39, pp.201-225.
- [2] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solution to Incompressible Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.114, pp.146-159.
- [3] Rider, W. J. and Kothe, D. B., 1998, "Reconstruction Volume Tracking," *J. Comput. Phys.*, Vol.141, pp.112-152.
- [4] Muzaferija, S. and Peric, M., 1999, "Computation of Free Surface Flows using Interface Tracking and Interface Capturing Methods," Chap. 2, in Mahrenholtz, O. and Markewicz, M., *Nonlinear Water Wave Interaction, Comput. Mech. Publications.*
- [5] Ubbink, O., 1997, "Numerical Prediction of Two Fluid Systems with Sharp Interface," *PhD Thesis*, University of London.
- [6] Myong, H. K. and Kim, J. T., 2005, "Development of 3D Flow Analysis Code using Unstructured Grid System(1st Report, Numerical Method)," *Trans. of the KSME(B)*, Vol.29, No.9, pp.1049-1056.
- [7] Leonard, B. P., 1991, "The ULTIMATE Conservative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Dimensional Advection," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.88, No.1, pp.17-74.
- [8] Gaskell, H. and Lau, A. K. C., "Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, a New Boundedness Preserving Transport Algorithm," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.8, pp.617-641.
- [9] Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Fluid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Vol.A244, pp.312-324.
- [10] Sueyoshi, M. and Naito, S., 2003, "A Numerical Study of Violent Free Surface Problems with Particle Method for Marine Engineering," *Proc. of the 8th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Vol.2, pp.330-339.
- [11] Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y., 1995, "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation," *Comput. fluid Dynamics J.*, Vol.4, No.1, pp.29-46.