한국초등수학교육학회지 10(2), 221-242. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 10(2), 221-242.

자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식

박 현 미[1] · 강 완[2]

자연수의 나눗셈에 관해 초등학생이 가진 비형식적 지식을 조사하고 그 결과를 학교에서 지도하는 형식적 지식과 연계하여 의미 있는 시사점을 찾고자 하였다. 이러한 목적을 달성하기 위해 자연수의 나눗셈과 관련하여 형식적 지식을 배우지 않은 학생이 가진 비형식적 지식은 무엇이고, 문제를 해결하는 과정에서 형식적 지식을 학습한 학생과 형식적 지식을 학습하지 않은 학생의 사고 전략의 차이를 분석하였다. 이를 위해 1, 2, 3학년 학생을 대상으로 질적 연구를 하여 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 자연수의 나눗셈에 관한 초등학생의 비형식적 지식은 구체물에 의한 전략에서부터 사칙연산에 이르기까지 다양하다. 둘째, 형식적 지식을 학습한 학생은 형식적 지식에 문제 해결방법이 한정되어 있어 다양한 전략을 사용하지 못한다. 셋째, 나눗셈 지도가 전혀 이루어지지 않은 1, 2학년 학생이 스스로 비형식적 지식을 사용하여 문제를 해결할 수 있다는 것은 알고리즘의 습득이 문제 해결의 전제 조건이 아니라는 것을 보여 준다. 넷째, 수학적 지식을 가르칠 때, 비형식적 지식과 연계하여 형식적 지식을 가르칠 필요가 있다. 다섯째, 수학과의 연산 영역에서도 알고리즘에 치중한 지도가 아닌, 다양한 전략의 지도가 필요하다.

[주제어] 비형식적 지식, 형식적 지식, 나눗셈에 관한 전략

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교에 입학하기 전부터 학생들은 편을 나누어 놀이를 한다든가, 무언가를 나누어 가져 본 경험이 있다. 비록, 나눗셈을 배우지 않았을 지라도, 친구들과 편을 갈라서 시합을 하거나 공평하게 물건을 나눠 가질 수 있다. 이 밖에도 일상생활 중 상점에서 물건을 살 때, 친구나 형제들에게 음식을 나누어 줄 때 등과 같이 더하고 빼고 곱하고 나누는 등의 수학적인 문제 상황 속에 접한다. 그리고 이를 해결해 나가기 위해 손가락으로 구부려 세어 본다든가, 물건을 가지고 직접 나누어 본다든가, 또는 머릿속으로 헤아려 보는 등 다양한 전략을 구상함으로써 직관적이고 구체적이고 실제적인 수학적 지식을 개별적으로 구성한다. 이와 같이 학생들이 구성한 비형식적 지식은 학교에서 가르치는 형식적 수학을 학습하기 위한 개념적인 토대가 되고, 학생들은 이를 기반으로 형식적 수학을 학습하는 데 있어서 자신의 지식을 나름대로 재구성해 나간다.

학교의 형식적 지식과 구별되는 학생의 비형식적 지식에 대한 인식은 학습이 단순히 수

1) [제1저자] 서울청구초등학교
2) 서울교육대학교 수학교육과

동적으로 지식을 받아들이는 것이 아니라 인식 주체에 의해 능동적으로 의미를 구성한다고 보는 구성주의 인식론에서 비롯된 것이다. 수학을 하는 것도 마찬가지로 주어진 개념이나 원리, 법칙 등을 숙달하고 이를 적용하는 것이 아니라 수학적인 문제 상황에서 능동적으로 이를 해결하기 위한 전략을 개발함으로써 수학적으로 사고하고 문제를 해결해 나가는 과정이라고 할 수 있다. 이는 과거 기계적인 기초 계산술에서 벗어나 논리적인 사고력과 문제해결력 신장에 초점을 두고 있는 오늘날의 초등 수학 교육 동향과도 맥락을 같이 한다.

우리나라에서도 제7차 교육과정에서 학생 중심의 학습으로 학생의 경험 및 사고를 중시하고자 하였으며 교과서 구성도 학생들의 경험 및 활동을 중시하는 '생활에서 알아보기', '활동1', '활동2' 등을 통해 수학적 개념을 지도하기에 이르렀다. 이러한 흐름은 제6차 교육과정에서부터 찾을 수 있다. 수학과 교육과정은 초등수학의 특징을 중등 수학과 달리 만들어져가는 것, 비형식성, 직관성 등으로 규정하고(교육부, 1997), 학생의 사전 경험이나 직관을 중시하여 수학적인 개념이나 원리를 구체적인 조작물을 이용한 활동을 통해 점차 추상적인 것으로 심화해야 한다고 밝히고 있다.

그러나 교육 현실은 학생이 구성한 수학적 지식에 대한 이해와 지식이 부족하여 아직까지도 정확하고 빠른 계산 기능의 숙달을 강조하고 있으며, 가장 어려운 연산인 나눗셈을 지도하는데 있어서도 수학의 바탕이 되는 실제 맥락과의 연관성이 부족하여 원래의 의도를 실현하지 못하고 있다(이진영, 1997). 따라서 이러한 학생의 수학적 사고력과 문제해결력을 향상시키기 위해서는 초등수학 교수·학습의 토대로서 학생이 구성한 수학적 지식을 이해하고 이를 수학교수방법에 보다 적극적으로 반영하여야 한다. 즉, 학교 수학을 가르치는 데 있어서 무엇보다도 학령전 아동부터 학령기 아동이 학교의 형식적인 수업 이외의 비형식적인 활동에서의 수학적 경험을 통해 구성한 수학적 지식을 연결할 필요성이 요구되고 있다.

학생의 수학적인 지식을 토대로 보다 효과적으로 나눗셈을 지도하기 위해서는 초등학교 학생들이 학교에서의 형식적인 나눗셈 수업을 받기 전에 가지고 있는 나눗셈 전략에 대한 연구가 필요하다. 그러나 학생의 비형식적 지식 중 나눗셈에 관한 연구는 자연수의 비형식적 덧셈, 뺄셈 전략에 대한 연구들에 비해 상대적으로 많이 이루어지고 있지 않다.

본 연구의 목적은 자연수의 나눗셈에 관해 학생이 가진 비형식적 지식을 조사하고 그 결과를 학교에서 지도하는 형식적 지식과 연결하여 의미 있는 시사점을 찾고자 하는 것이다. 이러한 목적을 달성하기 위해 자연수의 나눗셈에 관해 학생이 가진 비형식적 지식은 무엇이며, 문제를 해결하는 과정에서 형식적 지식을 학습한 학생과 형식적 지식을 학습하지 않은 학생의 전략의 차이와 시사점은 무엇인지 알아보고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구는 초등학교 학생의 나눗셈에 관한 비형식적 지식에 대해 알아보기 위하여 다음과 같이 연구 문제를 선정하였다.

가. 자연수의 나눗셈과 관련하여 형식적 지식을 학습하지 않은 학생이 가진 비형식적 지식의 특성은 어떠한 행동으로 표현되는가?

나. 문제를 해결하는 과정에서 형식적 지식을 학습한 학생과 형식적 지식을 학습하지 않은 학생의 사고 전략의 차이는 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 구성주의와 수학교육

구성주의는 Piaget의 이론에 근거하여 인간의 지적 과정 그 자체는 구성적이며, 인지 구조 자체도 연속된 구성의 결과로 보고 지식의 절대성을 부정하고 있다. 따라서 학습자는 자신의 인지 구조를 바탕으로 경험과 학습을 통해 자신의 지식을 재구성하여 간다고 볼 수 있다.

Mather와 Alston(1990)은 Dewey의 '경험주의 교육' 에 근거하여 '학생이 학습하는 데 있어서의 경험과 그들이 어떻게 수학적으로 사고하는가' 에 대한 연구를 하였다. 이들은 탐구를 더 잘하도록 경험을 의미 있게 만든다는 맥락에서 좀 더 강력한 구성을 이룩할 수 있는 기회와 환경을 조성할 필요성을 주장하였다. 그리고 교사는 학습자에게 계속된 성장의 기회를 제공해야 하고, 학생의 경험으로부터 유도된 사회적 의미의 형식에서 다른 사람들과 상호작용하고, 그들의 지식을 확장할 수 있도록 하는 상황을 제공해야 한다고 하였다. 또 교수와 관련된 복잡한 지식 체계를 구성하기 위해 학생들이 수학교육에서 개념을 어떻게 해석하며, 학생들이 어떤 종류의 전략을 발견하고 사용하는가, 학생들이 범하는 오류를 어떻게 해석하는가에 관심의 초점을 두고 교사는 학생들로 하여금 좀 더 강력한 구성을 하도록 도와주어야 한다고 결론짓고 있다. 이를 위해 여러 가지 방법론적 접근을 생각해 볼 수 있다. 무엇보다 학생들이 자유롭게 자신의 생각과 경험을 말하고 이것을 탐구할 수 있는 학습 분위기가 조성되어야한다. 그리고 이에 대한 체계적인 방법으로서 학습의 도구가 되는 교과서의 안내가 필요하다. 교과서는 학생들이 자신의 경험과 자신만의 전략을 이끌어 내고 이것이 수학적 지식과 연계될 수 있도록 구성되어야 한다. 또한 교사는 이를 적극 활용하고 학생의 경험적 지식을 수학적 지식과 연계할 수 있도록 조력자, 안내자로서의 역할을 수행할 수 있어야 한다.

구성주의 관점에서 학생들을 잘 가르치기 위해서 교사는 학생들이 무엇을 생각하고, 그들이 무엇을 알고 있으며, 그들에게 제시되는 학습 내용을 어떻게 해결하는지를 알아야 한다. 학생들에게 지나치게 많은 훈련과 연습을 제공하기보다는 중요한 개념과 원리를 구성하는 데 필요한 최소한의 몇 가지 기술을 가르치는 것이 필요하며, 수학적 대상과 관계를 구성하려고 한다면 논제, 도구, 유형 및 학습 습관을 안내할 필요가 있다. 이러한 안내는 학생들이 스스로 강한 구성 행동을 창조할 수 있도록 도와줄 수 있기 때문이다.

즉, 구성주의에서 수학 교사의 역할은 학생들이 가지고 있는 선행 지식과 경험을 자세히 파악하고, 수학을 지도하는 데 있어서 그들이 가지고 있는 지식을 재구성해서 가르치는 것이다.

2. 비형식적 지식

우리는 살아가면서 수많은 문제 상황에 놓이게 되고, 이를 해결하기 위해 다양한 방법을 모색한다. 이는 태어날 때부터 죽을 때까지 인간이면 누구나 겪게 되는 과정이다. 그래서 교육의 목적 중 하나가 '문제해결력' 의 신장에 초점을 두고 있는지도 모른다. 어렸을 때도 마찬가지이다. 어떤 상황이나 문제가 주어지면 자기 나름의 방법을 가지고 이를 해결해 나간다. 이러한 일상생활의 일부는 수학적 문제 상황과 관련지어 생각할 수 있다.

학생들은 특별한 수학적 지식을 가지고 있지 않더라도 더하거나 나누어야 하는 문제 상황을 해결해 가고, 그 속에서 자기 나름의 지식을 쌓아간다. 이렇게 학생들이 경험을 통해서 갖게 된 지식을 비형식적 지식이라고 한다.

어린이들은 어른들이 알고 있는 것과는 다른 수학적 개념을 형성하고 있다. 그렇다고 해서, 어린이들이 형성한 비형식적인 수학적 개념이 틀렸다거나 잘못 인식되었다는 것을 의미하지는 않는다. 어린이들의 수학적 지식에 대한 개념 형성은 나름대로의 근거를 지니고 있는 것이며, 학교에서 지도하고 있는 기초적인 수학적 개념과 절차들을 이해하면서 학습을 할 수 있는 토대를 제공해 줄 수 있는 자원으로 고려되어야 하는 것이다(Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999; Kilpatrik, Swafford, & Findell, 2001).

학생은 수학을 이해하는 데 기초가 될 수 있는 많은 양의 정보나 직관적인 수학 지식을 가진 채 학교에 입학한다. 그리고 학생은 실제적으로 특정한 알고리즘이나 절차들에 대해 직접적인 지도를 받지 않고도 다양한 문제에 대한 답을 구할 수 있다. 이러한 직관적인 문제해결 과정을 통해 기본적인 사칙연산에 대한 개념이 명확해질 수 있고, 더 나아가 자신만의 전략을 만들 수 있다.

NCTM(2000, p.21)에서는 비형식적 지식과 관련하여 다음과 같이 두 가지 연구 결과에 주목하였다.

> 어린이들은 어릴 적부터 수학적 아이디어에 흥미를 가지고 있다. 일상생활의 경험을 통해서 그들은 수, 패턴, 모양, 양, 자료, 크기에 관하여 상당히 복잡한 일련의 비형식적인 개념을 점차 발달시키는데, 이 개념 가운데 많은 것이 옳고 견고하다. 이와 같이 학생은 학교에 들어가기 훨씬 전에 많은 수학적 개념들을 아주 자연스럽게 배운다(Gelman & Gallistel, 1987; Resnick, 1987). … 교사는 학생에게 비형식적 전략을 말하게 함으로써, 분명하게 인식하지 못했던 비형식적 지식을 깨닫도록 하고 그것을 구성하도록 도울 수 있다(Lampert, 1989; Mack, 1990).

우리나라의 경우도 마찬가지로 초등학교 1, 2학년 학생들은 수학에 흥미를 가지고 수학 수업에 적극적으로 임한다. 이들은 자신의 다양한 사고를 말하고, 수학적 문제를 해결하는 데 즐거움을 가지며 자신의 사고와 형식적인 수학 지식을 비교해 보기도 한다. 하지만, 학년이 올라감에 따라 수학을 좋아하는 학생들은 줄어들고, 오히려 수학올림피아드 대회에서 상위권의 좋은 성적을 거둠에도 불구하고 수학의 정의적 측면에서는 이에 비해 상당히 낮은 점수를 받는다.

이러한 현상에 대해 여러 가지 원인을 생각해 볼 수 있다. 하지만, 본 연구에서는 그 원인을 학교 수학의 형식적인 지도와 학생들의 경험에 대한 인식부족으로 인한 수학적 지식 간의 괴리감을 지적하고자 한다.

따라서, 교사는 학생의 비형식적 지식을 바르게 인식하고 이를 형식적 교육과 연결시켜 학생이 가지고 있는 비형식적 지식을 체계화하고 형식적 지식을 가르치는데 원동력으로 삼을 필요가 있다.

3. 선행연구

학생들은 형식적인 수학적 지식의 이해를 위한 기초를 제공할 수 있는 비공식적이고 직관적인 수학적 지식을 가지고 학교에 들어간다. 특정한 수구구, 알고리즘, 과정에 관한 형

식적이거나 직접적인 교수법이 없이 학생들은 문제에 관한 다양한 해결책을 구성할 수 있다. 따라서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 기초적인 조작은 직관적인 문제해결과 문제해결 과정의 확장으로 발전되어질 수 있는 상징적 과정의 견지에서 정의될 수 있다.

Baroody(1993)는 학생의 비형식적 수학이 주는 의미에 대해서 제시하기를 형식적 수학은 학생들의 비형식적 지식을 바탕으로 형성되어야 하고, 종종 학습에서 학생들이 보이는 어려움은 학생의 비형식적 수학과 형식적 수업간의 괴리에 있다고 지적하였다. 실제로, 학생이 스스로 습득하거나 만들어 낸 비형식적 지식 중에는 학교에서 가르치는 형식적 지식과 충돌하거나 일치하지 않을 수 있으며, 특히 두 지식들 사이에 아무런 연결이 없다면 학생에게 혼란을 일으킬 수 있다. 예를 들어, Nunes, Schliemann과 Carrager(1993)에 의해 브라질의 어린이들과 함께 수행되었던 연구를 살펴보자. 브라질 어린이들은 시장이나 길거리 노점상에서 과일을 팔아서 돈을 벌어야 했다. 연구자가 실제 상황에서 손님으로서 접근했을 때, 어린이들은 자신들의 비형식적 방법을 이용하여 능숙하게 물건값을 계산하였다. 어떤 어린이는 가격이 각각 5 Cruzeiros인 레몬 12개의 가격을 계산하기 위해서 한 번에 레몬을 2개씩 묶어서, "10, 20, 30, 40, 50, 60" 이라고 세었다. 하지만, '똑같은 구조(12×5)' 의 '상황이 배제된' 곱셈 문제를 세로식으로 제시했을 때, 그 어린이는 처음에 있는 2를 내려서 쓰고, 그 다음에 5, 마지막으로 1을 써서 152라고 답을 얻었다. 이처럼 효율적인 비형식적 지식을 소유한 어린이가 학교에서 교육을 받은 후에 오히려 더 심각한 오개념을 형성하기도 한다.

이런 현상의 원인을 교사와 교사 교육자, 연구자, 교과서 집필자가 학생의 비형식적 수학을 인식하지 못하고 완성된 수학만을 전수하려고 하는 것에서 찾을 수 있다. 따라서 어린이가 소유한 비형식적 지식을 존중하고, 이것이 수학 교수 · 학습을 위한 기초로서 사용되어야 한다.

이진영(1997)은 초등학교 학생의 나눗셈 전략을 분석하기 위해 초등학교 1, 2, 3학년 학생들 각 20명씩 총 60명을 대상으로 양적연구를 하였다. 나눗셈 과제 수행 결과 전학년 모두 정답률이 70% 이상으로 높게 나타났다. 또한 정답을 대상으로 나눗셈 전략을 살펴 본 결과 크게 모델링, 중복세기, 동수누가, 동수누감, 이등분, 아는 부분으로 나누기, 곱셈구구, 교과서에 제시된 세로셈 전략으로 나타났다. 그리고 학년별 나눗셈 전략 특성을 분석한 결과, 1학년 학생들의 경우 동수누가전략과 모델링 전략, 이등분전략이 높게 나타난 반면, 2학년 학생들은 승수를 자신들이 알고 있는 부분으로 나누어 해결하는 아는 부분으로 나누기 전략이 50.8%로 높게 나타났으며, 타 학년에 비해 매우 다양한 나눗셈 전략들을 활용하고 있었다. 이와 달리 형식적인 나눗셈 수업을 받은 3학년 학생들의 과반수 이상(58.99%)이 교과서에서 제시된 세로셈 전략을 사용하였으며, 아는 부분으로 나누기 전략을 사용한 학생들은 20.14%로 나타났다. 또한 오류 유형을 분석한 결과, 1학년 학생들은 문제의 난이도와 덧셈구구로 인한 오류가 많은 반면에, 2학년 학생들은 문제의 맥락에 대한 이해 부족에서 생긴 연산선택의 오류 특히 단순히 곱셈구구로 적용한 오류가 가장 많았으며, 3학년 학생들은 교과서에 제시된 세로셈 전략에서 생긴 오류가 가장 많았다.

이러한 연구결과 나타난 학생들의 다양한 나눗셈 전략 특성과 교과서에 제시된 세로셈 전략을 사용한 데서 나타난 오류는, 수학적인 사고력과 문제 해결력이 강조되고 있는 초등수학교육에 있어서 학교 수학 전반에 내재한 정확성과 신속성을 강조하는 기계적인 접근에 대한 반성과 아울러, 학교 수학 학습의 중요한 자원인 학생들의 다양하고 창의적인 전략을 활성화시키고 실제 학생의 수학적인 지식을 교육과정에 보다 체계적으로 반영하기 위한 연구와 노력이 필요함을 시사해 주고 있다.

많은 학생들이 계산 능력의 응용력에 대한 확실하고 강력한 일반적인 문제해결의 접근에 지배적이다. 만약 고학년 학생들이 단순히 어린 학생들이 문제 상황을 분석하기 위해 적용한 직관적이고 분석적인 모델화의 일부를 적용한다면 문제 해결과정에서 나타나는 실수를 줄일 수 있을 것이다. 즉, 어린 학생이 기초적인 문제를 해결하기 위해 적용시키는 직관적인 모델화 기능을 활용하도록 돕는 것이 필요하다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

자연수의 나눗셈과 관련하여 학생이 가진 비형식적 지식이 무엇인지에 대해 문헌 검토와 면담을 통한 질적 연구를 시행하였다.

면담 대상자는 서울시 중구에 소재한 C초등학교 1, 2, 3학년 학생 중 학년별로 3명씩 선정된 9명이다.

선정 기준은 연구에 참여할 의사를 밝히고 학부모의 동의를 얻은 학생 중에서 학업 성취도가 중간인 학생으로 선발하였다. 다만, 1, 2학년 학생의 경우 학원이나 과외, 혹은 가정에서 선행학습을 받지 않은 학생으로 제한을 두었다.

선정결과 학생들의 사회·경제적 배경은 학부모들의 평균 학력이 중졸 이상이고 직업이 주로 상업이나 회사원인 주로 맞벌이 부부의 자녀로 학생의 학습 지도에 많은 시간을 투자하지는 않는 편이었다.

2. 면담에 사용한 나눗셈 문항의 유형 및 구성

본 연구에서 면담자에게 제시할 나눗셈 문제들을 구성하기 위하여 제7차 교육과정에 따른 3학년 교과서의 나눗셈 단원을 차시별로 분석하고, 제7차 교과서의 집필위원장인 배종수(1999)의 분류 기준과 Thomas et al.(1999)이 제시한 나눗셈 문제 유형을 검토하였다. 선정된 문제들을 유형별로 분류하면 [표 1]과 같다.

[표 1] 나눗셈 문제 유형

<table>
<tr><th>단 계</th><th colspan="3">문 제 유 형</th></tr>
<tr><td rowspan="3">3-가</td><td rowspan="3">기본적인 나눗셈</td><td rowspan="2">나머지가 없는 경우</td><td>포함제</td></tr>
<tr><td>등분제</td></tr>
<tr><td colspan="2">나머지가 있는 경우</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3-나</td><td rowspan="3">큰 수의 나눗셈</td><td rowspan="2">받아내림이 없는 경우</td><td>포함제</td></tr>
<tr><td>등분제</td></tr>
<tr><td colspan="2">받아내림이 있는 경우</td></tr>
</table>

이러한 나눗셈 문제 유형에 따라 제시된 문제 유형은 모두 6가지이다.

각 문제를 살펴보면, 유형별로 카드제시 6문제, 구두제시 6문제로 구분하여 모두 12문제를 선정하였고, 학년별 수준을 고려하여 기본적인 나눗셈에서 나머지가 없는 경우의 문

항은 학년별로 조금씩 문제의 난이도를 달리하였다. 그 이유는 3학년 학생의 경우 1학년 학생에게 제시한 한 자리수의 나눗셈은 문제가 너무 쉬워 나눗셈 전략을 살피고자 한 연구자의 의도가 구현되기 어렵다고 보았기 때문이다.

3. 연구 절차

면담에 앞서 학생들의 사고를 충분히 이끌어 낼 수 있도록 하기 위하여 학생들과 유대관계를 형성하는 시간을 가졌다. 면담은 연구자가 1명씩 개별적으로 문제를 제시하고 학생이 응답하는 방식으로 진행하였다. 진행 과정은 모두 비디오와 녹음기를 사용하여 녹화하고 연구자가 관찰록을 작성하여 기록하였으며 학생은 필요한 경우 학생의 수행기록지에 해결 방법을 적을 수 있도록 하였다.

문제 푸는 순서는 다음과 같다. 먼저 문제 카드를 학생이 직접 읽고 6가지 문제 유형을 모두 풀어 본 후(카드제시 6문제), 같은 유형의 다른 문제를 학생들이 친숙한 소재와 용어로 바꾸어 연구자의 설명으로 제시하였다(구두제시 6문제). 특히, 특정 문제를 어려워하여 수행하지 못한 학생에게는 연구자가 보충질문을 하였다. 학생들이 문제를 이해하고 해결하기 쉽도록 구체물 즉, 수막대, 바둑돌, 색연필과 더불어 종이와 연필도 함께 제시하였으며 학생들이 나름대로 다양한 전략으로 문제를 해결할 수 있도록 편안한 분위기를 조성하였다. 또한 학생들이 문제를 수행하는 데 걸리는 시간은 제한 없이 문제를 해결할 때까지 기다렸고 문제를 다 해결하였을 경우, 어떻게 해결하였는지 다시 학생의 설명을 들으며 연구자의 관찰지에 그 내용을 기록하였다.

자료 분석을 위해 학생과의 면담 과정을 비디오와 녹음기로 녹화한 테이프의 내용과 학생이 문제를 해결하기 위해 종이 위에 쓴 기록, 그리고 학생이 수행한 것을 연구자가 관찰한 수행 기록을 참조하여 모두 기술하였다. 그리고 면담 내용으로 프로토콜을 만든 뒤, 다음의 [표 2]와 같은 방법으로 번호를 부여하였다.

[표 2] 프로토콜 번호 부여 방법

주 체		학 년		학생구분	문제제시방법		문항 번호		줄 번호	
교사	T(teacher)	1학년	1	A	카드	R(reading)	1번째 문제	1	1번째줄	01
		2학년	2	B			2번째 문제	2	2번째줄	02
학생	S(Student)	3학년	3	C	구두	L(listening)	⋮	⋮	⋮	⋮

연구자는 번호가 부여된 프로토콜을 수차례 반복하여 읽으면서 주석(comment)을 달았다. 주석을 단 다음에는 주석에서 응집된 아이디어를 부호화(coding)하였다.

본 연구는 학생들이 가지고 있는 나눗셈에 관한 문제 해결 전략을 살펴보는 것이기 때문에, 학생이 해결한 문항 중 바르게 해결한 문항만 선별하여 그 안에서 발견할 수 있는 문제 해결 전략을 살펴보았다. 그리고 비슷한 전략 유형끼리 분류하여 그 특징을 분석하였다.

Ⅳ. 분석 및 논의

1. 자연수의 나눗셈에 관해 1, 2학년 학생이 보인 비형식적 지식

가. 한 가지 전략을 사용한 경우

(1) 손가락으로 세기

이 전략은 피제수가 손가락으로 세는 것이 가능한 10보다 작은 수일 때, 손가락을 제수만큼 접어가면서 몇 번 접었는가를 통해 답을 찾는 것이다. 이것은 1학년 B학생이 사용한 전략으로, '8÷2' 에 관한 문제를 제시했을 때 다음과 같은 반응을 보였다.

T1BL101	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어서 친구들에게 선물하고 싶어. 그러면, 모두 몇 봉지의 선물을 만들 수 있을까?
S1BL101	5봉지
T1BL102	어떻게?
S1BL102	손가락으로 2개씩 해봤더니 5봉지가 나왔어요.
T1BL103	그래. 그럼 한번 해볼래?
S1BL103	(손가락을 2개씩 구부려 세다가 8개에서 멈춘다.) 어, 4봉지요.
T1BL104	왜 4봉지가 됐어?
S1BL104	처음에는 2개씩해서 10개가 되서 다시 손가락으로 해봤더니 4봉지가 됐어요.

여기에서 B학생은 손가락을 2개씩 접어가면서 모두 8개의 손가락을 구부리며, 2개씩 몇 번 구부렸는지를 셈으로써(S1BL103), 손가락으로 세기 전략을 사용하였다.

(2) 구체물 분배하기

여기에서 구체물은 수막대나 바둑돌을 나타낸다.

이 전략은 유민아(2003)가 연구한 나누기 상황에 따른 유아의 비형식적 나누기 능력 및 전략에서 유아들이 가장 많이 사용한 기초적인 전략으로, 나누기 상황에서 가장 쉽게 적용할 수 있다.

하지만 본 연구에서는 1학년 학생 중 한명의 학생에게서만 발견할 수 있었고, 연구자가 제시한 문제 유형 중 문제 수준이 가장 높은 큰 수의 나눗셈에서 받아올림이 있는 경우의 문제에 적용되었다.

본 연구에서 말하는 구체물 분배하기 전략이란 수막대와 바둑돌을 함께 사용하여 분배한 경우이다. 예를 들어, 1학년 A학생은 '색종이 52장을 4사람에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 장씩 나누어 줄 수 있습니까?' 라는 문제를 다음과 같이 해결하였다.

S1AR605	(십모형 4개를 하나씩 따로 벌려 놓고, 바둑돌을 2개씩 그 위에 각각 놓은 후 하나씩 더 놓는다.) 어, 된다. 13개씩 나누면 되요.
T1AR606	13개씩? 어떻게?
S1AR606	50을 갖다가요 10, 20, 30, 40으로 나눈 다음에요, 10개를 만든 다음에 12개 남은 것을 3개씩 주면 되요.

여기에서 1학년 A학생은 주어진 문제를 해결하기 위해서 십모형 4개를 각각 따로 벌려

놓은 후, 바둑돌 12개를 각각의 십모형 위에 3개씩 분배하였다(S1AR605).

(3) 구체물 묶어세기

이 전략은 피제수만큼 바둑돌을 꺼내놓고 제수로 묶음을 만든 후, 묶음의 개수를 세는 것이다. 예를 들어, 1학년 C학생은 '17÷3' 에 관한 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

T1CL301 케익 1개를 만드는데 3개의 계란이 필요한거야. 그러면 내가 계란 17개를 가지고 있다면 케익을 몇 개 만들 수 있을까?
S1CL301 (바둑돌 17개를 꺼내서 3개씩 5묶음을 만든다.) 5개.
T1CL302 5개. 어떻게?
S1CL302 왜냐하면, 17은 짝수가 아니라 홀수잖아요, 근데 나눠보니까 하나가 부족해요.
T1CL303 나눠보니까 하나가 부족해.
S1CL303 열여덟은요, 6개를 만들 수 있어요.

여기에서 1학년 C학생은 '17÷3' 를 해결하기 위해 바둑돌을 3개씩 5묶음을 만들어 해를 구하였다(S1CL301). 또 다른 예로, 1학년 B학생은 '55÷5' 라는 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

T1BL401 이번에는 55쪽이 되는 동화책이 있어. 이것을 하루에 5쪽씩 매일매일 읽었어. 그러면 이 책을 읽는데 며칠이 걸릴까?
S1BL401 (바둑돌을 한 개씩 꺼내서 10개씩 5줄을 만들고 5개를 밑에 놓고 난 후, 바둑돌을 5개씩 묶는다.) 11일요.
T1BL402 어떻게 11일이 나왔어?
S1BL402 (바둑돌을 가리키며)여기에서 5개씩 5개씩 나누어서.

여기에서 1학년 B학생은 '55÷5' 를 해결하기 위하여 바둑돌을 10개씩 1줄로 5줄을 만들고 남은 바둑돌 5개를 그 밑에 정렬한 후, 제수 '5' 만큼 바둑돌을 묶어서 답을 구했다(SIBL401).

(4) 수막대를 손으로 짚어가면서 묶어세기

이 전략은 다시 두 가지 방법으로 나누어 살펴볼 수 있는데, 첫 번째 방법은 피제수만큼 수막대를 꺼낸 후, 수막대 위를 손으로 제수만큼 묶어서 짚어가며 세는 것이다.

이 전략을 선택해서 해결한 문제 유형을 살펴보면, 학생들은 10 이상의 수를 나누거나 큰 수의 나눗셈 상황에서 사용하였음을 알 수 있다. 예를 들어, 1학년 B학생은 나머지가 있는 경우에 나머지를 버리고 몫을 구하는 '17÷3' 에 관한 문제를 다음과 같이 해결하였다.

T1BL301 케익 1개를 만드는데 3개의 계란이 필요한거야. 그러면 내가 계란 17개를 가지고 있다면 케익을 몇 개 만들 수 있을까?
S1BL301 (십모형 1개와 낱개모형 7개를 꺼내서 낱개모형을 한 줄로 세운 후, 3개씩 묶어서 손으로 짚어본다.) 5개요.

T1BL302	5개. 어떻게?
S1BL302	3개씩 3개씩 케잌이 만들어진다고 했잖아요. 그래서 (수모형을 가리키며)이것을 3개씩 따져서 했어요.

여기에서 1학년 B학생은 수막대를 '17'에 해당하는 수만큼 꺼낸 후, 그 위를 3개씩 묶어서 손가락으로 짚어가며 답을 구하였다(S1BL301).

또 다른 방법은 큰 수의 나눗셈 문제에서 볼 수 있었는데, 수막대를 피제수만큼 꺼내 놓고 임의의 수를 추측한 후에 수막대 위를 손으로 짚어가면서 추측한 수의 정답 여부를 확인하는 것이다. 예를 들어, 2학년 A학생은 '색종이 52장을 4사람에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 장씩 나누어 줄 수 있습니까?' 라는 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 반응하였다.

S2AR603	(십모형 5개와 낱개모형 2개를 모아놓고, 수막대 위를 손으로 짚어가며 묶어 센다.) 13장이요.
T2AR604	어떻게?
S2AR604	제가요, 12장씩 나누어 줄라고 했는데요. 그렇게 해 봤더니요. 너무 수가 작은 거예요. 그래서 18을 하려고 했는데 너무 수가 큰 거 같아서요. 13으로 줄여 봤어요. 줄여서 나눠봤거든요? 13으로 나눠봤더니 맞았어요.

여기에서 2학년 A학생은 임의의 수를 추측하는 과정에서 '12'나 '18'과 같은 수로 추측하여 시행착오도 하였지만, '13'을 해봄으로써 조건에 맞는 답을 구하였다(S2AR603-S2AR604).

(5) 수막대 가르기

이 전략은 큰 수의 나눗셈에서 0이 있는 수의 나눗셈 문제인 '60÷3'과 '80÷4'와 같은 문제에서 사용된 것으로 십모형을 피제수만큼 놓고 임의의 개수를 추측하여 묶음이 제수가 되도록 가르는 것이다. 예를 들어, 1학년 C학생은 '80÷4'에 관한 문제를 다음과 같이 해결하였다.

T1CL501	친구들과 빈병 80개를 열심히 모았어. 4개의 상자에 담으려면, 한 개의 상자에 몇 개의 빈병을 넣으면 될까?
S1CL501	(십모형 8개를 꺼낸다.) 80 나누기 4는… (십모형 8개를 모았다가 2개씩 나눈다.) 각 상자에 20개씩.
T1CL502	각 상자에 20개씩. 어떻게?
S1CL502	(십모형 8개를 모았다가 4개씩 두 묶음으로 나누고 다시 각 묶음을 2개씩 나눈다.) 여기 이렇게 하고, 여기 이렇게 하면 4인데, 이렇게요.

여기에서 1학년 C학생은 피제수 '80'에 해당하는 십모형 8개를 꺼내놓고 생각하더니, 십모형 8개를 각각 2개씩 4묶음으로 가르기를 하였다(S1CL501).

이 전략을 사용한 학생들은 큰 수의 나눗셈일지라도 피제수에서 10을 십모형 1개로 생각하고 제수만큼 나눌 수 있을 때, 직관적으로 수막대를 보고 나눔으로써 수막대 가르기 전략을 사용하였다.

(6) 구체물을 묶어서 빼기

이 전략은 바둑돌이나 수막대를 피제수만큼 꺼내서 피제수에서 제수의 크기만큼 구체물의 개수를 빼면서 동시에 몇 번 뺐는가를 세어 답을 구하는 것이다. 예를 들어, 1학년 C학생은 '8÷2' 에 관한 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

T1CL101 사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어서 친구들에게 선물하고 싶어 그러면, 모두 몇 봉지의 선물을 만들 수 있을까?
S1CL101 (낱개모형 8개를 꺼내서 2개씩 묶어서 뺀다.) 4개요.
T1CL102 4개. 어떻게?
S1CL102 8개에서 2를 빼면 6개잖아요. 6개에서 2를 빼면 4개잖아요. 거기에서 2를 두 번 빼줘요.

여기에서 1학년 C학생은 낱개모형 8개를 꺼내서 제수 '2' 만큼 묶어서 낱개모형을 빼가며 몇 묶음이 되는지 세어 답을 구하였다(S1CL101).

이 전략이 구체물 묶어세기와 구분되는 점은 구체물 묶어세기는 피제수에서 제수만큼 묶음을 만들고 묶음의 개수를 세어 답을 구하는 것인 반면, 이 전략은 피제수에서 제수만큼 구체물의 개수를 빼는 동시에 몇 번 뺐는가를 세어 답을 구하는 것이다.

(7) 머릿속으로 묶어세기

이 전략은 앞의 전략 중 구체물 묶어세기의 발전된 형태로서, 학생이 직접 구체적 조작을 하지 않고 머릿속으로 피제수만큼 구체물의 개수를 생각하고 임의의 수를 추측하여 제수만큼 묶어서 답을 구하는 것이다. 예를 들어, 1학년 B학생은 '10÷5' 에 관한 문제를 제시했을 때 다음과 같은 반응을 보였다.

T1BL201 이번에 10개의 빵을 친구들과 나눠먹고 싶어. 이 빵을 5사람한테 똑같이 나눠주고 싶어. 그럼 한 접시에 몇 개씩 담으면 될까?
S1BL201 (생각한다.) 2개씩
T1BL202 어떻게 2개가 됐어?
S1BL202 접시에 2개씩 2개씩 나눠보면 10개가 되요.

여기에서 1학년 B학생은 머릿속으로 임의의 수 '2' 를 추측한 후 2개씩 5묶음으로 나눠보니 피제수 '10' 이 되었다는 것을 알고 답을 구하였다(SIBL201-S1BL202).

(8) 뛰어세기

이 전략은 두 가지 방법으로 나누어진다.

첫 번째 방법은 임의의 수를 추측하여 제수만큼 뛰어 센 후 피제수가 나오면 추측한 수를 답으로 하는 것이다. 예를 들어, 1학년 A학생이 '80÷4' 에 관한 문제를 다음과 같이 해결하였다.

T1AL501 친구들과 빈병 80개를 열심히 모았어. 4개의 상자에 담으려면, 한 상자에 몇 개의 빈병을 넣으면 될까?
S1AL501 (생각한다.) 20개요.
T1AL502 어떻게?
S1AL502 20, 40, 60, 80.

여기에서 1학년 A학생은 임의의 수 '20' 을 추측한 뒤 제수만큼 4번 뛰어 센 후 마지막 수가 피제수 즉, '80' 이 되자 추측한 수를 답이라고 생각하였다(S1AL502).

두 번째 방법은 제수만큼 뛰어 세다가 피제수가 나오면 뛰어세기를 멈추고 몇 번 뛰어 셌는가를 세어 답을 구하는 것이다. 예를 들어, 2학년 B학생은 '8÷2' 를 다음과 같이 해결하였다.

T2BL101	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어서 친구들에게 선물하고 싶어. 그러면, 모두 몇 봉지의 선물을 만들 수 있을까?
S2BL101	4봉지요.
T2BL102	어떻게?
S2BL102	8개를 만들려면 2개, 4개, 6개, 8개가 되니까 모두 4봉지가 되요.

여기에서 2학년 B학생은 제수인 '2' 로 뛰어세기를 해서 '8' 이 되자 멈춘 후, 몇 번 뛰어 셌는가를 세어 답을 구하였다(S2BL102).

위에 제시된 것처럼 뛰어세기 전략을 사용한 문제 유형을 살펴보면 간단한 수의 나눗셈이나 피제수가 10으로 나누어떨어지는 경우이다.

(9) 덧셈

이 전략은 임의의 수를 추측하여 제수의 크기만큼 더한 후, 그 결과값이 피제수와 같은지 확인하여 문제를 해결하는 것이다. 예를 들어, 2학년 B학생은 '54÷3' 에 관한 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

T2BR601	다리 수가 많은 3마리의 지네의 다리 수를 모두 세어봤더니 54개가 된거야. 그렇다면 한 마리의 지네의 다리 수는 몇 개일까?
S2BL601	(막대모양의 그림을 그린 후, 12를 세 번 쓰고, 다시 15를 세 번 쓴다.) 이거는 15개씩인 줄 알았는데… 한 마리에 15개씩.
T2BL602	15개씩. 왜?
S2BL602	15개씩하면은 답이 40개가 나오는데요. 15개를 3마리로 나누면, 45개가 나오는데 그 중에서 54개가 된다면 몇 개가 모자라는데, 이 문제는 잘 모르겠어요.
T2BL603	이 문제는 잘 모르겠어?
S2BL603	잠깐만요. (17을 세 번 쓰고 더해 보더니, 다시 18을 세 번 쓰고 더한다.) 18개씩.
T2BL604	18개씩? 왜?
S2BL604	18개씩 3마리를 더하면요 18개를 먼저 두 개를 더하면요 36이 나오는데 36에서 18개를 더하면 54가 나와요.
T2BL605	왜 18개를 더할 생각을 했어?
S2BL605	왜냐하면 처음엔 15개였는데 그 순간 45였으니까 조금만 더 더하면 54개가 나올 것 같았어요.

여기에서 2학년 B학생은 임의의 수를 추측하기 위한 시행착오 과정으로 '12' 와 '15' 를 각각 추측해 보고 각 수를 3번 더해서 피제수가 나오는가를 확인하여 답이 아님을 알았다. 그리고 문제를 포기하려고 하다가, 조금만 더 큰 수를 더하면 답을 구할 수 있다는 확신을 갖고 다시 '17' 를 더하는 시행착오를 거친 후, '18' 을 3번 더하여 더한 값이 피제수가 됨을 확인하여 답을 구하였다(S2BL602-S2BL605).

(10) 뺄셈

이 전략은 구체물을 묶어서 빼는 전략의 발전된 단계로써, 피제수에서 제수를 몇 번 뺐는가를 세어 답을 구하는 것이다. 예를 들어, 1학년 C학생은 문제 '1개의 샌드위치를 만드는 데 치즈 4조각을 넣습니다. 치즈 16조각으로 만들 수 있는 샌드위치는 모두 몇 개입니까?' 를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

S1CR101	('16−4−4' 를 적고 푼다.) 4개.
T1CR102	4개. 어떻게 그렇게 됐어?
S1CR102	16 빼기 4는 12이고요. 그러면 12가 되잖아요. 12에서 4를 빼면 8이고, 그럼 2개 만들어서 8에서 4 두 개를 뺐어요.

여기에서 1학년 C학생은 '16' 에서 '4' 를 계속 빼다가 더 이상 뺄 수 없을 때, 몇 번 뺐는가를 세어 문제를 해결함으로써(S1CR101), 나눗셈이 뺄셈 전략으로 해결이 가능하다는 것을 전형적으로 보여주었다.

(11) 곱셈

이 전략은 나눗셈의 몫이 10미만인 경우에 사용된 것으로 곱셈 구구의 범위 내에서 사용되었다. 또한 곱셈 전략을 두 가지 관점에서 살펴볼 수 있는데, 첫 번째 방법은 제수로 곱셈 구구를 외우기 시작해서 피제수가 결과값으로 나올 때까지 외운 후 답을 찾는 것이다. 예를 들어, 1학년 A학생이 '8÷2' 에 관한 문제를 다음과 같이 해결하였다.

T1AL101	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어서 친구들에게 선물하고 싶어. 그러면, 모두 몇 봉지의 선물을 만들 수 있을까?
S1AL101	사탕 8개를 반으로 해서요?
T1AL102	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 담아서 놓으려고 해. 그럼 총 몇 봉지가 나와?
S1AL102	5개요.
T1AL103	5봉지. 어떻게?
S1AL103	이일은 이, 이이는 사, 이삼육, 이사팔, 이오십
T1AL104	그래서 사탕 10개를 5봉지에 넣었어?
S1AL104	예?
T1AL105	이오십해서 5봉지야?
S1AL105	사탕 몇 개예요?
T1AL106	8개.
S1AL106	아, 4봉지다.
T1AL107	왜?
S1AL107	8개가 있으니까요. 10개로 착각했어요.
T1AL108	아, 10개로 착각했어. 그래서 4봉지야. 곱셈을 외웠구나.

여기에서 1학년 A학생은 곱한 값이 '8' 이 나올 때까지 2단을 외운 뒤 답을 찾았다(S1AL103).

두 번째 방법은 나눗셈에 관한 문제를 미지수가 있는 곱셈식으로 바꾸어 해결하는 것이

다. 예를 들어, 2학년 C학생은 '혜진이네 반 24명을 6팀으로 나누어 배구를 하면 한 팀은 몇 명이 될까?' 를 해결하기 위해 수행기록지에 '6×□=24' 를 쓰고 6단을 외워 □ 안에 들어갈 수를 생각하였다.

나. 혼합된 전략을 사용한 경우

(1) 뛰어 세면서 바둑돌 내려놓기

이 전략은 제수로 뛰어세기를 하며 뛰어 셀 때마다 바둑돌을 하나씩 내려놓다가, 뛰어 센 수가 피제수가 되면 뛰어세기를 멈추고 내려놓은 바둑돌의 개수를 세어 답을 구하는 것이다. 예를 들어, 1학년 A학생이 큰 수의 나눗셈에서 받아내림이 없는 경우의 포함제 문제인 '55÷5' 에서 이 전략을 다음과 같이 사용하였다.

T1AL401	자 이번에는 55쪽이 되는 동화책이 있어. 이것을 하루에 5쪽씩 매일매일 읽었어. 그러면 이 책을 읽는데 며칠이 걸릴까?
S1AL401	(바둑돌을 하나씩 내려놓는다.) 11일요.
T1AL402	어떻게?
S1AL402	있잖아요. 5단까지 다 외웠는데요, 5단이 헷갈려요. 그래서 5, 10, 15, 20 이러다가 5씩 하나씩 커지면서 바둑돌을 하나씩 놨어요.

여기에서 1학년 A학생은 문제에 제시된 피제수 '55' 를 큰 수로 느껴서 곱셈을 하려다가 전략을 바꾸어 5씩 뛰어세기를 하며 뛰어 셀 때마다 바둑돌을 한 개씩 내려놓고 '55' 까지 세었다. 그리고 내려놓은 바둑돌을 세어 답을 구함으로써(S1AL401-S1AL402), 뛰어 세면서 바둑돌 내려놓기 전략을 사용하였다.

(2) 곱셈과 덧셈의 혼용

이 전략은 문제 해결과정에서 곱셈을 사용하다가 어느 시점에서 덧셈을 이용하여 문제를 해결하는 것이다. 예를 들어, 1학년 A학생이 문제 '사과 42개를 한 봉지에 2개씩 담으려고 합니다. 모두 몇 봉지가 되겠습니까?' 를 다음과 같이 해결하였다.

S1AR401	(바둑돌을 집어서 2개씩 42개를 꺼내 놓고 생각한다.) 41개요.
T1AR402	다시 몇 개라고?
S1AR402	아, 21개.
T1AR403	21개야? 어떻게?
S1AR403	2곱하기 10은 20이니까요, 또 (바둑돌을 가리키며)여기 20개 남은 것을 갖다가요, 똑같이 해 가지고 20개 되고 나머지 2개 남을 걸로 또 해서 21개요.

여기에서 1학년 A학생은 바둑돌을 2개씩 집어서 꺼내 놓고 생각한 후에 10봉지를 만들려면 사과 20개가 필요하니까 '2×10=20' 이고 남은 사과 20개도 같은 방법으로 계산해서 합하면 20봉지가 되고, 또 남은 사과 2개가 1봉지가 되어 21봉지를 구하였다. 즉, 구체물을 꺼내어 생각한 후에, 수 42를 20+20+2로 가른 후, 곱셈을 이용하여 20개가 10봉지가 됨을 확인하고 다시 봉지 수를 합하는 전략이다(S1AR401-S1AR403). 또 다

른 예로 2학년 B학생이 '55÷5' 에 관한 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 반응을 보였다.

T2BR401	자 이번에는 55쪽이 되는 동화책이 있어. 하루에 5쪽씩 매일매일 읽으면 이 책을 다 읽는데 며칠이 걸릴까?
S2BL401	음, 11일이요.
T2BL402	어떻게?
S2BL402	'5×9=45' 는 9일에 45쪽을 읽는다는 말이니까 10일 걸리면 50쪽, 11일이 걸리면 55쪽이요.

여기에서 2학년 B학생은 이 문제를 5단의 기본적인 곱셈구구로는 해결할 수 없으므로 '5×9=45' 까지 외운 후, 5쪽씩 더해서 55쪽이 되게 하여 9일에 2일을 더해서 답을 구하였다(S2BL402).

(3) 곱셈과 뛰어세기의 혼용

이 전략은 앞에 제시한 곱셈 전략 중 임의의 수를 추측하여 곱셈으로 확인한 후, 그 수로 제수만큼 뛰어세기를 통해 답을 구하는 것이다.

예를 들어, 2학년 B학생은 '80÷4' 에 관한 문제를 다음과 같이 해결하였다.

T2BR501	친구들과 빈병 80개를 열심히 모았어. 4개의 상자에 담으려면, 한 상자에 몇 개의 빈병을 넣으면 될까?
S2BL501	몇 개씩 들어 가냐구요?
T2BL502	응.
S2BL502	20개씩이요.
T2BL503	왜?
S2BL503	4상자에 몇 개가 들어가냐고 물었으니까 이 상자에서 나누면은 '2×4=8' 이 되는데 그 중에서 십의 자리수니까 20, 40, 60, 80이 되니까 20개가 들어가요.

여기에서 2학년 B학생은 임의의 수 '2' 를 추측하여 '2×4=8' 이 된다는 것을 확인한 후, 임의의 수 '20' 으로 제수만큼 4번 뛰어세어 답을 구함으로써(S2BL503), 곱셈과 뛰어세기의 혼용 전략을 사용하였다.

이와 같이 혼합된 전략을 사용한 경우는 큰 수의 나눗셈 문제 유형에서 관찰할 수 있었는데, 나눗셈에 관한 형식적 지식을 습득하지 않은 1, 2학년 학생들이 단순히 구체물을 가지고 해결하기에는 혼란이 있는 문제를 두 전략을 혼용하여 사용함으로써, 문제를 해결하는 데 다양한 비형식적 지식이 가능하다는 것을 보여주었다.

2. 형식적 지식을 학습한 학생과 그렇지 않은 학생의 전략 비교 및 분석

가. 전략의 분류

학년별로 사용된 문제해결 전략을 성공적으로 수행한 응답을 대상으로 분류하면 다음 [표 3]과 같다.

[표 3] 학년별 나눗셈 전략 비교

유 형	나눗셈 전략	1학년	2학년	3학년
한 가지 전략	손가락으로 세기	○		
	구체물 분배하기	○	○	
	구체물 묶어세기	○	○	○
	수막대를 손으로 짚어가면서 묶어세기	○	○	
	수막대 가르기	○	○	
	구체물을 묶어서 빼기	○	○	
	머릿속으로 묶어세기	○		
	뛰어세기	○	○	
	덧셈	○	○	
	뺄셈	○		○
	곱셈	○	○	○
	나눗셈			○
혼합된 전략	뛰어 세면서 바둑돌 내려놓기	○		
	곱셈과 덧셈의 혼용	○	○	
	곱셈과 뛰어세기의 혼용		○	

[표 3]에서 알 수 있듯이 1학년 학생이 가장 많은 13가지 전략을 사용하였고, 다음은 2학년 학생이 10가지 전략으로 다양한 비형식적 지식을 이용하여 문제를 해결한 반면에 3학년 학생은 주로 나눗셈에 관한 알고리즘을 사용하였고 모두 4가지 전략을 사용하는 데 그쳤다.

또한, 1, 2학년 학생은 어느 한 가지 전략에 치중하지 않고 골고루 사용하였는데, 3학년 학생은 대부분 나눗셈에 관한 세로셈 알고리즘에 치중하여 문제를 해결하였다.

나. 학년별 전략의 차이 분석

형식적 지식을 습득한 학생은 형식적 지식에 문제 해결 방법이 한정되어 있어 그 지식을 제대로 습득하지 못한 경우 문제를 포기하거나 잘못된 답을 구한다.

같은 문제가 주어졌을 때, 1, 2학년 학생은 다양한 비형식적 지식을 활용하여 문제를 해결하였다. 하지만, 3학년 학생은 대부분 나눗셈에 관한 알고리즘으로 문제를 해결하였고 세로셈 알고리즘을 풀지 못할 경우 문제를 해결하지 못하였다.

예를 들어, 큰 수의 나눗셈 중 받아올림이 있는 경우에 해당하는 '54÷3' 에 관한 문제를 3학년 A학생은 세로셈 알고리즘을 세워서 풀다가 해결하지 못하였고, 3학년 B학생은 구체물을 세어서 해결하려다가 실수하였다. 하지만, 1학년 A학생은 바둑돌과 수막대를 꺼낸 후, 십모형 3개를 하나씩 따로 벌려 놓고, 나머지 24개의 바둑돌을 십모형 위에 반복적으로 2개씩 분배함으로써, 구체물 분배하기 전략으로 문제를 해결하였다. 2학년 A학생은 십모형 5개와 낱개모형 4개를 꺼낸 후, 임의의 수를 추측하여 시행착오를 반복하며 수막대를 손으로 짚어서 묶어세어 보다가 답을 구함으로써, 수막대를 손으로 짚어가면서

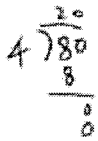
묶어세기 전략으로 문제를 해결하였다.

이렇게 1, 2학년 학생은 문제 상황을 듣고, 자신의 비형식적 지식을 이용하여 문제를 해결하였다.

형식적 지식을 습득한 학생은 비형식적 지식을 가지고 있음에도 불구하고 문제 해결의 경제성을 생각하지 않고 형식적 지식에 치중하여 문제를 해결한다.

형식적 지식을 습득한 3학년 학생은 비형식적 지식으로 간단히 해결할 수 있는 문제도 굳이 나눗셈에 관한 알고리즘을 세워 해결하다가 오히려 시간이 더 오래 걸리거나 계산 과정에서 실수를 하였다.

예를 들어, 1학년 B학생과 3학년 C학생이 '80÷4' 에 관한 문제를 해결한 전략을 비교해 보자. 1학년 B학생은 피제수 '80' 에서 자리값 '0' 을 빼고 간단하게 '8' 은 '2' 를 4번 더하면 된다는 것을 생각한 후, '2' 에 자리값 0을 더해서 머릿셈으로 문제를 해결하였다. 반면, 3학년 C학생은 다음 <그림 1>과 같이 수행기록지에 나눗셈에 관한 세로셈 알고리즘 식을 쓰고 풀어서 해결하였다.



< 그림 1 > '80÷4'의 알고리즘

여기에서 3학년 C학생은 1학년 B학생이 간단한 머릿셈으로 해결한 문제를 식을 쓰는 과정을 거쳐 문제를 해결함으로써, 문제를 해결하는데 더 많은 시간을 소비하였다.

1, 2학년 학생은 문제가 주어지면 잠시 생각한 후에 문제를 해결하지만, 3학년 학생은 바로 식을 세워 해결한다.

1, 2학년 학생은 나눗셈을 배우지 않았더라도 문제가 주어지면 문제 상황을 생각한 후, 다양한 방법으로 해결하려고 시도하고 처음 시도한 방법으로 해결하지 못할 경우 다른 방법으로 해결하려고 노력하였다.

예를 들어, 2학년 C학생은 '17÷3' 에 관한 문제를 해결하기 위해 수모형을 가지고 묶어세어 보다가, 풀이 방법에 대해 다시 묻자, 곱셈으로 자신이 구한 답을 검토하였다.

하지만, 3학년 학생은 나눗셈에 관한 알고리즘을 정확하게 습득하지 못한 경우 문제를 포기하고 다른 방법을 생각하지 못하였다. 또한 문제 상황을 이해하려고 하기 보다는 문제에 제시된 두 수를 무조건 곱하거나 나눠서 해결하려고만 하였다.

예를 들어, 3학년 B학생은 '80÷4' 에 관한 문제를 해결하기 위해 문제를 듣자마자 '80' 과 '4' 를 적은 후, 두 수를 곱하였다. 그래서 연구자가 학생이 말한 대답에 대해 의아하게 묻자, 적은 식을 지우고 나눗셈에 관한 세로셈 알고리즘을 세워 나눗셈을 시도하였다. 하지만 B학생은 나눗셈에 관한 세로셈 알고리즘은 바르게 나타냈으나 풀지는 못했다. 즉, 3학년 B학생은 형식적 지식에만 치중하여 이 지식을 사용하는 것 외에 다른 방법을 활용하지 못하였다.

V. 결 론

이상에서의 분석과 논의를 바탕으로 하여 다음과 같이 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 자연수의 나눗셈에 관한 초등학생의 비형식적 지식은 구체물에 의한 전략에서부터 사칙연산에 이르기까지 다양하다. 나눗셈 문제를 해결하기 위해 보여준 전략은 ① 손가락으로 세기, ② 구체물 분배하기, ③ 구체물 묶어세기, ④ 수막대를 손으로 짚어가면서 묶어세기, ⑤ 수막대 가르기, ⑥ 구체물을 묶어서 빼기, ⑦ 머리 속으로 묶어세기, ⑧ 뛰어세기, ⑨ 덧셈, ⑩ 뺄셈, ⑪ 곱셈 등이다. 또한 이 전략들을 혼합한 ① 뛰어 세면서 바둑돌 내려놓기, ② 곱셈과 덧셈의 혼용, ③ 곱셈과 뛰어세기의 혼용 등이 있다.

일반적으로 나눗셈을 구체물을 이용하여 해결하기 위한 전략으로 구체물 분배하기를 생각할 수 있으나, 손가락으로 세기, 수막대를 손으로 짚어가면서 묶어세기, 뛰어세기 그리고 뛰어세면서 바둑돌 내려 놓기 등 다양한 비형식적 지식을 활용하는 행동 특성을 볼 수 있었다. 또한, 동수누감이나 곱셈의 역연산으로 나타낼 수 있는 나눗셈을 덧셈을 사용하여 해결하는 학생들의 비형식적 지식은 나눗셈 개념 지도에 참고할 필요가 있다.

둘째, 형식적 지식을 학습한 학생은 형식적 지식에 문제 해결방법이 한정되어 있어 다양한 전략을 사용하지 못한다. 형식적 지식을 학습한 3학년 학생은 대부분 나눗셈 알고리즘에 치중하여 문제를 해결하였고, 그 외에 문제 해결 전략으로 구체물 묶어세기, 뺄셈, 곱셈의 모두 4가지 전략을 사용하는데 그쳤다. 하지만 1, 2학년 학생들은 형식적 지식인 나눗셈을 제외한 3학년 학생의 문제 해결 전략을 모두 사용하였고, 그 외에도 9가지 전략을 더 사용하였다. 3학년 학생은 형식적 지식 즉, 나눗셈 알고리즘을 제대로 습득하지 못한 경우 문제를 포기하거나 잘못된 답을 구하였다. 그리고 이러한 학생에게 구체물을 이용한 다른 방법을 권하였을 때, 이를 효율적으로 사용하지 못하였다. 1, 2학년 학생이 비형식적 지식을 이용하여 해결한 문제도 나눗셈 알고리즘을 제대로 습득하지 못한 학생은 문제를 해결하지 못하거나 틀린 답을 하는 것을 볼 수 있었다.

또한, 1, 2학년 학생은 문제가 주어지면 잠시 생각을 한 후에 문제를 해결하였지만, 3학년 학생의 경우 대부분 바로 식을 세워 해결하였다. 이는 문제 상황을 이해하고 문제에 알맞은 해결 방법을 찾으려고 하기 보다는 핵심 단어나 자신이 습득한 알고리즘에 의존하는 것으로 형식적 지식에 사고가 한정되어진 것이다.

셋째, 나눗셈 지도가 전혀 이루어지지 않은 1, 2학년 학생이 스스로 비형식적 지식을 사용하여 문제를 해결할 수 있다는 것은 알고리즘의 습득이 문제 해결의 전제 조건이 아니라는 것을 보여 준다. 본 연구를 통해 1, 2학년 학생은 다양한 비형식적 지식을 사용하여 문제를 해결하는 모습을 볼 수 있었다. 기본적인 나눗셈부터 큰 수의 나눗셈에 이르기까지 구체물이나 뛰어세기, 나눗셈 외의 다양한 연산을 활용하여 문제를 해결하였다.

즉, 수학 교육에서 형식화된 알고리즘의 단순한 적용이나 계산 기술 습득 자체만을 강조하기 보다는 학생이 가지고 있는 해결 전략을 효과적으로 활용하고 발달시킬 수 있도록 도와주어야 한다. 이러한 방식의 지도가 이루어졌을 때 학생은 연산을 의미 있게 습득할 수 있다.

넷째, 수학적 지식을 가르칠 때, 비형식적 지식과 연계하여 형식적 지식을 가르칠 필요가 있다. 즉, 나눗셈의 내용 지도에 있어서 나눗셈 알고리즘을 지도하기 전에 선수 학습으로 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식을 활용하는 것이다. 학생들에게 나눗셈 문제 상

황을 제시하고, 먼저 학생들이 가진 비형식적 지식을 이용하여 다양한 전략으로 문제를 해결하는 기회를 갖도록 한다. 그런 다음 문제 해결을 위해 구체적 조작활동이나 다른 연산을 활용한 학습을 충분하게 한 후에 나눗셈 개념과 알고리즘을 제시한다. 그렇다면 1, 2학년 학생보다 인지가 발달한 3학년 학생이 나눗셈 알고리즘에만 치중하여 문제를 해결하지 못하는 상황이 나타나진 않을 것이다. 오히려 3학년 학생이 학습한 내용을 바탕으로 더욱 창의적으로 문제를 해결할 수 있을 것이다.

다섯째, 수학과의 연산 영역에서도 알고리즘에 치중한 지도가 아닌, 다양한 전략의 지도가 필요하다. 연산 영역을 효과적으로 지도하기 위한 것이 마치 알고리즘을 어떻게 하면 효과적으로 가르칠 수 있는가에 초점이 맞춰진 경향이 있다. 하지만, 제7차 수학과 교육과정에도 명시되어 있듯이 수학과의 주요 목표는 '수학적 힘' 의 신장이다. 이는 단순히 알고리즘을 습득하여 문제를 효과적으로 빠른 시간 안에 해결하는 것이 아니라, 실생활에서 수학적 지식을 얼마나 활용하여 문제를 해결할 수 있느냐와 관련된 '문제해결력의 신장' 이라고 할 수 있다. 따라서 수학적 문제 상황에서도 알고리즘만을 사용한 문제 해결이 아닌 다양한 지식을 활용하여 학생들이 직접 문제를 해결할 수 있도록 지도해야 한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (1997). **수학과 교육과정: 제7차 교육과정.** 교육부고시 제1997-15호. 서울: 대한교과서 주식회사.

김민정 (2004). **자연수 나눗셈 오류 유형 진단 및 교정.** 경인교육대학교 석사학위논문.

김원경, 백선수 (2002). 인지적으로 안내된 교수(CGI)에 대한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈E, 14,** 27-41.

김진호 (2002). 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. **학교수학 4**(4), 555-563.

남승인 외 12인 공저 (1999). **구성주의 교육학.** 교육과학사.

류순선 (1996). **국민학교 저학년 학생의 곱셈·나눗셈의 사용 전략 분석.** 한국교원대학교 석사학위논문.

배종수 (1999). **초등수학교육 내용지도법-제7차 교육과정을 중심으로.** 서울: 경문사.

백선수 (2004). **비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발.** 한국교원대학교 박사학위논문.

유민아 (2003). **나누기 상황에 따른 유아의 비형식적 나누기 능력 및 전략.** 건국대학교 석사학위논문.

이진영 (1997). **초등학교 아동의 나눗셈 전략 분석.** 이화여자대학교 석사학위논문.

Baek, J. M. (2005). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 242-247.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking.* New York: Columbia University.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.* Boston: Allyn and Bacon.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Mather, C. A. & Alston, A. (1990). *Teacher development in mathematics in a constructivist framework.* JRME Monograph Number 4, 147-165.

National Council of Teachers Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Steffe, L. & Wiegel, H. (1992). On reforming practice in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 445-465.

Thomas, P. C., Elezabeth, F., Megan, L. F., Linda, L., & Susan, B. E. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Reston, VA: Author.

<부록> 면담문항

문제 유형 \ 제시 방법				문제 카드
기본적인 나눗셈	나머지가 없는 경우	포함제	1학년	1개의 샌드위치를 만드는데 치즈 4조각을 넣습니다. 치즈 16 조각으로 만들 수 있는 샌드위치는 모두 몇 개입니까?
			2학년	체육 시간에 21명의 학생이 3명씩 한 모둠이 되어 공놀이를 하려고 합니다. 모두 몇 모둠을 만들면 됩니까?
			3학년	체육 시간에 21명의 학생이 3명씩 한 모둠이 되어 공놀이를 하려고 합니다. 모두 몇 모둠을 만들면 됩니까?
		등분제	1학년	혜진이네 반 24명을 6팀으로 똑같이 나누어 배구 경기를 하려고 합니다. 한 팀은 몇 명이 됩니까?
			2학년	기린의 키는 18피트입니다. 기린은 캥거루보다 3배 더 큽니다. 캥거루의 키는 얼마입니까?
			3학년	기린의 키는 18피트입니다. 기린은 캥거루보다 3배 더 큽니다. 캥거루의 키는 얼마입니까?
	나머지가 있는 경우			20명이 영화를 보러갑니다. 각 자동차에 6명씩 탈 수 있습니다. 20명이 모두 타려면 몇 대의 차가 필요합니까?
큰 수의 나눗셈	받아내림이 없는 경우	포함제		사과 42개를 한 봉지에 2개씩 담으려고 합니다. 모두 몇 봉지가 됩니까?
		등분제		세 반에서 풀 60개를 똑같이 나누어 쓰려고 합니다. 한 반에서 쓸 수 있는 풀은 몇 개입니까?
	받아내림이 있는 경우			색종이 52장을 4사람에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 장씩 나누어 줄 수 있습니까?

문제 유형 \ 제시 방법				구 두
기본적인 나눗셈	나머지가 없는 경우	포함제	1학년	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어 선물하려고 합니다. 모두 몇 봉지를 만들 수 있습니까?
			2학년	사탕 8개를 한 봉지에 2개씩 넣어 선물하려고 합니다. 모두 몇 봉지를 만들 수 있습니까?
			3학년	피자 한 조각은 4달러입니다. 28달러로 몇 개의 피자 조각을 살 수 있습니까?
		등분제	1학년	10개의 빵을 친구들과 나누어 먹으려고 접시에 담고 있다. 5사람이 똑같이 나누어 먹으려면 한 접시에 몇 개씩 담으면 됩니까?
			2학년	혜진이네 반 24명을 6팀으로 똑같이 나누어 배구 경기를 하려고 합니다. 한 팀은 몇 명이 됩니까?
			3학년	사과 36개를 6개의 상자에 똑같이 담으려고 합니다. 상자 한 개에는 사과를 몇 개씩 담아야 합니까?
	나머지가 있는 경우			케익 1개를 만드는데 3개의 계란이 필요합니다. 계란 17개로는 케익 몇 개를 만들 수 있습니까?
큰 수의 나눗셈	받아내림이 없는 경우	포함제		55쪽 되는 동화책을 하루에 5쪽씩 매일 읽었습니다. 모두 읽는데 며칠 걸렸습니까?
		등분제		친구들과 빈병 80개를 모았습니다. 4개의 상자에 모두 똑같이 담으려면, 한 개의 상자에 몇 개의 빈병을 넣으면 됩니까?
	받아내림이 있는 경우			3마리의 지네의 다리 수는 모두 54개입니다. 한 마리의 지네의 다리 수는 몇 개입니까?

<Abstract>

Students' Informal Knowledge of Division in Elementary School Mathematics

Park, Hyoun Mi[3]; & Kang, Wan[4]

For teaching division more effectively, it is necessary to know students' informal knowledge before they learned formal knowledge about division. The purpose of this study is to research students' informal knowledge of division and to analyze meaningful suggestions to link formal knowledge of division in elementary school mathematics.

According to this purpose, two research questions were set up as follows:

(1) What is the students' informal knowledge before they learned formal knowledge about division in elementary school mathematics?

(2) What is the difference of thinking strategies between students who have learned formal knowledge and students who have not learned formal knowledge?

The conclusions are as follows:

First, informal knowledge of division of natural numbers used by grade 1 and 2 varies from using concrete materials to formal operations.

Second, students learning formal knowledge do not use so various strategies because of limited problem solving methods by formal knowledge.

Third, acquisition of algorithm is not a prior condition for solving problems.

Fourth, it is necessary that formal knowledge is connected to informal knowledge when teaching mathematics.

Fifth, it is necessary to teach not only algorithms but also various strategies in the area of number and operation.

Keywords: Students' Informal Knowledge, Division, Elementary School Mathematics

3) mathmi@lycos.co.kr
4) wkang@snue.ac.kr