한국초등수학교육학회지 10(2), 127-150. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 10(2), 127-150.

# 인지적으로 안내된 교수(CGI)의 원리를 적용한 수학 수업 연구

최 지 은[1] · 신 항 균[2]

본 연구는 CGI의 원리를 우리나라 초등학교 교실 수학 수업에 적용해 보고, 학습자의 사고와 행동 특성, 교사가 느끼는 긍정적인 점과 어려운 점을 분석하였다. 연구를 위해 3학년 한 학급 학생들을 대상으로 수업을 한 결과, 첫째, CGI의 원리를 적용한 수학 수업은 학생들에게 자신이 알고 있는 수학적 지식에 대하여 의사소통할 기회를 제공해 주며, 둘째, 학생들이 수학적으로 사고할 수 있게 하고, 셋째, 이런 수업을 위해 교사는 알맞은 분위기를 만들어 주어야 한다는 결론을 내릴 수 있었다.

[주제어] 인지적으로 안내된 교수(CGI), 수학 수업, 수학적 지식, 의사소통

## I. 서 론

### 1. 연구의 필요성 및 목적

어린이들은 학교에 입학하기 전부터 수세기나 연산의 경험을 하게 되며 또 이런 다양한 비형식적 지식을 갖고 있는 상태에서 수업에 임하게 된다(김진호 2002). 이와 관련하여 미국수학교사회(National Council of Teachers of Mathematics)는 '학교 수학의 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)' 에서 다음과 같이 주장하였다(박만구 2003).

- 모든 나이의 학생들은 수학 교실에 오기 전에 그를 바탕으로 구성이 가능한 상당한 정도의 지식을 가지고 있다.
- 어린이들은 학교에 들어오기 이전에 적어도 그들이 사물을 직관적으로 보기 시작할 때 이미 많은 수학적 개념을 발전시킨다. 유아들은 작은 수의 사물들을 자발적으로 인식하고 구별하며, 취학 전 많은 어린이들은 비형식적인 수학 지식을 상당히 소유하고 있다.

위의 주장에서와 같이 어린이들의 수학적 지식에 대한 개념 형성은 나름대로의 근거를 지니고 있는 것이며, 이는 학교에서 지도하고 있는 기초적인 수학적 개념과 절차들을 이해하면서 학습을 할 수 있는 토대를 제공해 줄 수 있는 자원으로 고려되어야 한다

---

1) [제1저자] 서울우이초등학교
2) 서울교육대학교 수학교육과

(Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson 1999). 그런데, 어린이들이 알고 있는 비형식적 지식은 학교에서 지도하는 수학적 개념이나 절차와는 일치하지 않을 수도 있다(김진호 2002). 그러므로 이러한 비형식적 지식과 형식적 지식의 결합이 이루어지기 위해서는 지속적인 몇 가지 연구가 진행되어야 하는데, 그 중 하나가 어린이들이 일상생활에서 비형식적 수학을 언제, 어떻게 사용하는지 관찰하는 것이다. '인지적으로 안내된 교수(Cognitively Guided Instruction; 이하 CGI)' 는 어린이들이 갖고 있는 이 비형식적인 전략들을 관찰하고 그 결과를 교사가 알게 함으로써 교사가 어린이들의 사고를 이해하고 어린이들이 개념을 구성하는 것을 도울 수 있도록 하는 교수 방법이다.

본 연구는 CGI의 원리를 초등학교 교실 수학 수업에 적용해 보고 학생들이 실제로 어떤 비형식적 지식이나 수학적 개념을 갖고 있으며 이를 어떻게 사용하는지 탐구해 보고자 한다. 또, 교사가 수업의 계획과 진행을 하는 단계에서 어떤 긍정적인 점과 어려움을 겪는지 분석해 보고, 이러한 수학 수업의 적용에 관한 시사점을 찾고자 한다.

### 2. 연구 문제

본 연구를 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

가. CGI의 원리를 적용한 수학 수업에서 학습자의 사고와 행동은 어떠한 특성을 보이는가?

나. CGI의 원리를 적용한 수학 수업에서 교사가 느끼는 긍정적인 점과 어려운 점은 무엇인가?

### 3. 연구의 제한점

가. 본 연구의 실험 대상은 연구자가 근무하는 서울시의 초등학교를 임의로 선정하였기 때문에 다른 지역의 학생에게 일반화하여 적용하기에는 한계가 있다.

나. 본 연구는 초등학교 3-나 단계의 수학 교육 내용을 소재로 하였기 때문에 전체 학년에서 나타나는 현상으로 일반화하기에는 한계가 있다.

다. 본 연구의 대상인 학습자는 3-가 단계까지의 사칙연산 알고리즘을 학습하였으므로 미국의 CGI에서 연구된 저학년 어린이들의 사고나 전략 수준과는 차이가 있다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 인지적으로 안내된 교수(Cognitively Guided Instruction)

인지적으로 안내된 교수(Cognitively Guided Instruction; CGI)는 위스콘신 대학 메디슨 캠퍼스(University of Wisconsin-Madison)의 교육대학에서 Carpenter, Fennema의 주도로 1985년부터 1996년까지 수행된 수학 교육 프로젝트이다.

이들의 연구에 의하면 어린이들은 학교에 입학하기 전부터 여러 가지 비형식적이고 직관적인 수학적 지식을 갖게 되고 이러한 지식은 초등학교 수학의 이해를 위한 기초가 되는데, 이는 곱셈구구처럼 경험이나 학습을 통해 학생들이 자연스럽게 알고 있는 지식인 '기본셈(Number facts)' 이나 알고리즘, 과정에 관한 형식적이거나 직접적인 교수법이 없이도 다양한 문제에 관한 다양한 해결책을 구성할 수 있게 한다. 또, 덧셈, 뺄셈, 곱셈,

나눗셈에 관한 문제의 구조는 어린이들의 문제 해결 방법에 영향을 줄 수 있으며 교사는 어린이들의 생각을 이해하기 위해서 이런 문제들 사이의 차이점을 고려해야 한다. 또, 교사는 어린이들의 수학적 사고에 관한 지식에 기초하여 교수 계획을 세워야 한다.

### 2. CGI의 원리를 적용한 수학 수업

CGI 수업을 하는 교실에서 학생들은 문제 해결을 통하여 수학을 배운다. 중요한 것은 교사가 문제 해결 전략을 명시하는 교수 방법을 사용하지 않는다는 것이다. 기능과 수는 문제 해결의 과정 속에서 가르쳐지고, 따라서 정보의 분리된 조각으로서 배우는 것이 아니라 이해를 통하여 배우게 된다.

CGI 교실의 공통적인 특징을 살펴보면 교사는 문제를 내고, 학생들에게는 문제를 해결할 시간이 주어지며 문제 해결에 대해 스스로 결정하게 된다. 그 동안 교사는 교실을 돌아다니며 질문을 하고, 학생들은 자신의 해결방법을 설명한다. 교사는 해결 방법이 명확해질 때까지 각 학생에게 질문을 하고 이러한 연속적인 과정이 반복된다.

CGI 교실에서 교사는 활동적이어야 한다. 계속적으로 각 학생들이 어떤 방식으로 생각하는지의 이해력을 업그레이드 시켜야 하고, 모든 학생들이 문제를 해결할 수 있고, 수학적 지식을 축적시킬 수 있는 활동을 선택해야 하고, 또 모든 학생들이 수학에 관련지어 그들의 생각을 이야기 할 수 있도록 해야 하고, 수학에 대해 좋은 감정을 느낄 수 있는 배움의 분위기를 조성해 주어야 한다.

## Ⅲ. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 대상

본 연구자가 담임을 맡고 있는 서울 강북구 W초등학교 3학년 1개 학급(남 20명, 여 18명) 학생들을 대상으로 한다. 연구 대상 학생들은 2-나 단계에서 곱셈구구를, 3-가 단계에서 (두 자리 수)×(한 자리 수)를 학습하였으며, 3월에 실시한 평가 결과 능숙함의 차이는 있지만 모든 학생이 2의 단에서 9의 단까지의 곱셈구구를 할 수 있었다.

### 2. 연구 절차

본 연구는 다음과 같은 절차로 이루어졌다.

· 2005. 6. ~ 8. 주제 선정을 위한 자료 수집, 문헌 연구, 연구 문제 선정
· 2005. 8. ~ 9. 연구 계획 수립, 예비 연구
· 2005. 10. ~ 2006. 2. 연구 실행(수업, 학습 결과물 수집)
· 2005. 10. ~ 2006. 5. 자료 수집, 분석 및 결과 정리

### 3. 연구 방법

본 연구의·연구 문제 해결을 위해 2005년 10월부터 2006년 2월까지의 총 68회의 수학 수업 중 10회의 수업과 방과 후 개인 지도 1회에 대한 자료를 수집하였다. 수업 과정 및 자료 수집, 분석 방법은 다음과 같다.

## 가. 수업 과정

### (1) 수업 전

계산에 활용할 수 있는 구체물[3]인 바둑돌, 수막대 등을 바구니에 담아 교실 책꽂이 위에 비치하고, 녹취를 할 캠코더는 교실 전면에 1대 설치, 교사가 상황에 따라 방향을 바꿀 수 있도록 한다. 교사는 수업 시간에 제시할 문제 상황을 2~3가지 준비하는데, 이 때 교과서에 나오는 문장제를 활용하도록 한다.

### (2) 수업

㈎ 학생들에게 프로젝션 TV나 칠판, 또는 학습지에 제시된 문제를 읽게 한다.

㈏ 문제가 이해된 학생은 스스로 문제를 푼다. 이 때 구체물을 이용하고 싶으면 이용하여 해결하도록 한다. 문제를 해결한 방법을 간단하게 공책에 기록하도록 한다. 교사는 교실을 순회하며 학생들이 어떻게 문제를 해결하는지 관찰하고 왜 그렇게 했는지 질문한다. 빨리 해결한 학생은 다른 방법을 생각해보게 한다.

㈐ 다른 학생들 앞에서 자신이 문제를 어떻게 해결했는지를 발표한다. 다른 학생의 발표를 듣고 자신이 문제를 해결한 방법과 비교하게 한다.

㈑ 두 번째 문제를 제시하고 다시 ㈎~㈐의 과정을 반복한다.

㈒ 문제의 특성에 따라 소그룹으로 문제를 해결하고 다른 사람에게 설명하는 방법을 쓸 수도 있다. 이때에도 ㈏, ㈐의 과정을 거친다.

### (3) 수업 후

㈎ 수업 시간에 쓴 관찰일지, 녹취한 테이프, 학습자가 제출한 공책을 통해 어떤 사고 과정을 거쳐 문제를 해결하는지, 학습자가 수업에서 어떠한 행동 특성을 보이는지 분석한다. 이를 바탕으로 다음 수업의 문제 유형, 난이도를 조정한다.

㈏ 공책에 기록한 내용을 보고 해결 과정이 모호한 것은 면담을 통해 물어본다.

## 나. 자료 수집

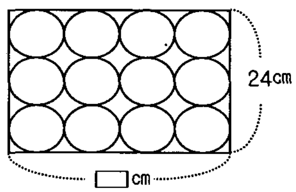
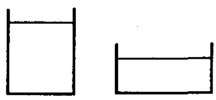
### (1) 문제

본 연구를 위하여 수학 3-나 단계의 교과서, 수학익힘책, 지도서 등을 참고하여 다음과 같이 문제를 제시하였다.

[표 1] 수업 시간에 제시한 문제 ①

| 순서 | 단원 | 주제 | 제시한 문제 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2. 곱셈 | (세 자리 수)×(한 자리 수),<br>(세 자리 수)×(몇십)의<br>문장제 해결하기 | 학생 289명이 우유를 매일 1개씩 마십니다.<br>① 일주일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까?<br>② 10일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까?<br>③ 30일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까? |

3) 학생들은 구체물을 거의 이용하지 않았는데, 그 이유는 연산에서 다루는 수가 크고 필산에 익숙하기 때문으로 생각된다.

| 순서 | 단원 | 주제 | 제시한 문제 |
|---|---|---|---|
| 2 | 2. 곱셈 | (몇십 몇)×(몇십 몇)의 문장제 해결하기 | ① 30주는 며칠입니까? ② 52주는 며칠입니까?<br>③ 하루에 자동차를 14대 만드는 공장이 있습니다. 이 공장에서 36일 동안 만들 수 있는 자동차는 모두 몇 대입니까? |
| 3 | | 곱셈을 활용하여 문제 해결하기 | ① 수학익힘책 32쪽 |
| 4 | 3. 도형 | 원 알아보기 | ① 수학익힘책 33쪽 |
| 5 | | 원의 지름을 이용하여 문제 해결하기 | ① 빈 칸에 알맞은 길이 구하기<br>  |
| 6 | 4. 나눗셈 | 몫이 10 이상인 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 계산 | 48 ÷ 4의 계산 |
| 7 | 5. 들이재기 | 들이 비교하기 | ① 크기가 다른 두 개의 수조에 물이 담겨 있습니다. 어느 쪽에 담긴 물의 양이 더 많은지 알아보려면 어떻게 해야 할까요?  |
| 8 | 8.문제 푸는방 법찾기 | 규칙성 찾기 | ① 마방진에서 규칙 찾기<br>② 한 줄의 합이 15인 마방진 만들기<br>③ 한 줄의 합이 30인 마방진 만들기 |

[표 2] 수업 시간에 제시한 문제 ②

| 순서 | 단원 | 주제 | 제시한 문제 |
|---|---|---|---|
| 9 | 8. 문제 푸는 방법 찾기 | 문제 해결 과정 설명하기 | ① 똘똘이의 옷장에 빨간 티셔츠, 노란 티셔츠, 파란 티셔츠가 있다. 또, 하얀 바지, 검정색 바지, 파란 바지, 갈색 바지도 있다. 똘똘이가 서로 다르게 옷을 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지일까요?<br>② 아이스크림 기계에서 바닐라, 딸기, 초코맛 아이스크림이 나옵니다. 아이스크림을 살 때 2가지 맛을 골라 먹을 수 있습니다. 고를 수 있는 방법은 몇 가지일까요? |
| 10 | | 문제 해결 과정 설명하기 | ① 구슬이 12개 있는데, 형과 동생이 나누어 가졌습니다. 형의 구슬이 2개 더 많다면 동생의 구슬은 몇 개입니까?<br>② 길이가 40㎝인 막대를 두 도막으로 잘랐습니다. 긴 도막과 짧은 도막의 길이를 대어 보았더니, 한 쪽이 다른 한 쪽보다 6㎝ 더 길었습니다. 긴 도막의 길이는 몇 ㎝입니까? |
| 11 | | 예상하고 확인하여 문제 해결하기 | ① 책을 펼쳐서 나온 두 쪽수를 곱했더니 552가 되었습니다. 몇 쪽을 펼쳤을까요?<br>② 책을 펼쳐서 나온 두 쪽수를 곱했더니 992가 되었습니다. 몇 쪽을 펼쳤을까요? |

(2) 수집한 자료

(가) 학생들의 학습지 : 학생들이 문제를 풀기 위해 기록한 종이나 공책

(나) 교사의 관찰일지 : 학생의 말이나 행동 등을 연구자가 기록한 것

(다) 녹취 테이프 : 수업의 과정을 녹취한 테이프

다. 분석 방법

(1) 특정한 현상에 대한 본질이나 기초적 구조를 탐구하는 것에 초점을 두는 현상학적 분석을 실시하였다. 따라서 수집한 자료를 통해 학생들이 어떤 사고를 하는지 있는 그대로 기술하여 연구자의 특정한 관점에서 왜곡되지 않도록 유의하였다.

(2) 녹취한 테이프는 프로토콜화 하였는데, 교사는 T, 학생 개인은 SA, SB, …, SZ, SA', SB', …와 같이 알파벳을 부여하고, 교사가 한 말은 $T_{*\triangle\triangle}$, 학생이 한 말은 $SA_{*\triangle\triangle}$, $SB_{*\triangle\triangle}$, …와 같이 코드화하였다. 또 연구 대상 학생들 중 많은 수가 거의 동시에 한 말은 $S_{*\triangle\triangle}$로 코드화했는데, 예를 들어, $T_{*\triangle\triangle}$은 *번째 비디오 자료에서 교사의 △△번째 말을 뜻하고, $SA_{*\triangle\triangle}$은 *번째 비디오 자료에서 A학생의 △△번째 말을, $S_{*\triangle\triangle}$는 *번째 비디오 자료에서 다수의 학생이 △△번째 한 말을 나타낸다.

(3) 녹취 테이프 및 관찰일지는 수업의 전반적인 진행 과정을 중심으로 녹화·기록하였으므로 학생들 간에 이루어진 모든 의사소통을 기록하는 데에는 한계가 있다.

(4) 문제 해결 방법에서 학생들이 사용한 전략은 어떤 것이 있었는지 정리하고 이를 교과서나 지도서에서 제시한 전략과 비교한다.

(5) 수학 수업에서 교사가 느끼는 긍정적인 점이나 어려운 점을 정리한다.

## Ⅳ. 자료 분석 및 논의

### 1. 자료 분석

본 장에서는 수집한 자료를 각 수업별로 분석하고 이를 토대로 논의하고자 한다.

가. 첫 번째 수업의 분석 : (세 자리 수)×(한 자리 수), (세 자리 수)×(몇십)의 문장제 해결하기

본 수업에서 연구자가 제시한 문제는 다음과 같다.

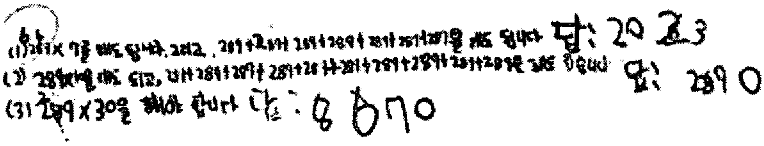
> 학생 289명이 우유를 매일 1개씩 마십니다.
> ① 일주일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까?
> ② 10일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까?
> ③ 30일 동안 학생들이 마시는 우유의 개수는 몇 개입니까?

학생들이 문제를 풀 때 사용한 방법을 본 결과 SV를 제외한 모든 학생들이 곱셈식을 만들었다. SV는 문제를 잘 이해하지 못하여 아무런 식도 만들지 못하였다. SS와 SA는 ①번 문제의 풀이를 다음과 같이 설명하였다.

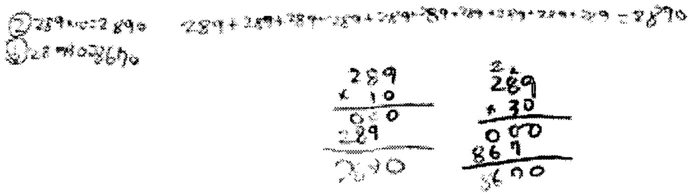
SS : 하루에 289명이 우유를 1개씩 먹으니깐 일주일은 7일이기 때문에 289×7을 하면 답이 2023이 나옵니다.

SA : 여러 가지 푸는 방법이 있는데, 제일 편한 것은 곱셈식이니까 289×7을 해요.

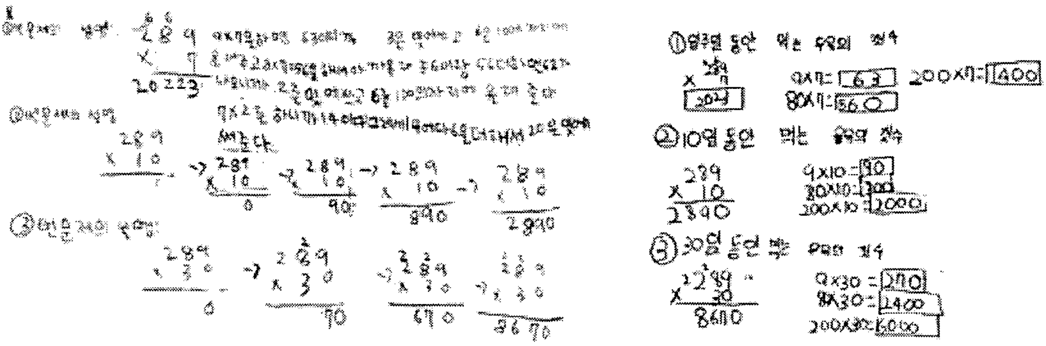
위의 설명과 같이 학생들은 문제 상황을 곱셈으로 나타내는 것이 당연하다고 생각하고 있었다. 289×7을 다음과 같이 덧셈식을 이용하여 쓴 학생도 있었지만 계산할 때는 곱셈구구를 이용하였다. SW의 풀이(1)을 보면 289 위에 받아올림한 숫자 6, 6이 쓰여 있는데, 곱셈구구를 이용하여 일의 자리부터 차례로 7과 곱했음을 알 수 있다.



<그림 1> SW의 풀이



<그림 2> SX의 풀이

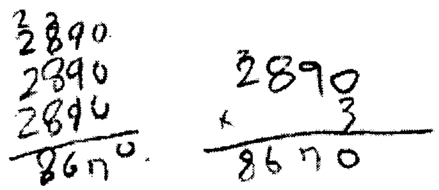


<그림 3> SA'(왼쪽)와 SN(오른쪽)의 풀이

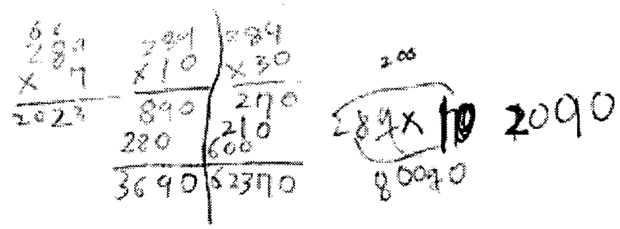
SX는 (두 자리 수)×(한 자리 수)의 곱셈에서 배웠던 곱셈 알고리즘대로 289를 0, 3과 일의 자리 수부터 차례로 곱해가며 풀었는데, 289와 0의 곱을 000으로 쓰고, 다음 줄에 289 곱하기 1, 289 곱하기 3의 결과를 써 놓았다.

SA'는 곱셈의 과정을 교과서에서 제시한 것처럼 기록하였고, SN은 세로셈으로 계산을 하고, 각각 무엇을 곱했는지 세로셈 옆에 써 놓았다. 역시 일의 자리 수부터 차례로 7, 10, 30에 곱했는데, 중간 과정에 000을 쓰지 않았다.

③번 문제의 경우, 알고리즘을 이용하지 않고 <그림 4>의 SB'와 SX와 같이 ②번을 이용하여 해결하기도 하였다.
잘못 계산한 학생들은 <그림 5>와 같이 이미 배운 (두 자리 수)×(한 자리 수)의 곱셈 알고리즘을 이용하여 식에 나오는 수를 임의적으로 이리저리 곱하려고 하였다.



<그림 4> (왼쪽부터) SB'와 SX의 풀이



<그림 5> (왼쪽부터) SO와 ST의 잘못된 풀이

나. 두 번째 수업의 분석 : (몇십 몇)×(몇십 몇)의 문장제 해결하기

몇십 몇과 몇십 몇의 곱을 계산하기 위해 먼저 한 자리 수 곱하기 두 자리 수의 계산을 할 수 있는 문장제를 제시하였다. 제시한 문제는 다음과 같다.

① 30주는 며칠입니까? ② 52주는 며칠입니까?

이 문제를 보고 학생들은 30×7 또는 7×30이라는 식을 이용하여 210일이라고 답을 구하였다. 학생들은 30×7이나 7×30의 결과는 똑같다고 생각하였다. 두 식의 차이점을 설명해보라고 하자 다음과 같이 발표한 학생이 있었다.

$SB_{101}$ : 제가 발표하겠습니다. 30×7이나 7×30은 똑같은 답이 나옵니다. 하지만 제 생각에는 '며칠인가요'할 때, 7주를(잠시 말을 멈추더니, 자기가 문제를 푼 공책을 한 번 들여다보고는) 아, 아. 7×30이 더 낫다고 생각합니다. 7일은 며칠이냐면…. 일주일은 7일이잖아요. 그러니까 7일이 30번 있어야 되니까 두 번째 것이 맞다고 생각합니다.

②번 문제의 경우에는 다음과 같이 곱셈구구를 이용하여 쉽게 계산하였다.

$SH_{102}$ : (나와서 7×52를 세로셈식으로 쓴다.) 7×2=14니까 여기다 올려줘도 되지만, 그냥 여기다 10을 쓰고, 4는 여기다 쓰고, 7×5=35니까 3은 여기다 쓰고, 5는 여기다 쓰고, 한꺼번에 더해요. (세로로 더해서 답을 364라고 쓴다.)

$$
\begin{array}{r}
7 \\
\times \quad 5\,2 \\
\hline
1\,4 \\
3\,5\phantom{\,4} \\
\hline
3\,6\,4
\end{array}
$$

<그림 6> SH가 칠판에 쓴 식

$T_{127}$ : 숫자를 쓰는 자리가 왜 달라요? (손을 든 학생에게) SJ야.
$SJ_{101}$ : 제가 발표하겠습니다. 7×2는요. 일의 자리에 있기 때문에요. 일의 자리에다가 쓰고요. 7×5=35는…. 십의 자리 수 5는 50이기 때문에 십의 자리에 씁니다.

이 문제를 해결한 다음, (몇십 몇)×(몇십 몇)을 계산하기 위해 다음 문제를 추가로 제시하였다.

하루에 자동차를 14대 만드는 공장이 있습니다. 이 공장에서 36일 동안 만들 수 있는 자동차는 모두 몇 대입니까?

이 문제를 비교적 빨리 해결한 SK가 자신의 해결 방법을 다음과 같이 말하였는데, 학원에서 (몇십 몇)×(몇십 몇)의 알고리즘을 배웠다고 하였다.

$SK_{101}$ : 14×36인데요, 그렇게 하면 너무 어려운데요. 14 곱하기를요, 3을 없는 것처럼 하고 14×6을 한 다음에요. 그 다음에 14…, 또 이번엔 6을 없는 것처럼 하고 14×3.
… (중략) …
$SK_{102}$ : 그 다음에 84하고요, 그 42를 더해요.

학생들은 대부분 14×36을 곱셈 알고리즘을 이용하여 계산하려고 하였다. 그래서 곱셈식을 곱셈구구가 아닌 덧셈으로 계산했을 때에는 어떻게 계산하는지를 알아보기 위해 연구자는 14×36을 덧셈으로 계산하여도 504가 나오는지 확인해보게 하였다.

가장 먼저 계산한 학생은 재빨리 14를 세로로 36번 써 놓고, 위에서부터 차례대로 더한 SG였다. SG는 일의 자리 수끼리의 합과 십의 자리 수끼리의 합을 구한 후 더하는 방법으로 계산하였다.

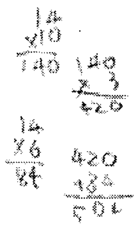
$SG_{108}$ : 4를요. 거기 쭉 있으니까 4+4=8, 8+4=12, 12+4는=16, 해갖고요 쭉 더하고요. 10은 10끼리 더했어요.

이어서 학생들은 다음과 같이 발표하였는데, 각 학생들의 해결 방법을 보면 CGI 수업에서 학생들이 보여주는 풀이와 같이 다양한 풀이가 나타나는 것을 볼 수 있다.

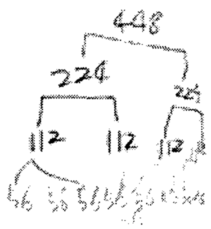
$SF_{105}$ : 제가 발표하겠습니다. 저는 14를 12번 더해서요. 그러니까 곱셈에서 168에서요. 그래서 곱하기 3을 하면 504가 나와요.

$SM_{102}$ : 일단, 36이니까…, 14를요, 10번 더하면 140이니까요…, 36이니까 3번을 더한 다음에요. 나머지 6은 14×6을 하면 84가 되요. 그 다음에 그 420을요 84랑 더해서 504가 나와요.

$SO_{103}$ : 제가 발표하겠습니다. 일단은 14씩 36번 더하는 것을 14를 4묶음으로, 4묶음으로 짓습니다. (공책을 한 번 보고) 그러면 56이 나옵니다. 56씩 9묶음이겠죠? 그럼 56을 또 2배로 하면 112가 나옵니다. 112는 4개가 나오고 56이 하나 있습니다. 거기다가 112를 224로 나누고 224를 두 번 더하고 56을 더하면 504가 나옵니다.




<그림 7> SM의 계산 방법




<그림 8> SO의 계산 방법

다. 세 번째 수업 분석 : 곱셈을 활용하여 문제 해결하기

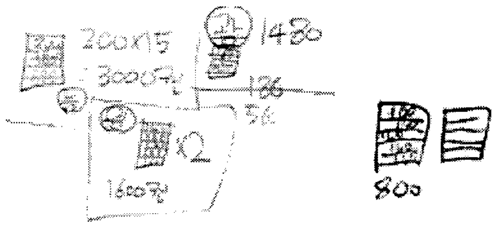
이 수업에서는 수학익힘책 32쪽에 나오는 '좀 더 알아보기'의 문제를 해결하도록 하였다. 제시한 문제는 <그림 9>와 같다.

<그림 9> 수학익힘책의 문제

학생들은 문제를 풀기 위해 곱셈식을 세웠는데, 동화책의 수를 대부분 200×3으로 계산하였다. 이는 제시된 만화의 네 번째 칸에 나오는 '동화책은 한 단에 200권씩 3개의 책꽂이에 가득 꽂혀 있어' 라는 남자 어린이의 말 때문이었는데, 이 말에 나오는 수인 200과 3을 곱해서 동화책의 수를 구하려고 했다. 책꽂이의 모양을 제대로 이해한 SO가 칠판에 책꽂이의 모양을 그리자 그제서야 몇몇 친구들이 200×3은 틀렸다는 것을 이해하였다.

SO210 : (칠판 앞으로 나와서) 제가 발표하겠습니다. 잘 보세요. 세 개의 책꽂이에 가득 꽂혀있다고 했잖아요. (직사각형 책꽂이 모양을 세 개 그리고 각각을 다섯 칸으로 나눈다.) 한 번 생각을 해봐요. 이걸 모두 곱해 보세요.

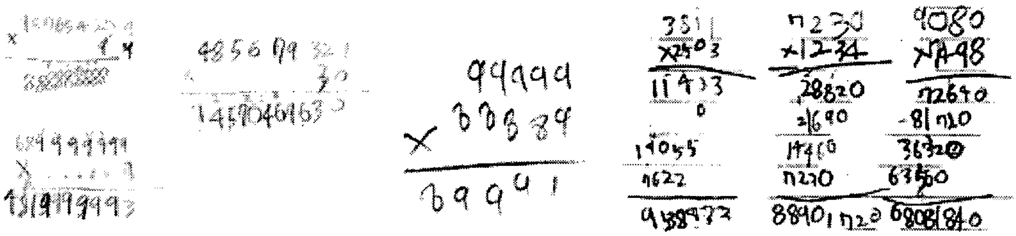
학생들은 SO의 설명을 듣고 나서 책꽂이가 5단이라는 말의 뜻을 이해하고 다시 계산을 하였는데, SG, SE는 다음과 같이 그림을 그려보기도 하였다.



< 그림 10 > (왼쪽부터) SG, SE가 그린 그림

< 그림 11 > SX가 다시 그린 그림

위에서 살펴본 바와 같이 연구 대상 학생들은 문제를 읽고 문제에 나오는 수를 보고 일단 곧바로 덧셈이냐 곱셈이냐 등을 결정하여 식으로 나타내려고 하며, 곱셈의 초기에 배운 알고리즘을 이용해 자릿수가 높은 수의 곱셈도 할 수 있음을 알 수 있다. SB, SG, SO는 스스로 자릿수가 높은 수의 곱을 만들고 풀어보기도 하였다.

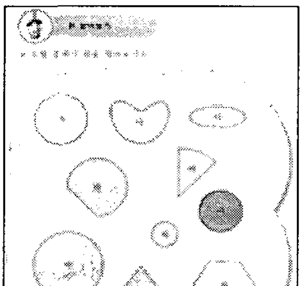


< 그림 12 > (왼쪽부터) SB, SG, SO가 계산한 곱셈식

라. 네 번째 수업 분석 : 원 알아보기

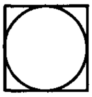
3단원 첫 번째 차시에 수학익힘책 33쪽을 해결하도록 하였다. 연구자는 학생들이 동그라미 모양을 알고 있기 때문에 이 문제를 쉽게 해결할 것으로 예상하고 자신 있게 손을 드는 ST에게 발표를 시켰다. 그런데, ST는 원 모양인 '가', '바', '아', '자' 와 타원 모양인 '다' 도 원 모양이라고 발표하였다. ST의 발표를 들은 다른 학생들은 곧바로 '다' 가 원이 아닌 것 같다고 이야기하였는데, 그래서 원이 아닌 것을 어떻게 알 수 있는지 발표해 보도록 하였다.

몇몇 학생들이 '원은 동그래야 하는데, '다' 는 길쭉하기 때문에 원이 아니다.' 라고 대답하였고, SO는 네모에 집어넣었을 때, 네모의 길이가 같지 않다고 대답하였다.

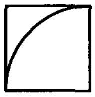


< 그림 13 > 수학익힘책의 문제

SO에게 좀 더 자세히 설명해 보라고 하자, <그림 14>와 같이 칠판에 다음과 같이 동그라미에 접하는 사각형을 그리고, 원이 되려면 사각형의 네 변의 길이가 같아야 한다고 말하였다. 설명을 들은 학생들은 쉽게 동의하였으며 SE는 SO와 비슷한 방법으로 <그림 15>와 같은 모양을 네 개 합쳐서 원을 그릴 수 있다고 하였다.



<그림 14> SO가 그린 그림

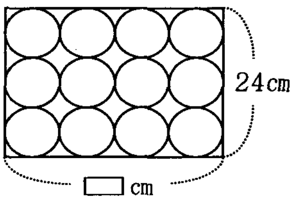


<그림 15> SE가 그린 그림

마. 다섯 번째 수업 분석 : 원의 지름을 이용하여 문제 해결하기

3단원 두 번째 차시에 원의 중심, 지름, 반지름에 대해 학습하고 나서 세 번째 차시에 아래와 같은 그림을 제시하고 빈 칸에 알맞은 길이를 구해보도록 하였다.

먼저 혼자서 문제를 해결해 보고, 해결한 사람은 서로 어떻게 해결했는지 두, 세 명씩 비교해 보도록 하였다. 교사는 각 학생들의 해결 방법을 관찰일지에 기록하였다.




<그림 16> 직사각형의 가로 길이를 구하는 문제

몇 학생은 지름의 길이를 예상과 확인의 방법을 통해 구한 다음 직사각형의 가로를 구하였다.

SP : 6×3=18, 아니잖아요. 7×3=21, 아니잖아요, 8×3=24 되잖아요. 그러니까 이게(지름) 8이고 이쪽(직사각형의 가로 길이)은 8이 4개니까 32가 돼요.
SW : 반지름 1부터 해보면 4가 됐어요. 4, 6, 24(4×6=24).

원의 중심을 지나는 선을 그리고, 곱셈이나 나눗셈으로 설명한 학생도 있었다.

SS : 이게 중심이면 반지름이 6개니까요. 반지름이 4㎝고, 지름은 8㎝예요. 그래서 이(직사각형의 가로) 길이는 8×4=32에서 32㎝가 나와요.
SO : 일단 여길 봐봐. 여기(세로줄에 있는 원을 가리키며) 3개잖아. 8×3=24니까 나는 이렇게 했어. 24÷3=8, 이렇게 나오잖아. 그래서 지름은 8이 나오고, 여기서 8÷2=4잖아. 어… (잠깐 쉬었다가) 가로의 길이는 24+8=32가 돼.

학생들은 친구들이 그림에 표시하면서 설명할 때 쉽게 이해하였으며 자신이 계산한 방법도 알아듣기 쉽게 설명하였다.

바. 여섯 번째 수업의 분석 : 몫이 10 이상인 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 계산

여섯 번째로 분석한 수업은 교과 시간 중의 수업이 아니라 방과 후에 나눗셈에 관한 문제를 풀던 SC'를 관찰하던 중 발견한 내용을 정리한 것이다. SC'는 개인적인 사정으로 2주일 동안 결석을 하여 수업 결손이 많고 또 학원을 다니지 않아 선행 학습을 전혀 하지 않은 학생이었다.

48÷4의 계산이었는데, SC'는 먼저 종이에 44, 48을 쓰고 나서 나눗셈 식의 몫을 쓰는 자리에 12라고 써 넣었다. 어떻게 그런 답이 나왔냐고 물어봤더니 4 곱하기 10이 40이니까 44, 48이 되면 12가 된다고 하였다.

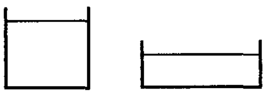
다른 수로 문제를 내도 할 수 있냐고 물어보았더니 할 수 있다고 하여, 56÷4도 풀어보도록 하였더니, 마찬가지로 44, 48, 52, 56이라고 종이에 쓰고 56이 나오자 쓰던 것을 멈추었다. 그리고 44부터 하나씩 짚으면서 작은 소리로 11, 12, 13, 14라고 하더니 몫을 14라고 구하였다. 45÷3도 같은 방법으로 몫을 구하였다.

그래서 몫이 20 이상이 되는 46÷2를 계산해 보도록 하였다. 그랬더니 40, 44, 48이라고 쓰고 답이 나오지 않는다고 하였다. 나누는 수가 2라고 말해주었더니 20부터 다시 쓰기 시작했는데, 20, 22, 24, 26, 28, …, 44, 46이라고 쓰고 하나씩 세어보더니 22라고 대답하였다. 연구자가 다시 확인해보라고 하니, 다시 세어보고 23이라고 하였다. 이어서 연구자는 SC'에게 20부터 46까지 많은 수를 쓰고 세려면 불편하니 좀 편리하게 계산할 수 있는 방법은 없겠는지 생각해보라고 하였다. SC'는 다른 방법을 모르겠다고 대답하였는데, 마침 청소를 하던 친구 SW에게 같은 계산식을 한 번 풀어보라고 하였다. SW는 세로셈으로 십의 자리 수부터 나눗셈을 하여 몫을 23이라고 썼는데, SC'는 SW가 설명하는 방법을 잘 이해하지 못하였다.

사. 일곱 번째 수업의 분석 : 들이 비교하기

'들이재기' 단원의 첫 차시에 단위를 도입하기 전, 다음과 같은 문제를 제시하였다.

크기가 다른 두 개의 수조에 물이 담겨 있습니다. 어느 쪽에 담긴 물의 양이 더 많은지 알아보려면 어떻게 해야 할까요?



<그림 17> 수조 그림

학생들이 발표한 방법 중 첫 번째 의견은 '먹어본다' 였다. 먹어봐서 배가 더 부르다고 느껴지면 양이 더 많다는 것이다. 그런데, 이것은 정확하지 않을 수도 있고, 먼저 먹은 것 때문에 나중에 먹은 것을 잘 느끼지 못할 수도 있다고 하여 알맞지 않은 방법으로 결론이 내려졌다.

두 번째로 발표한 의견은 어떤 다른 컵에 넣어서 넘치는지 알아본다는 것이었는데, 이 의견을 듣고 다른 학생이 얼마나 넘쳤는지 모를 수도 있지 않느냐고 질문을 하였다. 그러자 넘치는 것이 새지 않도록 더 큰 그릇에 넣고 넘친 물을 모아서 비교하면 된다고 하였

다. 또, 물이 넘치지 않을 만큼 두 수조보다 더 큰 똑같은 크기의 수조에 물을 옮겨 담고 높이를 비교하면 된다는 의견도 나왔다.

세 번째로 발표한 의견은 작은 컵으로 각각의 수조에 담긴 물의 양을 재어본다는 것이었고, 네 번째로 발표한 의견은 한 쪽 수조의 물을 잠시 다른 통에 옮겨 놓고, 다른 쪽 수조의 물을 처음 수조에 부어놓고 처음의 높이와 비교한다는 것이었다. 처음 높이를 어떻게 알 수 있냐는 질문에 수조의 겉면에 표시를 해 놓으면 된다고 하였다.

다섯 번째로 발표한 의견은 똑같은 물체를 물에 넣어서 넘치는 양을 비교한다는 것이었는데, 이 의견은 넘치는 양을 다른 그릇에 모아서 담아야 한다는 점에서 두 번째와 비슷한 방법이었다.

이상 다섯 가지 방법 중, 교과서에 제시되어 있는 것은 세 번째 방법이며, 처음에 발표할 때에는 다소 문제점이 있는 방법들도 점차 다른 학생들의 질문과 대답을 거쳐 수정되어 갔다.

### 아. 여덟 번째 수업의 분석 : 규칙성 찾기

학생들에게 '뒤러' 라는 화가의 판화 작품, '우울증' 의 오른쪽 기둥에 그려진 마방진을 보여 주고, 이 마방진에서 규칙을 찾아보게 하였다. 제시한 그림은 <그림 18>과 같다.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

<그림 18> '뒤러'의 '우울증'과 마방진

학생들은 한 줄의 합이 34라는 것 외에도 다음과 같은 규칙을 찾아내었다.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

$$\begin{aligned} &16+3+5+10 \\ &= 2+13+11+8 \\ &= 9+6+4+15 \\ &= 7+12+14+1 \\ &= 34 \end{aligned}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | $\boxed{3}$ | $\boxed{2}$ | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | $\boxed{15}$ | $\boxed{14}$ | 1 |

$$\begin{aligned} &16+13+4+1 \\ &= 5+9+8+12 \\ &= 3+2+15+14 \\ &= 10+11+6+7 \\ &= 34 \end{aligned}$$

<그림 19> 학생들이 찾은 규칙

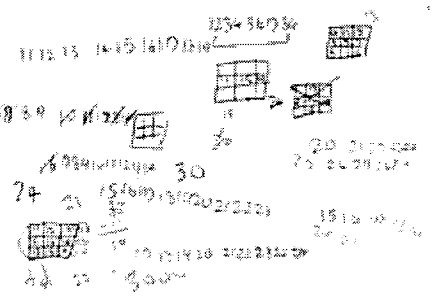
규칙을 찾아 발표하고 난 후, 중국의 거북이 등껍질에서 발견된 마방진 이야기를 해 주고 1부터 9까지의 수를 한 번씩 써서 한 줄의 합이 같도록 마방진을 완성해 보라고 하였는데, 학생들은 예상과 확인의 방법으로 한 줄의 합이 15인 마방진을 완성하였다.

다음 단계로 한 줄의 합이 30인 마방진도 만들도록 해 보았는데, 학생들은 다음과 같이 세 가지 방법으로 문제를 해결하였다.

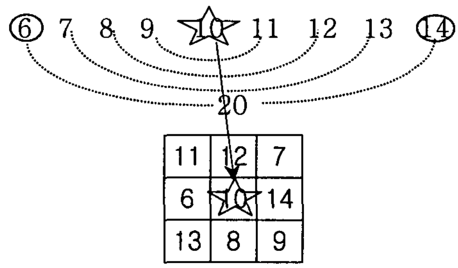
먼저, SG는 1부터 9보다 좀 더 큰 연속된 수로 마방진을 완성해보려고 하였다. 아홉 개

의 연속된 수를 나열해 놓고, 양쪽 끝의 수부터 그 합을 구해보며 마방진의 수를 채워갔다. 그러다가 6부터 14까지의 수가 양쪽 끝수의 합이 20이 나오고, 가운데 수가 10이라는 것을 발견하고 한 줄의 합이 30이 되는 마방진을 완성하였다.

SH는 처음에 만든 마방진은 한 줄의 합이 15인데, 30이 되려면 한 줄이 15씩 커져야 하므로 각 칸에 15를 3으로 나눈 5를 더해서 해결하였고, SM은 각 칸의 수를 2배로 늘려 한 줄의 합을 30으로 만들면 된다고 하였다.



<그림 20> SG가 공책에 쓴 것




<그림 21> SG의 방법

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

<그림 22>
처음 마방진

| | | |
|---|---|---|
| 4+5 | 9+5 | 2+5 |
| 3+5 | 5+5 | 7+5 |
| 8+5 | 1+5 | 6+5 |

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 14 | 7 |
| 8 | 10 | 12 |
| 13 | 6 | 11 |

<그림 23>
각 칸에 5를 더한 SH의 방법

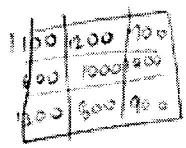
| | | |
|---|---|---|
| 4×2 | 9×2 | 2×2 |
| 3×2 | 5×2 | 7×2 |
| 8×2 | 1×2 | 6×2 |

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 18 | 4 |
| 6 | 10 | 14 |
| 16 | 2 | 12 |

<그림 24>
각 칸의 수를 2배한 SM의 방법

친구들의 발표를 듣고 SG는 한 줄의 합이 3000인 마방진을 만들었다며 자랑을 하였는데, SG가 만든 마방진은 오른쪽과 같다.



<그림 25>SG가 만든 마방진

자. 아홉 번째 수업의 분석 : 문제 해결 과정 설명하기

수학익힘책 115쪽에 나오는 문제를 약간 바꾸어 제시하였다. 문제는 쓰지 않고, 이야기로 들려주었다. 들려준 이야기는 다음과 같다.

$T_{301}$ : 자, 오늘은 선생님이 이야기해주는 문제를 잘 듣고, 같이 한 번 풀어 볼 거예요. 똘똘이가 옷장에 있는 옷을 살펴봤더니 위에 입는 티셔츠가 3가지 색깔로 있었대요. (칠판에 티셔츠 모양을 그리고, '빨', '노', '파'라고 글씨를 쓰며)빨간 티셔츠가 있고, 노란 티셔츠도 있고, 파란 티셔츠가 있었대요. 그리고 바지는(칠판에 바지 모양을 그리고, '흰', '검', '파', '갈'이라고 쓰며) 하얀 바지, 검정색 바지, 파란 바지, 갈색 바지가 있었어요. 그럼 이 친구는 티셔츠 한 벌, 바지 한 벌을 골라 입을 수 있겠

지요? 똘똘이가 옷을 입을 수 있는 방법을 한 번 생각해 볼까? 어떤 방법이 있을 수 있을까요? SP.

...(중략)...

$T_{303}$ : 그래요. 그럼 이런 식으로 똘똘이가 서로 다르게 옷을 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지가 되는지 한 번 생각해 보세요.

SO, SM, SP가 문제를 해결한 방법은 다음과 같다.

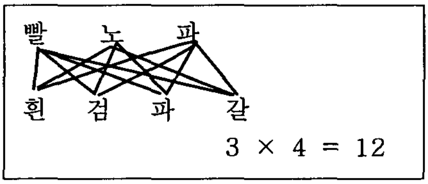
$SO_{301}$ : (앞으로 나온다) 제가 생각하기에는 12개인 것 같습니다. 왜냐하면 (말을 멈추고, 빨간 분필로 '빨'이라는 글자와'흰, 검, 파, 갈'을 각각 선으로 잇는다. 다시 노란 분필로 '노'라는 글자와 '흰, 검, 파, 갈'을 잇고, 계속하여 '파'라는 글자와 '흰, 검, 파, 갈'을 잇는다) 이렇게 하였습니다. 이렇게 하면, 3 곱하기 4는 12(칠판에 3×4=12라고 쓴다). 저는 이렇게 하면 12개라고 생각합니다.

$SM_{301}$ : (칠판에 4, 4, 4, 12를 세로로 쓰고, 교사를 쳐다본다.)

$T_{307}$ : 이건 어떻게 한 거예요?

$SM_{302}$ : 티셔츠 하나에 바지가 4개예요.

$SP_{301}$ : (칠판에 나와서 손으로 가리키며) 이 빨간색 티셔츠에 바지를 네 가지 입을 수 있는데, 티셔츠가 3개니까 삼사십이(3×4=12)해서 12가지예요.




<그림 26> SO가 설명하면서 칠판에 쓴 내용

세 학생의 설명과 같이 학생들은 이 문제를 별 어려움 없이 쉽게 해결하고 그 방법을 설명하였다. 해결 방법 또한 교과서에서 제시한 덧셈이나 곱셈의 방법을 고루 사용하였다. 그래서 이 문제보다 조금 난이도가 높은 다음 문제를 하나 더 제시하였다.

아이스크림 기계에서 바닐라, 딸기, 초코맛 아이스크림이 나옵니다. 아이스크림을 살 때 2가지 맛을 골라 먹을 수 있습니다. 고를 수 있는 방법은 몇 가지일까요?

학생들은 맛을 고르는 순서가 관계있는지 의문을 가졌는데, 학생들이 푼 결과는 3가지, 6가지, 9가지 등이 나왔는데, 먼저 9가지라고 한 SO부터 발표를 하였다.

$SO_{304}$ : (칠판 앞으로 나와서) 제가 생각을 했는데, (칠판에 글씨를 쓰면서) 바딸,

$S_{303}$ : 바딸? 하하(웃음) 바닐라, 딸기.

$SO_{305}$ : (계속 이어서 설명한다.) 딸초, 초바.(잠깐 멈춘다.) 에? (약간 머뭇거리며) 3가지인데요.

SO는 처음에 자기 자리에서 생각할 때는 9가지라고 생각했는데, 친구들 앞에서 설명을 하면서 3가지라고 고쳐 말하였다. 다음으로 6가지라고 생각한 SH가 발표하였다.

SH302 : 아이스크림 종류가요, 바닐라랑 딸기랑 초코렛 있잖아요. 그리고 그 아이스크림을 할 때 2개를 고른다고 했으니까 아이스크림은 종류는 3가지이고, 고를 수 있는 건 2가지니까 2 곱하기 3 해서 6가지예요. 바닐라랑 딸기, 바닐라랑 초코, 딸기랑 바날라, 아니 바닐라, 딸기랑 초코, 초코랑 바닐라, 초코랑 딸기.

SH의 발표를 듣고 SG는 SH가 틀렸다고 생각한다면서 다시 설명하였다.

SG303 : 저는 세 가지라고 생각합니다. 왜냐하면 초코랑 바닐라나 바닐라 초코나 똑같다고 생각합니다. 초코랑 바닐라 하나, 초코랑 딸기 하나, 바닐라랑 딸기. 이렇게 해 가지고.

SG의 설명을 듣고 SH는 아이스크림을 고르는 순서는 가짓수와 관계없다는 것을 알고 잘못된 부분을 수정하였다.

차. 열 번째 수업의 분석 : 문제 해결 과정 설명하기

수학 교과서 115쪽에 나오는 문제와 같은 유형의 두 문제를 제시하고 풀어보도록 하였다.

① 구슬이 12개 있는데, 형과 동생이 나누어 가졌습니다. 형의 구슬이 2개 더 많다면 동생의 구슬은 몇 개입니까?
② 길이가 40㎝인 막대를 두 도막으로 잘랐습니다. 긴 도막과 짧은 도막의 길이를 대어 보았더니, 한 쪽이 다른 한 쪽보다 6㎝ 더 길었습니다. 긴 도막의 길이는 몇 ㎝입니까?

처음에는 많은 학생들이 ①번 문제의 답을 4개라고 잘못 생각하였다.

SP402 : (칠판 앞에 나와서 설명한다.) 이게 (12에 밑줄을 그으며) 12개라고 했잖아요. 여기서 2개('2개'에 네모 표시를 하며)가 더 ('많'에 밑줄을 긋는다.) 많다고 했으니까 (12÷2=6이라고 쓰며)여기서 두 개로 나누면, 12 나누기 2는 6. 여기서 2개가 더 많다 그랬으니까 6 더하기 2는 8이잖아요. 그래서 12빼기 8을 해서 동생의 구슬의 수는 4개가 나왔어요.

잠시 후, 동생의 구슬 수를 5개라고 한 SM과 SO가 다음과 같이 설명하자, 처음에 4개라고 했던 학생들도 어떻게 5개가 되는지 이해하는 듯이 보였다. 다음에 설명한 SF는 표를 그려 문제를 해결하였다. 학생들이 문제를 해결한 방법은 다음과 같다.

SM402 : 12에서 형꺼 2를 준 다음에요, 나눴어요.

SO401 : (말을 하며 칠판 앞으로 나온다.) 저는 다른 방법으로 해서 5가 나왔어요. 일단 (칠판에 12÷2=6이라고 쓰며) 12를 나누기 2 하면 6이잖아요. 여기서부터 해봐요. (칠판에 세로로 쓰며) 6, 6, 0이죠? (그 옆에 세로로 쓰며) 7, 5를 하면, 그럼 2가 나오죠? 그래서 저는 7, 5를 해서 2가 나왔다고 생각합니다.

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | 7 |
| | 6 | 5 |
| | 0 | 2 |
| 12 ÷ 2 = 6 | | |

<그림 27> SO가 쓴 식

$T_{413}$ : 네. 그런데, SO야. 여기 있는 0은 뭐를 나타내는 거예요?

$SO_{402}$ : 거기 있는 6과 6을 합친거는 12개를 뜻하거든요. 0은 그 차이를 뜻해요.

$SF_{405}$ : (칠판으로 나와서 4칸 2줄짜리 표를 그린다. 윗칸을 가리키며) 여기는 형이고, (아랫칸을 가리키며) 여기는 동생이잖아요. 그러니까 12가 되는 수를 보면, 8하고 4가 되잖아요. 만약 여기 8하고 4가 된다면요, 뭐지? 차가 안 되니까 먼저 여기에 (맨 왼쪽 칸 윗줄에 10, 아랫줄에 2를 쓴다) 10하고 2를 한 다음에요. 여기(윗줄)는 점점 내려가고요, 여기(아랫줄)는 점점 올라가면서요. 여기는 (숫자를 말하면서 쓴다) 9가 되고, 3이 되고, 여기는 8이 되고, 4가 되고, 7이 되고, 5가 되고, 그 다음에 (맨 왼쪽 칸의 10과 2를 가리키며) 10하고 2를 빼면 (2의 아래에 8이라고 쓰며) 8이 되고, 9하고 3을 빼면 6이 되고, 8하고 4를 빼면 4가 되고, 7하고 5를 빼면 2가 되서, 이거라고 생각합니다.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |

<그림 28> SF가 그린 표

이어서 SA'가 두 번째 문제의 해결 방법을 발표를 하였다.

$SA'_{401}$ : (앞에 나와서 설명한다.) 40에서요 6을 빼면요, 34잖아요. (40-6=34를 세로셈으로 쓴다.) 34는 두 개로 나누면 17이 두 개 나오잖아요. (34÷2=17을 세로셈으로 쓴다.) 17 하나에 6을 더하면 23(17+6=23을 세로셈으로 쓴다.)이 나옵니다.

이어서 SH도 새로운 방법으로 문제를 해결하였는데, 먼저 전체 막대의 길이 40을 2로 나눈 수 20에, 길이의 차 6을 반으로 나눈 3을 더하거나 빼서 두 막대의 길이를 구하였다.

SC는 표를 이용하여 두 막대의 길이를 구하였는데, SC가 그린 표는 첫 번째 문제를 해결할 때, SF가 그렸던 표와 같은 모양이었다. 표에서 윗줄은 긴 막대의 길이, 아랫줄은 짧은 막대의 길이이고, 두 막대의 길이 차를 표의 아래에 써 놓았다. 20㎝부터 시작한 이유는 막대 전체의 길이가 40㎝인데, 그 절반이 20㎝이기 때문이라고 하였다.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 20 | 19 | 18 | 17 |
| 0 | 2 | 4 | 6 |

<그림 29> SC가 칠판에 그린 표

이상에서 살펴본 바와 같이 학생들은 교사가 특별한 문제 해결 방법을 제시하지 않았는데도 예상과 확인이나 식 세우기, 표 만들기 등의 방법으로 주어진 문제를 해결하였다. 학생들은 처음에 오답을 구하기도 했지만, 점점 합리적인 방법을 찾아나갔다.

카. 열한 번째 수업의 분석 : 예상하고 확인하여 문제 해결하기

본 수업에서 제시한 문제는 다음과 같다.

책을 펼쳐서 나온 두 쪽수를 곱했더니 552가 되었습니다. 몇 쪽을 펼쳤을까요?

문제를 제시하고 풀 수 있는 시간을 주었는데, 어렵다고 말을 한 학생들이 있어서 문제를 먼저 푼 학생들에게 힌트를 발표해 보게 하였다.

$SH_{501}$ : 일단은 552잖아요. 일단은 그러니까 곱해서, 그 몇십 몇, 몇십 몇을 곱해서 일의 자리에.. (잠깐 쉬었다가) 일의 자리가 2가 나오는 걸 찾아봐요.

…(중략)…

$SU_{506}$ : 아, 힌트를 줄게요. 몇 곱하기 몇 한 다음에요. 그게 너무 쬐끄마면요. 숫자를 조금 올리고, 반대로 너무 크면요, 숫자를 작게 해요.

…(중략)…

$SH_{504}$ : 일단은 552니까요 십의 자리는...두 쪽수가 십의 자리는요, 같고, 일의 자리는 차이가 1이예요.

위의 힌트들을 발표하는 동안에도 학생들은 계속 계산을 하며 알맞은 수를 찾아갔다. 이 문제를 풀기 위해 학생들은 교과서에서 제시한 방법처럼 예상과 확인하기의 전략을 사용하였다. 또, 펼쳐진 책의 쪽수는 차이가 1이라는 사실도 발견하였다.

## 2. 논 의

이제 앞서 분석한 연구 결과를 바탕으로 학습자의 사고와 행동 특성, 교사가 느낀 긍정적인 점과 어려웠던 점에 관해 논의하고자 한다.

### 가. CGI를 적용한 수학 수업에서 학습자의 사고와 행동의 특성

본 연구를 통해 CGI를 적용한 수학 수업에서 학습자는 몇 가지 긍정적·부정적 특성을 보였는데 이를 정리하면 다음과 같다.

#### (1) 전략의 사용

학생들은 연산, 도형, 들이, 문제 해결하기 등의 각 영역에서 다양한 전략을 사용하였다. 예를 들어, 곱셈과 같은 연산 영역에서는 '기본셈' 과 알고리즘을 활용하여 계산을 해내는 학생들이 많았는데, 이미 배운 알고리즘을 발전시켜 높은 자릿수의 곱셈도 해결하였다. 곱셈을 덧셈식을 이용해서 해결해보도록 하였을 때에는 묶어세기나 동수누가 등의 다양한 방법을 사용하는 것을 관찰할 수 있었으며, 동수누가의 방법으로 높은 자릿수의 곱셈을 해결하기도 하였다.

도형 영역에서는 원의 개념을 원의 중심과 반지름이 아닌 다른 식으로 접근하는 모습을 볼 수 있었으며 측정 영역에서도 역시 들이를 비교할 때 교과서에 나오는 방법뿐만 아니라 다른 방법도 찾아내려고 노력하였다. 특히 학생들의 다양한 문제 해결 전략을 관찰할 수 있었던 것은 문제 해결하기 단원이었는데, 표를 만들기도 하고, 그림으로 나타내기도 하는 등의 다양한 방법으로 문제를 해결하였다.

반면 다소 부정적인 특성으로는 문장제를 읽고 문제에 나오는 수를 사용하여 일단 곱셈이나 나눗셈, 덧셈이나 뺄셈 등의 계산식으로 나타내는 경우가 많았다는 것이다. 그러다보니 알맞지 않은 식을 세우고도 그냥 계산을 해서 답을 구하고, 답을 구한 다음 다시 처음의 문제 상황에 알맞은지 검토하지 않아 오류를 범하기도 하였다. 계산 알고리즘을 모르는 학생의 경우, 아예 문제를 포기하는 모습도 볼 수 있었다.

(2) 전략 발표하기

수업을 처음 할 때, 학생들은 자신이 사용한 전략을 발표하는데 어려움을 느끼는 경우가 많았다. 답이 얼마인지 말하는 것은 할 수 있지만 어떻게 그런 답이 나왔는지 물어보면 잘 설명하지 못하고, 오히려 어떻게 설명해야 하는지 다시 물어보기도 하였다.

예를 들면 다음과 같다. 그러나 시간이 흐를수록 자신의 생각을 칠판에 나와서 설명하는데 재미를 느끼는 학생들이 생겼으며, 듣는 학생들은 말하는 학생의 설명이 맞았는지 틀렸는지 관심 있게 듣고 틀린 부분을 지적해주기도 하였다. 또, 설명을 하는 도중에 자기 스스로 틀린 부분을 찾아내기도 하였다.

반면, 설명하는 학생의 목소리가 작거나 머뭇거릴 경우 듣는 학생들의 집중도가 떨어졌다. 또 학생들의 수준차로 인하여 성취도가 낮은 학생은 다른 학생의 설명을 이해하지 못하는 경우가 있었다.

(3) 문제 해결 전략의 일반화

학생들은 자신들이 발견한 문제 해결 전략을 일반화거나 발전시켜서 더 어려운 문제를 스스로 만들어 풀어보기도 하였다. 수업 시간에는 한 줄의 합이 15, 30인 마방진을 만들어 보았는데, 계산이 빠른 한 학생은 한 줄의 합이 3000이 되는 마방진을 만들기도 하였고, 계산 알고리즘 전략을 세운 학생들은 자릿수가 더 높은 계산식을 만들어 직접 계산하기도 하였다.

(4) 성취감

학생들은 스스로 문제를 해결하고, 또 그것을 다른 사람에게 설명해 줌으로써 기쁨을 느꼈는데 이는 성취도가 중간이거나 높은 학생들에게 더 강하게 나타났다.

반면, 성취도가 낮은 학생에게는 문제를 해결하지 못하는 것이 자신감을 잃게 하거나 문제 푸는 것을 포기하도록 하기도 하였다.

나. CGI를 적용한 수학 수업에서 교사의 긍정적인 점과 어려운 점

(1) 교사가 느낀 긍정적인 점

㈎ 학생 개인의 수학적 지식과 특성에 관한 이해

교사는 학생들이 직접 문제 푸는 과정을 설명하는 것을 보고 학생 개인의 수학적 지식과 특성에 관해 이해할 수 있었는데, 학생들은 교사가 기대하는 수학적 지식 이외에도 많은 비형식적 지식을 갖고 있었다. 교사가 쉽다고 느꼈지만 학생들에게는 갈등을 일으키는 경우도 있었으며, 반대로 교사가 예상치 못한 아이디어를 사용하여 문제를 해결하는 경우도 있었다. 또, 학생이 설명하는 것을 들으면서 어떤 부분에서 오류를 범하는지 발견하기 쉬웠다. 또, 바르게 이해하고 있는 것은 무엇인지, 어떤 용어를 사용하는지, 선행 학습은 어느 정도 되어 있는지 등을 알 수 있었고 학생들이 생각을 하려고 노력하는지, 빨리 포기하는지 등도 알 수 있었다. 이런 지식을 바탕으로 다음 수업에서의 문제 난이도를 조정할 수 있었다.

㈏ 교수 방법의 변화

수업을 진행하면서 학생들이 스스로 문제를 해결하는 과정을 보고 교사가 지식을 가르쳐주어야 한다는 생각에서 학생들이 지식을 구성해 나갈 수 있도록 안내해주어야 한다는

생각을 갖게 되었다. 그리고 안내를 바르게 하기 위해 알맞은 문제 상황을 제시해야 하고, 알맞은 문제를 만들기 위해 사전에 학생들의 지식에 관해 많이 알고 있어야겠다는 생각을 하게 되었다.

(다) 교과서 활용에의 시사점

문제를 선정하는데 있어서 교과서의 '생활에서 알아보기' 나 심화 단계의 문제는 유용한 자료가 되었는데, 문제를 제시하는 경우 이외에는 되도록 교과서를 보지 않고 문제를 해결하도록 하였다. 왜냐하면, 교과서의 하위 문항이 풀이에 대한 힌트를 주거나 □만 채우면 되는 식 등으로 해결 방법을 제시함으로써 학생들이 스스로 전략을 찾아나가는 데 방해가 되기도 했기 때문이다. 따라서 연구자가 교과서를 있는 그대로 가르치는 것이 아니라 하나의 자료로 이용하여 수업을 했을 때, 학생들은 하나의 식에 만족하지 않고 다양한 방법을 고안해내는 것을 볼 수 있었다.

(2) 교사가 느낀 어려운 점

(가) 문제 선정의 어려움

교사는 알맞은 문제를 제시하기 위해 미리 가르쳐야 할 한 단원의 내용을 분석하는 등의 시간적 노력이 많이 필요했다. 다행히 교과서의 '생활에서 알아보기' 나 8단원의 '문제 푸는 방법 찾기' 의 문장제들은 학생들에게 적당히 도전적인 경우가 많이 있었는데, 학생들이 전략을 발표하는 수준에 따라 제시할 다음 문제를 준비해 두어야 했다.

(나) 수업 진행의 어려움

수업 중 문제를 풀다가 학생들이 잘못된 방법을 발표하는 경우, 어떻게 수정해 주어야 할지, 어떤 발문을 추가로 하여야 할지 등을 빨리 판단하기 어려울 때가 있었다.

그리고 학급 학생 수가 다소 많아 모든 학생들이 한 학생의 발표에 집중하지 못하였고, 특히 발표하는 학생의 목소리가 작을 경우 집중시키기가 어려웠다. 또, 학생들이 문제를 해결하는 속도에 차이가 많고 학생들의 발표로 수업을 진행하다보니 수업 전에 계획했던 시간보다 많은 시간이 필요하였다.

(다) 학생들의 수준차로 인한 어려움

모든 학생이 100% 이해하는 수업을 진행하기 어려웠다. 또 수준차가 심해 성취도가 높은 학생은 자기가 이해한 수준에서 설명을 하는데, 문제 이해도가 어려운 학생의 경우, 다른 학생의 설명을 이해하지 못해 곤란을 겪기도 하였다.

## V. 결론 및 제언

### 1. 결 론

이상에서의 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

첫째, CGI의 원리를 적용한 수학 수업은 학생들에게 자신이 알고 있는 수학적 지식에 대하여 의사소통 할 기회를 제공해 준다. 학생들은 문제를 풀고 설명을 함으로써 자기의 생각을 확실하게 하며, 수학적 아이디어를 표현하는 능력을 기를 수 있다. 또 다른 학생의

설명을 들음으로써 다른 사람의 관점을 배우게 되며 이는 서로 다른 문제 해결 방법 사이의 장단점도 배울 수 있게 해 준다.

둘째, CGI의 원리를 적용한 수학 수업은 학생들이 수학적으로 사고할 수 있게 한다. 학생들은 자기 자신이 이해하고 있는 수학적 지식을 바탕으로 문제 해결을 위한 여러 가지 방법을 고안하려고 노력하였으며 이는 특히 '문제 푸는 방법 찾기' 의 단원에서 효과적이었다. 학생들은 문제의 뜻을 이해하려 하였고 다른 사람의 풀이에도 관심을 가졌다.

셋째, CGI의 원리를 적용한 수학 수업을 위해 교사는 알맞은 분위기를 만들어 주어야 한다. 학생들이 관심을 갖고 도전할 만한 문제, 알맞은 수학적 지식을 제공할 수 있는 문제를 제시해야 하며, 적극적으로 서로 질문을 주고받을 수 있도록 허용하고 격려해 주어야 한다. 학생들의 다소 엉뚱한 말이나 잘못된 전략도 수학적 개념을 견고하게 할 수 있으므로 긍정적인 방향으로 안내할 수 있어야 한다.

## 2. 제 언

이상의 연구 결과와 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 초등학교 3학년을 대상으로 실시하였는데, 학생들은 이미 형식화된 '기본셈' 들을 많이 알고 있는 상태에서 문제를 해결하였다. 그러나 그런 지식을 획득해 가는 과정에 있는 저학년은 문제 해결 과정에서 더욱 다양한 전략을 사용할 것으로 기대되므로 저학년을 대상으로 한 연구가 필요하다.

둘째, 학생들의 지식수준이 다양하고 전략을 사용하는 수준 또한 다양했는데, 이를 식, 답을 쓰게 하는 평가지로 평가하는 데에는 어려움이 있다. 또, 문제 해결에 적극적이고 도전적으로 참여하는 학생들에게서 많은 창의적인 생각들을 엿볼 수 있었는데, 이 학생들이 창의적인 생각을 하도록 동기를 불러일으키고 격려할 수 있는 장이 마련되어야 한다. 따라서 학생들의 이러한 사고나 행동을 평가하는 방법에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육부 (2004). **수학 3-가, 3-나.** 서울: 대한교과서 주식회사..

교육부 (2004). **수학익힘책 3-가, 3-나.** 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2003). **초등학교 수학 교사용 지도서 3-가, 3-나.** 서울: 대한교과서 주식회사.

김수환 (2001). 수학교사의 전문성 신장을 위한 기준에 관한 연구. **청주교육대학교 과학교육연구소 논문집, 24,** 41-58.

김수환 외 4인(역) (2006). **어떻게 수학을 배우지? CGI에 의한 수학학습.** 서울: 경문사, [Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathmatics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.]

김원경, 백선수 (2002). 인지적으로 안내된 교수(CGI)에 대한 고찰. **수학교육 논문집, 14,** 27-41.

김진호 (2002). 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. **학교수학, 4**(4), 555-563.

박만구 (2003). NCTM 『학교 수학의 원리와 규준』에 대한 소고. **한국초등수학교육학회지, 7,** 87-94.

방정숙 (2001). 수학교사의 교수 방법에 영향을 미치는 요소 분석. **수학교육 논문집, 12,** 331-347.

이명숙 (2003). 교사의 전문적 지식. **초등교육연구논총, 19**(1), 395-424.

이중권 (2003). 수학교육에서 질적(Qualitative) 연구 방법. **수학교육, 42**(2), 111-119.

백재민 (2004). Teaching mathematics based on children's cognition: Introduction to cognitively guided instruction in U.S., **수학교육학연구, 14**(4), 21-433.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathmatics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2001). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

<Abstract>

## A Study on Mathematics Teaching Based on CGI in Elementary Schools

Choi, Ji Eun[4]; & Shin, Hang Kyun[5]

The purpose of this study is to apply the principles of CGI(Cognitively Guided Instruction) into mathematics class in Korean elementary schools and to explore which mathematical concepts Korean students have and how they use informal knowledge and procedures to solve problems. In addition, this study tries to analyze difficulties that teachers might face when they are planning mathematics teachings based on CGI.

The conclusions of this study are followings:

First, the mathematics teaching based on CGI provides opportunity for students to communicate about mathematical knowledge that they know. The students are sure of their thoughts and learn from others by presentation.

Second, the mathematics teaching based on CGI make students think mathematically. The students try to understand the meaning of problems and find various ways.

Third, teachers should lead appropriate environment for the mathematics teaching based on CGI. They should offer proper problems and encourage their students to ask and answer questions respectively.

Keywords: Cognitively Guided Instruction, teaching mathematics, mathematical concept, communication

4) prigel96@hanmail.net
5) hkshin@snue.ac.kr