Commun. Korean Math. Soc. 21 (2006), No. 4, pp. 613–630

g등급 완전 아이디얼의 구조정리

강오진, 고형준

요 약. noetherian 국소 가환환에서 g등급 완전 아이디얼의 성질과 구조를 조사한다. 완전행렬과 일반화된 교대행렬를 이용하여 3등급 완전아이디얼의 구조를 새롭게 밝힌다.

제 1 절 머리말

R은 특별한 언급이 없으면, 극대 아이디얼 $\mathfrak{m}$을 갖는 noetherian 국소 가환환으로 가정한다. 각각의 g의 값에 대하여, g등급 완전 아이디얼 I의 성질을 조사하고 구조를 밝히고 각 등급의 완전 아이디얼의 예들을 제시한다.

일반적으로 아이디얼 I의 구조를 연구하기 위해서는 R/I의 사영분해를 구한다. 그런데 국소 가환환에서는 사영가군, 평탄가군 그리고 자유가군들은 동치개념들이므로 사영분해 대신에 자유분해를 사용하여 I의 구조를 연구할 수 있다. noetherian 국소 가환환에서 R/I의 모든 극소 자유분해들은 모두 동형인 복체이기 때문에 만약 R/I의 극소 자유분해가 존재한다면 R/I의 극소 자유분해로부터 I의 구조를 연구할 수 있다.

Buchsbaum과 Eisenbud는 유한 자유분해에 대수구조를 주고 이것을 이용하여 noetherian 국소 가환환에서 3등급 Gorenstein 아이디얼과 준완전교차 아이디얼의 구조를 발견하였다. 그 이후로 많은 사람들이 I의 극소 자유분해를 구하고 그 위에 대수구조를 주는 문제를 연구하였다. 그러나 극소 자유분해에 항상 대수구조를 줄 수 있는 것은 아니며([2], [22]), Kustin과 Miller [12]는 2가 단원이 되는 Gorenstein 국소환에서 4등급 Gorenstein 아이디얼의 극소 자유분해에 대수구조를 주었다. 그러나 그 아이디얼의 구조정리를 기술하지는 못했다. 4등급 Gorenstein 아이디얼의 구조정리를 규명하는 문제는 지금까지 미해결 문제로 남아있다. 아이디얼의 구조를 더 쉽게 이해하기 위하여 이 논문에서 교대행렬을 일반화하여 완전행렬의 개념을 소개하고 일반화된 교대행렬을 이

Received September 7, 2006.
2000 Mathematics Subject Classification: 13C05, 13C40, 14M10.
Key words and phrases: g등급 완전 아이디얼, 극소자유분해, 구조정리, 일반화된 교대행렬.

용하여 홀수 개의 최소 생성자를 갖고 Brown의 구조정리를 만족하는 3등급 완전 아이디얼의 구조를 새롭게 밝힌다.

제 2 절 기본 개념

이 절에서는 완전 아이디얼들의 정의를 알아보고 이들의 구조정리를 연구하는데 필요한 여러가지 개념과 성질을 알아본다.

정의 2.1. noetherian 국소 가환환 $(R, \mathfrak{m})$에서 I가 R의 진아이디얼이라 하자.

(1) I의 등급이 g이고 R위에서 R/I의 사영차원이 g이면 I를 g등급 완전 아이디얼이라 한다.
(2) 정규 원소열 $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_g$에 의해 생성된 아이디얼을 g등급 완전교차 아이디얼이라 한다.
(3) g등급 완전 아이디얼 I가 $g+1$개의 원소에 의해 생성될 때 I를 준완전교차 아이디얼이라 한다.
(4) I가 g등급 완전 아이디얼이고

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow F_g \xrightarrow{f_g} F_{g-1} \xrightarrow{f_{g-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 (= R)$$

가 R/I의 극소 자유분해일 때, F_g의 계수를 I의 유형이라 한다.
(5) g등급 1유형 완전 아이디얼을 g등급 Gorenstein 아이디얼이라 한다.

완전교차 아이디얼, 준완전교차 아이디얼, 그리고 Gorenstein 아이디얼들 사이에는 다음 관계가 잘 알려져 있다. Koszul 복체는 완전교차 아이디얼이 Gorenstein 아이디얼임을 보여준다. Serre는 2등급 Gorenstein 아이디얼이 완전교차 아이디얼임을 보였다 [19]. 그러나 Kunz는 준완전교차 아이디얼은 Gorenstein 아이디얼이 아님을 보였다 [15]. g등급 완전 아이디얼의 구조정리를 연구하는데 연결이론 역시 중요한 역할을 한다. 연결이론은 대부분의 경우에 Gorenstein이나 Cohen-Macaulay 환의 완전 아이디얼의 연구에 이용되지만 Golod가 보인 것처럼 임의의 noetherian 가환환의 완전 아이디얼에 대하여서도 이용할 수 있다 [8].

정의 2.2. R이 noetherian 가환환이고 I와 J가 g등급 완전 아이디얼이라 하자.

(1) $I \cap J$안에 정규 원소열 $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_g$가 존재하여 $I = (\mathbf{x}) : J$이고 $J = (\mathbf{x}) : I$이 성립하면 I는 $\mathbf{x}$에 의해 J에 (대수적으로) 연결되어 있다고 한다.
(2) I가 $\mathbf{x}$에 의해 J에 (대수적으로) 연결되어 있고 $I \cap J = (\mathbf{x})$을 만족하면 I는 $\mathbf{x}$에 의해 J에 기하적으로 연결되어 있다고 한다.

다음정리는 Gorenstein 아이디얼과 준완전교차 아이디얼이 서로 연결되어 있다는 사실을 알려준다.

정리 2.3. [5, 17] *noetherian 국소 가환환 $(R, \mathfrak{m})$에서 g등급 완전 아이디얼 I와 J가 정규 원소열 $\mathbf{x}$에 의해 연결되어 있다.*

(1) *I가 Gorenstein 아이디얼이면 J는 준완전교차 아이디얼이다.*
(2) *I가 준완전교차 아이디얼이고 $\mathbf{x}$가 I의 최소 생성자들의 집합의 한 부분집합이면 J는 Gorenstein 아이디얼이다.*
(3) *I, J가 기하적으로 연결된 아이디얼이면 $I+J$는 $g+1$등급 Gorenstein 아이디얼이다.*

완전 아이디얼의 구조정리는 대수구조를 갖는 자유분해로부터 유도할 수 있다.

정의 2.4. noetherian 국소환 $(R, \mathfrak{m})$에서 I가 g등급 완전 아이디얼이고,

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow F_g \xrightarrow{f_g} F_{g-1} \xrightarrow{f_{g-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 (= R)$$

를 R/I의 자유분해라 하자. 자유가군 F_i의 구조를 차수가 붙은 가군으로 확장시켜 결합법칙이 성립하고 다음을 만족하는 곱셈 $\mu : \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \to \mathbb{F}$가 존재할 때 $\mathbb{F}$를 대수구조를 갖는 자유분해라고 한다:

(1) $F_i F_j \subset F_{i+j}$.
(2) $x_i x_j = (-1)^{i+j} x_j x_i \quad x_i \in F_i, x_j \in F_j$ 그리고 $x_i^2 = 0$ ($i =$ 홀수).
(3) $f(x_i x_j) = f(x_i) x_j + (-1)^i x_i f(x_j)$.

만약 $f(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{m}\mathbb{F}$를 만족하면, $\mathbb{F}$를 대수구조를 갖는 극소 자유분해라고 부른다. 다음은 대수구조를 갖는 잘 알려진 아이디얼들이다.

(1) g가 음이 아닌 양의 정수일 때 g등급 완전교차 아이디얼은 Koszul 복체를 갖는다는 것이 잘 알려져 있으며 Koszul 복체는 외적 대수구조를 갖는다.
(2) 2가 단원인 Gorenstein 국소환에서 4등급 Gorenstein 아이디얼 [9, 12].
(3) 여차원 g가 3보다 크거나 같은 Herzog 아이디얼, 즉, 완전교차 아이디얼에 두 단계로 연결된 g등급 Gorenstein 아이디얼 [14].
(4) 등급 g가 3보다 크거나 같은 Northcott 아이디얼, 즉, 완전교차 아이디얼에 연결된 여차원이 g인 준완전교차 아이디얼 [3].
(5) R이 유리수체를 포함하는 가환환이라 가정할 때 속성행렬의 극대 소행렬식에 의해 생성된 아이디얼과 k가 1보다 큰 양의 정수이고 J가 정규 원소열에 의해 생성된 아이디얼일 때, $I = J^k$ [20].

(6) Huneke와 Ulrich에 의해 정의된 여차원 g가 5보다 크고 (아이디얼의)생성자들의 개수와 유형의 차이가 2인 Gorenstein 아이디얼 [21].
(7) 4등급 준완전교차 아이디얼 [10, 16].

그러나 순환가군 R/I의 극소 자유분해들이 항상 대수구조를 갖는 것은 아니다. Avramov는 1981년에 대수구조가 존재하지 않으나 자유분해를 갖는 Gorenstein 대수들이 존재한다는 것을 증명하였고 [2], 1996년에 Srinivasan도 역시 대수구조를 갖지 않지만 자유분해를 갖는 5등급 Gorenstein 아이디얼들이 존재한다는 것을 보였다 [22]. 결합법칙을 요구하지 않으면 사영분해는 항상 대수구조를 갖는다는 사실은 잘 알려져 있다 [5].

제 3 절 완전아이디얼들의 구조정리

이 절에서는 $g \leq 4$일 때 g등급 완전아이디얼의 구조정리에 대하여 알아본다. 0등급 완전 아이디얼은 존재하지 않으며 1등급 완전 아이디얼은 영인자가 아닌 원소에 의해 생성된다.

3.1. $g = 2$인 경우

noetherian 국소 가환환에서 2등급 완전 아이디얼은 모두 같은 구조를 갖고 있음을 다음 Hilbert-Burch 정리에서 알 수 있다.

정리 3.1. [7]

(1) *만약 복체*

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

가 완전하고, $F_1 \cong R^n$이면 $F_2 \cong R^{n-1}$이고 영이 아닌 인자 a가 존재하여 $I = aI_{n-1}(f_2)$를 만족한다. f_1을 나타내는 행렬의 i번째 성분은 $(-1)^i a$에 f_2를 나타내는 행렬에서 i번째 행을 삭제하여 얻은 소행렬식을 곱한 것으로 주어진다. 소행렬식 아이디얼 $I_{n-1}(f_2)$는 깊이가 정확히 2이다.

(2) *역으로 임의의 $(n-1) \times n$행렬 f_2에 대하여 소행렬식 아이디얼 $I_{n-1}(f_2)$의 깊이가 2보다 크거나 같고 영이 아닌 인자 a가 주어지면 (1)에서 얻은 함수 f_1은 $\mathbb{F}$를 $R/aI_{n-1}(f_2)$의 자유분해가 되게 한다.*

1890년에 Hilbert는 단지 자유분해의 예를 보여주기 위해 다항식환에서 여차원이 2인 차수가 붙은 아이디얼에 대하여 위의 정리를 증명하였고, 1968년에 Burch가 일반적인 경우에 대하여 위의 정리를 증명하였다. Hilbert-Burch 정리는 여차원이 2인 Cohen-Macaulay 환을 연구하는

데 매우 유용하다. 정규 국소환 S에서 I가 여차원이 2인 완전 아이디얼이고 $R = S/I$이면

$$\dim S = \mathrm{ht}(I) + \dim R = 2 + \dim R = 2 + \operatorname{depth} R$$

이고 Auslander-Buchsbaum 공식에 의하여 S위에서 R의 사영차원은 2가 된다. 한편, 정규 국소환 S에서 $(n-1)\times n$ 행렬 f의 $(n-1)\times(n-1)$ 소행렬식들이 여차원이 2인 아이디얼을 생성하면 Hilbert-Burch 정리에 의해 $R = S/I$는 여차원이 2인 Cohen-Macaulay 환이 된다.

예제 3.2. $\mathbb{Q}$는 유리수체이고 $R = \mathbb{Q}[[x,y,z]]$는 형식적 멱급수환 이다. 아이디얼 $I = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$에서 $x^2 - yz, y^2 - xz$는 정규 원소열이므로, I는 2등급 아이디얼이고 R/I의 극소 자유분해는

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{f_2} R^3 \xrightarrow{f_1} R$$

이며,

$$f_1 = \begin{bmatrix} x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} z & y \\ x & z \\ y & x \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

따라서 $I_2(f_2) = I$가 2등급 완전 아이디얼이 됨을 알 수 있다.

3.2. $g = 3$인 경우

3등급 완전 아이디얼은 다양한 구조를 갖는다. 먼저 3등급 Gorenstein 아이디얼은 최소한 홀수 개의 원소로 생성된다는 사실과 그 구조정리를 알아보기로 하자.

정리 3.3. [5] $(R, \mathfrak{m})$를 *noetherian 국소 가환환이라 하자.*

(1) *n이 3보다 크거나 같은 홀수로서 자유가군 F의 계수이고, 교대사상 $f : F^* \to F$의 상이 $\mathfrak{m}F$에 속한다고 하자. pfaffian 아이디얼 $Pf_{n-1}(f)$의 등급이 3이면 이 pfaffian 아이디얼은 Gorenstein 아이디얼이고 이 아이디얼은 n개 원소에 의해 생성된다.*

(2) *모든 3등급 Gorenstein 아이디얼은* (1)*과 같은 방식으로 만들어진다.*

Buchsbaum과 Eisenbud는 다중선형대수와 유한 자유분해에 주어진 대수구조를 이용하여 위의 정리를 증명하였다. 그 후 많은 사람들이 극소 자유분해에 대수구조를 주는 문제를 연구하였지만 지금까지 4등급 Gorenstein 아이디얼의 극소 자유분해에 대수구조를 주어서 이들 아이디얼들의 구조정리를 규명하지는 못했다. 더욱이 극소 자유분해에 항상 대수구조를 줄 수 있는 것도 아님이 밝혀졌다 [2].

3등급 Gorenstein 아이디얼에 대한 Buchsbaum-Eisenbud 구조정리의 중요한 응용중에 하나는 체 k위에 표준다항식환 $R = k[x,y,z]$ 에서 I를 3등급 제차 Gorenstein 아이디얼이라 할 때 R/I의 Hilbert 함수

에 관한 Stanley의 결과이다 [23]. 정리 3.3은 체 k위의 다항식환 $R = k[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$에 대해서도 성립한다는 것이 알려져 있다.

정의 3.4. k를 체라 하자. 음이 아닌 정수들의 수열 $\mathbf{h} = (1, h_1, \ldots, h_s)(h_s \neq 0)$가 0차원의 표준 Gorenstein k-대수의 Hilbert 함수가 될 때 $\mathbf{h}$를 Gorenstein 수열이라 한다.

1978년에 Stanley는 정리 3.3를 이용하여 $h_1 \leq 3$인 음이 아닌 정수들의 수열, $\mathbf{h} = (1, h_1, \ldots, h_s)$가 Gorenstein 수열이 되는 필요충분조건을 얻었고 이 결과는 $h_1 = 3$인 모든 Gorenstein 수열 $\mathbf{h} = (1, h_1, \ldots, h_s)$가 unimodal라는 것을 보여주고 있다.

정리 3.5. [23] *$\mathbf{h} = (1, h_1, \ldots, h_s)$가 $h_1 \leq 3$ 와 $h_s \neq 0$를 만족하는 음이 아닌 정수들의 수열이라 하자. 그러면 $\mathbf{h}$가 Gorenstein 수열이 되는 필요충분조건은 다음 두 조건을 만족하는 것이다:*

(1) *$0 \leq i \leq s$를 만족하는 각각의 i에 대하여 $h_i = h_{s-i}$이고*
(2) *$t = [\frac{s}{2}]$에 대하여, $(1, h_1 - h_0, \ldots, h_t - h_{t-1})$는 O-수열이다.*

예제 3.5. $\mathbb{Q}$는 유리수체이고 $R = \mathbb{Q}[[x, y, z]]$는 형식적 멱급수환이다. 아이디얼 $I = (x^2 - yz, xy, -xz, y^2, z^2)$에서, $x^2 - yz, y^2, z^2$는 정규 원소열이므로, I는 3등급 아이디얼이고 R/I의 극소 자유분해는

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_3} R^5 \xrightarrow{f_2} R^5 \xrightarrow{f_1} R$$

이며,

$$f_1 = \begin{bmatrix} x^2 - yz & -xy & xz & -z^2 & -y^2 \end{bmatrix}, \quad f_3 = f_1^T$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 & z & y & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & y & 0 \\ -y & -x & 0 & 0 & z \\ 0 & -y & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & -z & -x & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$Y_1 = x^2 - yz, Y_2 = -xy, Y_3 = xz, Y_4 = -z^2, Y_5 = -y^2$으로 두고 계산을 해 보면 $\mathrm{Pf}_4(f_2) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_5)$가 됨을 알 수 있다.

이제부터는 3등급 준완전교차 아이디얼의 구조정리를 기술하기 위하여 다중선형대수와 자유분해에 주어지는 대수구조에 대하여 알아보자. I를 3등급 Gorenstein 아이디얼이라면 정리 3.3에 의해 $n \times n$ 교대행렬 f가 존재하여 다음을 만족한다:

(1) $I = \mathrm{Pf}_{n-1}(f)$.
(2) n은 자유가군 F의 계수이고 양의 홀수.
(3) $\mathbb{F} : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} R$ 은 R/I의 극소 자유분해.

φ를 f에 대응하는 $\wedge^2 F$의 원소라 하고 e를 $\wedge^n F^*$의 한 생성자라고 하면 $g(a) = \varphi^{(\frac{n-1}{2})}(e)(a)$ 그리고 $f(b) = b(\varphi)$으로 주어진다. $m : F \otimes \wedge^{n-1} F \to \wedge^n F$ 를 외적 곱셈이고 $\lambda : \wedge F \to \wedge F$가 $\lambda(a) = a \wedge \varphi^{(\frac{n-3}{2})}$으로 주어지는 함수라 하자. 그러면 $\mathbb{F}$에서 차수가 1인 몇 개의 원소들의 곱셈은 m과 λ의 합성함수로 주어진다. $\wedge^k F$ 와 $\wedge^{n-k} F^*$는 동형이므로 $\mathbb{F}$는 다음의 형태로 바꿔쓸 수 있다.

$$\mathbb{F}' : 0 \longrightarrow \wedge^n F \xrightarrow{g'} \wedge^{n-1} F \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{g} R$$

여기서, f'는 합성함수

$$\wedge^{n-1} F \xrightarrow{\cong} F^* \xrightarrow{f} F$$

이고, g'도 합성함수

$$\wedge^n F \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{\cong} \wedge^{n-1} F$$

이다. $h : \wedge F \to \wedge F$를 f'과 λ의 합성함수 $h = f'\lambda$로 정의하면 다음 다이아그램을 얻을 수 있다:

$$\begin{tikzcd}
& \wedge^3 R^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\lambda"] & \wedge^2 R^n \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathbb{F}' : & \wedge^n R^n \arrow[r, "g'"] & \wedge^{n-1} R^n \arrow[r, "f'"] & R^n \arrow[r, "g"] & R.
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$가 3등급 Gorenstein 아이디얼에 있는 정규 원소열이라 하자. $\alpha : R^3 \to R^n$가 $(x_1, x_2, x_3) \subset I$의 임의의 올림사상이고 $\mathbb{K}$가 $\mathbf{x}$의 Koszul분해이면 함수 $\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{F}'$를 α와 λ로 표현할 수 있다:

$$\Phi_0 = 1, \Phi_1 = \alpha, \Phi_2 = \lambda \wedge^2 \alpha, \Phi_3 = \lambda \wedge^3 \alpha.$$

위의 기호와 표현들을 이용하여 Buchsbaum과 Eisenbud는 3등급 준완전교차 아이디얼에 대한 구조정리를 발표하였다.

정리 3.6. [5] *위의 기호와 가정이 유효하다고 하자.*

(1) *준완전교차 아이디얼 $I = (x_1, x_2, x_3) : J$은 x_1, x_2, x_3와 다음 합성함수의 상에 의해 생성된다:*

$$R \equiv \wedge^n R^{n*} \xrightarrow{\lambda^*} \wedge^3 R^{n*} \xrightarrow{\wedge^3 \lambda} \wedge^3 R^{3*} \equiv R.$$

(2) *3등급 모든 준완전교차 아이디얼 I는 Gorenstein 아이디얼 J와 정규 원소열 x_1, x_2, x_3에 대하여 (1)과 같은 방식으로 얻을 수 있다. 만약 I의 유형이 t이면 정규 원소열 x_1, x_2, x_3과 Gorenstein 아*

이디얼 J는 계수 n의 자유가군 F상의 교대사상 $f : F^* \to F$의 $Pf_{n-1}(f)$으로 나타내고 다음을 만족하도록 선택될 수 있다:

$$n = \begin{cases} t & (t : \text{홀수}) \\ t+1 & (t : \text{짝수}). \end{cases}$$

1987년에 Anne E. Brown은 위의 정리를 다른 방법으로 풀어서 썼는데 그녀의 정리를 기술하기 위해서 교대행렬의 pfaffian에 대한 성질을 알아본다.

Y를 $n\times n$교대행렬이라 하자. 임의의 $r < n$에 대하여 $\mathrm{Pf}_{i_1,i_2,\ldots,i_r}(Y)$는 Y에서 i_1번째, i_2번째, $\ldots$, i_r번째 행과 열을 삭제하고 남은 $(n-r)\times(n-r)$부분교대행렬의 Pfaffian으로 정의한다. 참고로, 교대행렬의 행렬식은 R의 어떤 원소의 완전제곱이 되며 교대행렬의 Pfaffian은 완전제곱의 원소의 제곱근으로 유일하게 결정된다. i를 다중첨자 $i_1i_2\cdots i_r$를 나타낸다고 하자. $\sigma(i)$는 i가 같은 첨자를 포함하고 있으면 0으로 정의하고 그렇지 않으면 $i_1, i_2, \ldots, i_r$를 오름차순으로 재배열하는 순열의 부호로 정의한다. $|i| = \sum_{l=1}^{r} i_l$으로 나타내고

$$Y_i = (-1)^{|i|+1}\sigma(i)\mathrm{Pf}_i(Y)$$

으로 정의한다. $r = n$이면 $Y_i = (-1)^{|i|+1}\sigma(i)$으로 정의하고 $r > n$이면 $Y_i = 0$으로 정의한다. Pfaffian도 행렬식처럼, 낮은 차수의 Pfaffian들로 전개할 수 있다.

보조정리 3.7. [1] *$Y = (y_{ij})$가 $n\times n$교대행렬이고 $a, b, c, l, j (a, b, c$:서로 다른 정수$)$들이 구간$[1, n]$ 안에 있는 정수일 때 다음이 성립한다.*

(1) $Pf(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_{kl}Y_{kl}.$

(2) $\mathbf{y}Y = 0, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{bmatrix}.$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{ij}Y_{iab} = -\delta_{ja}Y_b + \delta_{jb}Y_a.$

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{ij}Y_{iabc} = \delta_{ja}Y_{bc} - \delta_{jb}Y_{ac} + \delta_{jc}Y_{ab}.$

준완전교차 아이디얼에 대한 Brown의 구조정리는 다음과 같이 주어진다.

정리 3.8. [6]

(1) *$n > 4$인 홀수이고 $(R, \mathfrak{m})$를 noetherian 국소 가환환이라 하자. J가 3등급 $n-3$유형 준완전교차 아이디얼이면 각 성분의 원소가 극대 아이디얼에 속하는 $n \times n$ 교대행렬 Y가 존재하여 $J = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_{123})$을 만족한다.*

(2) $n > 4$인 짝수이고 $(R, \mathfrak{m})$를 noetherian 국소 가환환이라 하자. J가 3등급 $n-3$유형 준완전교차 아이디얼이면 각 성분의 원소가 극대 아이디얼에 속하는 $n \times n$ 교대행렬 Y가 존재하여 $J = (Pf(Y), Y_{12}, Y_{13}, Y_{23})$을 만족한다.

예제 3.9. $R = \mathbb{Q}[[x, y, z]]$은 유리수체 $\mathbb{Q}$위에서 형식적 멱급수환이다. 그러면 $I = (xyz, x^2, -y^2, z^2)$는 3등급 3유형 준완전교차 아이디얼이 된다. 왜냐하면, $x^2, -y^2, z^2$는 정규 원소열이고

$$0 \longrightarrow R^3 \xrightarrow{f_3} R^6 \xrightarrow{f_2} R^4 \xrightarrow{f_1} R$$

은 R/I의 극소 자유분해이므로 I의 유형은 3이다. 여기서,

$$f_1 = \begin{bmatrix} xyz & x^2 & -y^2 & z^2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 & -y & -x & 0 \\ 0 & 0 & -z^2 & 0 & yz & -y^2 \\ z^2 & 0 & 0 & -xz & 0 & -x^2 \\ y^2 & xy & x^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & -z & -y \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix}.$$

Y가 다음과 같이 주어지는 6×6 교대행렬이라 하면

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & z & y \\ 0 & y & 0 & -z & 0 & x \\ -z & 0 & 0 & -y & -x & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{Pf}(Y) = xyz, Y_{12} = x^2, Y_{13} = -y^2, Y_{23} = z^2$가 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

이제는 3등급 2유형이고 $\lambda(I) > 0$인 완전 아이디얼I의 구조정리를 알아보자. 우선 불변량 $\lambda(I)$에 대하여 살펴보기로 하자. I가 3등급 완전 아이디얼이고 $(\mathbb{F}, d)$를 R/I의 극소 자유분해라고 하자. $r_1, r_2, \ldots, r_n$를 I의 최소 생성자들이라 하고 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$를 자유가군 F_1의 기저라고 하자. $C = \operatorname{Im} d_2$라 하고 K를 d_1의 성분위에 Koszul 관계 $\{r_j e_i - r_i e_j | 1 \leq i < j \leq n\}$에 의해 생성된 C의 부분가군이라 하자. 그러면 $\lambda(I)$를

$$\lambda(I) = \dim_k(K + \mathfrak{m}C)/\mathfrak{m}C$$

으로 정의한다. $\lambda(I)$는 1982년에 Kustin과 Miller [13]가 4등급 Gorenstein 아이디얼들의 다른 형태의 자유 분해들을 구별하기 위해서 도입한 불변량이다. 다음 정리는 3등급 2유형 완전 아이디얼의 구조정리를 기술하는데 중요한 역할을 한다.

정리 3.10. [6] *noetherian 국소 가환환 $(R, \mathfrak{m})$에서 I가 3등급 2유형 완전 아이디얼이라 하자. I가 적어도 5개의 원소에 의해 생성되면, 다음은 동치이다:*

(1) $\lambda(I) > 0$
(2) *I의 최소 생성자들의 집합 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$가 존재하여 $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$ 가 정규 원소열이고 $(\mathbf{x}) : I$는 3등급 준완전교차 아이디얼이다.*

Brown은 3등급 2유형이고 $\lambda(I) > 0$인 완전 아이디얼의 구조정리를 다음과 같이 발표하였다.

정리 3.11. [6] *noetherian 국소 가환환 $(R, \mathfrak{m})$에서 $n > 4$인 정수라 하자. I가 3등급 2유형 완전 아이디얼로서 n개의 원소에 의해 생성된다고 하자. $\lambda(I) > 0$이면 성분들이 $\mathfrak{m}$에 속하는 $n \times n$ 교대행렬 $T = (t_{ij})$가 존재하여 $t_{12} = 0$이고 다음을 만족한다.*

(1) *n이 홀수이면, $I = (T_1, T_2, z_1T_{12j} + z_2T_j : 3 \le j \le n)$.*
(2) *n이 짝수이면, $I = (\mathrm{Pf}(T), T_{12}, z_1T_{1j} + z_2T_{2j} : 3 \le j \le n)$, 여기서, $z_1, z_2 \in \mathfrak{m}$.*

예제 3.12. $R = \mathbb{Q}[[x, y, z, v, w]]$은 유리수체 $\mathbb{Q}$위에서 형식적 멱급수환이고 I는 다음 6개의 원소에 의해 생성된 아이디얼이라 하자:

$$x^2 - y^2, -xyv - xyw, xzv - xzw, -yzv + yzw,$$
$$- y^2v + z^2v - y^2w - z^2w, -2xyz.$$

우리는 I가 3등급 2유형 완전 아이디얼인 것을 보일 수 있다. 우선 $-2xyz, x^2 - y^2, -y^2v + z^2v - x^2w - z^2w$는 I의 정규 원소열이라는 것을 알 수 있다. 한편, R/I의 극소 자유분해 $\mathbb{F}$는 아래와 같다:

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{f_3} R^7 \xrightarrow{f_2} R^6 \xrightarrow{f_1} R$$

여기서, $a = -y^2v + z^2v - y^2w - z^2w$으로 두면

$$f_1 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & -xyv - xyw & xzv - xzw & -yzv + yzw & a & -2xyz \end{bmatrix},$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & zv-zw & 0 & yv+yw & xyz \\ -z & 0 & 0 & 0 & -y & x & 0 \\ -y & y & 0 & -x & -z & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & -y & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -y & 0 \\ w & 0 & \frac{1}{2}(v-w) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x^2-y^2) \end{bmatrix},$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} -x^2+y^2 & 0 \\ y^2-z^2 & x^2 \\ 0 & x^2-y^2 \\ xy & xy \\ -yz & 0 \\ -xz & 0 \\ 2w & -v+w \end{bmatrix}.$$

그러므로 I의 유형은 2이다. K를 정규 원소열 $-2xyz, x^2-y^2, -y^2v+z^2v-x^2w-z^2w$에 의해서 생성된 완전교차 아이디얼이라 하자. 대수계산 시스템, CoCoA 4.6를 이용하여 $J = K : I = (x^2, y^2, z^2, xyz)$ 임을 쉽게 알 수 있다. J가 3등급 준완전교차 아이디얼이고 $-2xyz, x^2-y^2, -y^2v+z^2v-x^2w-z^2w$가 I의 최소 생성자들의 일부분이므로 정리 3.10에 의해 $\lambda(I) > 0$이 된다.

1989년에 Raefal Sanchez는 3등급 3유형, $\lambda(I) \geq 2$인 완전 아이디얼들의 구조정리를 발표하였다. 먼저 최소 생성자의 개수가 4보다 크고 3등급 3유형 완전 아이디얼들이 어떤경우에 준완전교차 아이디얼에 연결되는지 알아보자.

정리 3.13. [18] noetherian *국소 가환환* $(R, \mathfrak{m})$*에서* I*가 3등급이고 최소 생성자들의 개수가* $n(>4)$*인 완전 아이디얼이라 하자.* I*의 유형이 3 이고* $\lambda(I) \geq 2$*이면* I*는 3등급* $n-3$*유형 준완전교차 아이디얼에 연결되어 있다.*

3등급 3유형 $\lambda(I) \geq 2$인 완전 아이디얼에 대한 Rafael Sanchez의 구조정리는 다음과 같다.

정리 3.14. [18] *noetherian 국소 가환환* $(R, \mathfrak{m})$*에서* I*가 3등급이고* $n(>4)$*개 원소에 의해 생성되는 완전 아이디얼이라 하자. 만약* I*가 3유형이고* $\lambda(I) \geq 2$*이면 각 성분들이* $\mathfrak{m}$*에 속하는* $n \times n$ *교대행렬* $T = (t_{ij})$*와 각 성분들이* $\mathfrak{m}$*에 속하는* 2×3 *행렬* $X = (x_{ij})$ *가 존재하여 다음을 만족한다.*

(1) n이 홀수이면,

$$I = (T_1, x_{11}T_2 + x_{12}T_3 + x_{13}T_{123}, x_{21}T_2 + x_{22}T_3 + x_{23}T_{123},$$
$$\Delta_3 T_j + \Delta_2 T_{12j} + \Delta_1 T_{13j} | 4 \le j \le n)$$

이거나

$$I = (T_{123}, x_{11}T_1 + x_{12}T_2 + x_{13}T_3, x_{21}T_1 + x_{22}T_2 + x_{23}T_3,$$
$$\Delta_3 T_{12j} + \Delta_2 T_{13j} + \Delta_1 T_{23j} | 4 \le j \le n)$$

이다. 여기서, Δ_i는 X의 i번째 열을 삭제하여 얻은 X의 2×2 부분행렬의 행렬식이다.

(2) n이 짝수이면,

$$I = (Pf(T), x_{11}T_{12} + x_{12}T_{13} + x_{13}T_{23}, x_{21}T_{12} + x_{22}T_{13} + x_{23}T_{23},$$
$$\Delta_3 T_{1j} + \Delta_2 T_{2j} + \Delta_1 T_{123j} | 4 \le j \le n)$$

이거나

$$I = (T_{12}, x_{11}Pf(T) + x_{12}T_{13} + x_{13}T_{23}, x_{21}Pf(T) + x_{22}T_{13} + x_{23}T_{23},$$
$$\Delta_3 T_{1j} + \Delta_2 T_{2j} + \Delta_1 T_{123j} | 4 \le j \le n)$$

이다.

3.3. $g = 4$인 경우

이 절에서는 4등급 완전행렬의 개념을 도입하여 4등급 완전교차 아이디얼의 구조를 설명하겠다. 그 구조를 기술하기 전에 우선 일반화된 교대행렬에 대하여 알아보자.

정의 3.15. 곱셈에 대한 항등원 1을 갖는 가환환 R위에서 $n \times n$ 행렬 $X = (x_{ij})$에 대하여 0이 아닌 $n \times n$대각행렬 D'과 D가 존재하여 $\mathcal{A}(X) = D'XD$가 교대행렬일 때 X를 일반화된 교대행렬이라 한다. R위에서 모든 $n \times n$일반화된 교대행렬들의 집합을 $\mathrm{GA}_n(R)$로 표시한다. R에 대해 혼동할 우려가 없으면 이 집합을 GA_n으로 표시한다.

4등급 완전교차 아이디얼의 구조정리를 기술하는데 중요한 역할을 하는 4등급 완전행렬에 대하여 알아보기 전에 주어진 행렬의 부분행렬을 자세히 표현할 필요가 있다. $m \times n$ 행렬 f에 대하여 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m$ 이고 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le n$일 때, f의 i_1번째, i_2번째, $\ldots$, i_p번째 행들과 j_1번째, j_2번째, $\ldots$, j_q번째 열들이 만나는 pq개 성분들을 취하여 얻은 f의 $p \times q$ 부분행렬을 다음과 같이 표시한다: $f(i_1, i_2, \ldots, i_p | j_1, j_2, \ldots, j_q)$. $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m$ 이고 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le n$이 성립하지 않으면 p개의 행과 q개의 열이 만나는 pq개 성분들을 취하여 얻은 행렬은 부분행렬이 아니라는 것을 주의해야 한다.

정의 3.16. 곱셈에 대한 항등원 1을 갖는 가환환 R위에서 4×6 행렬 $f = (f_{ij})$가 서로 다른 4개의 4×3 부분행렬쌍 $(S_i, T_i)(i = 1, 2, 3, 4)$로 분해되어 다음을 만족하면 4등급 완전행렬이라 한다:

(1) S_i 와 T_i는 서로 소이다. 즉, $S_i = f(1, 2, 3, 4|j_1, j_2, j_3)$이고 $T_i = f(1, 2, 3, 4|\ j_4, j_5, j_6)$이면 $\{j_1, j_2, j_3\} \cap \{j_4, j_5, j_6\} = \emptyset$.

(2) S_i 와 T_i의 i번째 행을 삭제하고 남은 3×3 부분행렬들의 쌍$(\hat{S}_i, \hat{T}_i)$의 열을 각각 바꾸어서 다음을 만족하는 행렬 쌍$(\bar{S}_i, \bar{T}_i)$을 얻는다.
   (a) $\bar{S}_i$는 3×3 대각행렬이며 행렬식은 R의 어떤 원소의 세제곱으로 0이 아니다.
   (b) $u_{i_k} \in \{\pm 1\}$와 적당한 3×3 대각행렬 $D_i = \mathrm{diag}(u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3})$에 대하여 $\bar{T}_i D_i$는 교대행렬이며 $\mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_i))$는 3등급 아이디얼이다.

4등급 완전행렬의 전형적인 예는 I가 4등급 완전 아이디얼 $I = (x, y, z, w)$의 Koszul 분해 $\mathbb{K}$의 두번째 미분사상

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y & -w & -z & 0 \\ 0 & -z & x & 0 & 0 & -w \\ -w & y & 0 & 0 & x & 0 \\ z & 0 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

이다.

4등급 완전행렬은 다음 성질을 만족한다.

정리 3.17. [11] *4등급 완전행렬 f에 대하여,*

(1) *f의 모든 열은 정확히 두개의 0이 아닌 성분을 갖는다.*
(2) *f의 서로 다른 두열의 0이 아닌 성분들은 모두 같은 행에 있지 않다.*
(3) *$i(1 \le i \le 4)$에 대하여 정의 3.16에서 정의된 3×3 행렬 쌍 $(\bar{S}_i, \bar{T}_i)$은 유일하게 결정된다.*

따라서 우리는 4등급 완전행렬과 관련된 아이디얼을 정의할 수 있다. 4등급 완전행렬$f = (f_{ij})$에 대하여, $\bar{S}_i$는 f로부터 추출한 유일한 3×3 대각행렬이고 $\det \bar{S}_i = r_i^3 \neq 0 (r_i \in R)$이라는 사실로부터 r_i들에 의해 생성된 아이디얼을 $\mathcal{K}_3(f)$로 나타내자. 즉,

$$\mathcal{K}_3(f) = (r_1, r_2, r_3, r_4).$$

이제 우리는 4등급 완전교차 아이디얼의 구조를 정리할 수 있다.

정리 3.18. [11]

(1) *$(R, \mathfrak{m})$이 noetherian 국소 가환환, F 와 G의 계수는 각각 6, 4인 자유가군이다. $f = (f_{ij}) : F \to G$를 4등급 완전행렬이고 Im $f \subseteq \mathfrak{m}G$를 만족한다고 하자. 적당한 $i \neq k$에 대하여 $\mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_i))$ +*

$Pf_2(\mathcal{A}(\bar{T}_k))$이 4등급이면 아이디얼 $\mathcal{K}_3(f)$는 4등급 완전교차 아이디얼이다.

(2) $I = (x_1, x_2, x_3, x_4)$가 4등급 완전교차 아이디얼이고

$$\mathbb{F}: 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_4} R^4 \xrightarrow{\varphi_3} R^6 \xrightarrow{\varphi_2} R^4 \xrightarrow{\varphi_1} R$$

이 R/I의 극소 자유분해라면, φ_2 와 φ_3의 전치행렬은 모두 (1)을 만족한다.

다음 예제는 4등급 완전교차 아이디얼의 구조정리를 쉽게 이해할 수 있게 하여 주며 앞으로의 연구방향을 제시하여 준다.

예제 3.19. $\mathbb{C}$를 복소수체, x, y, z, w를 독립변수, $R = \mathbb{C}[[x, y, z, w]]$는 형식적 멱급수환이다.

$$P = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{bmatrix}$$

를 R위에서 2×3 행렬이고 P_i를 P에서 i번째 열을 삭제하여 얻은 2×2 부분행렬이라 하자. 그러면 $I = (\det P_1, \det P_2, \det P_3, w)$는 3등급 2유형 준완전교차 아이디얼이고 $\mathbf{a} = \det P_1, \det P_2, w$는 정규 원소열이 된다. $(\mathbf{a})$를 이 정규 원소열에 의해 생성된 아이디얼이고 $J = (\mathbf{a}) : I$이면 $I = (\mathbf{a}) : J$ 이고 $J = (w, y, z)$이다. $I \cap J = (\mathbf{a})$이므로 I 와 J는 정규 원소열 $\mathbf{a}$에 의해 서로 기하적으로 연결되어 있다. 정리 2.3에 의해 $K = I + J = (x^2, y, z, w)$는 4등급 Gorenstein 아이디얼이다. K가 4개의 원소에 의해 생성되어 있으므로 K는 완전교차 아이디얼이다. R/K의 극소 자유분해는

$$\mathbb{F}: 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_4} R^4 \xrightarrow{\varphi_3} R^6 \xrightarrow{\varphi_2} R^4 \xrightarrow{\varphi_1} R$$

이며,

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} x^2 & y & z & w \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} y & z & -w & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 & -z & -w & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & y & -z \end{bmatrix}, \varphi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w & z \\ 0 & w & 0 & -y \\ 0 & z & y & 0 \\ -w & 0 & 0 & -x^2 \\ z & 0 & -x^2 & 0 \\ y & x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} x^2 \\ -y \\ z \\ -w \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

정리 3.18의 증명 [11]에서와 같은 방식으로 두 행렬 φ_2 와 φ_3^T가 4등급 완전행렬인 것을 알 수 있다. 정의 3.16에 의하여, φ_2로부터 추출한 유일한 3×3부분행렬 쌍$(\bar{S}_i, \bar{T}_i)$들은 다음과 같다.

$$\bar{S}_1 = \begin{bmatrix} -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \quad 와 \quad \bar{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -w & -z \\ w & 0 & y \\ -z & y & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_2 = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \quad 와 \quad \bar{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -w & z \\ w & 0 & -x^2 \\ -z & x^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_3 = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \quad 와 \quad \bar{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -w & y \\ -w & 0 & -x^2 \\ y & x^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_4 = \begin{bmatrix} -w & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} \quad 와 \quad \bar{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ -z & 0 & -x^2 \\ y & -x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

확실히,

$$\bar{T}_1\mathrm{diag}(1,1,-1),\ \ \bar{T}_2\mathrm{diag}(1,1,1),\ \ \bar{T}_3\mathrm{diag}(-1,1,1),\ \ \bar{T}_4\mathrm{diag}(1,1,-1)$$

들은 모두 교대행렬이고

$$\mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_1) = (y,z,w),\ \ \mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_2) = (x^2,z,w),$$
$$\mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_3) = (x^2,y,w),\ \ \mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_4) = (x^2,y,z)$$

이 된다. $i \neq k$에 대하여 $\mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_i)) + \mathrm{Pf}_2(\mathcal{A}(\bar{T}_k)) = (x^2,y,z,w)$ 이고

$$\mathcal{K}_3(\varphi_2) = (x^2,y,z,w) = K$$

이다.

제 4 절 구조정리와 일반화된 교대행렬

이 절에서는 3등급, 2 유형, $\lambda > 0$, 홀수 개의 최소 생성자를 갖는 완전아이디얼의 Brown구조정리와 일반화된 교대행렬의 관계를 규명하고 이들 아이디얼의 구조를 새롭게 밝힌다.

정리 4.1. *R은 가환환, n은 홀수, $X \in GA_n$이다. $D' = \mathrm{diag}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$과 $D = \mathrm{diag}\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$이 대각행렬이고 $\mathcal{A}(X) = D'XD$는 교대행렬이다. $h \neq l$의 값에 대하여, u_l와 w_l는 모두 $\mathcal{A}(X)_h$의 약수이다.*

증명. pfaffian과 행렬식의 성질을 이용하여 쉽게 증명 할 수 있다. □

정리 4.2. *3보다 크거나 같은 홀수 n에 대하여 X는 noetherian 국소 가환환 $(R,\mathfrak{m})$위에서 $n\times n$ 일반화된 교대행렬이다. 단원 u_i와 w_j로 이루어진 두 개의 대각행렬 $D' = \mathrm{diag}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$과 $D = \mathrm{diag}\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$에 대하여 $\mathcal{A}(X) = D'XD$가 교대행렬이면 다음이 성립한다:*

(1) *$Pf_{n-1}(\mathcal{A}(X))$이 3등급이면 $Pf_{n-1}(\mathcal{A}(X))$는 Gorenstein 아이디얼이다.*
(2) *모든 3등급 Gorenstein 아이디얼은 (1)에서와 같은 방법으로 만들어 진다.*

증명. 정리 4.1과 정리 3.3으로부터 얻을 수 있다. □

이제 일반화된 교대행렬이 3등급, 2유형, $\lambda > 0$, 홀수 개의 최소 생성자를 갖는 완전아이디얼들의 생성자들을 어떻게 생성하는지 알아보기로 한다.

3보다 큰 홀수 n에 대하여 $Y = [y_{ij}]$가 $n\times n$교대행렬이고 $u, v \in R$이다. 일반화된 교대행렬 $X = (x_{ij})$을 다음과 같이 정의하자:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & w & vy_{13} & \cdots & vy_{1n} \\ -w & 0 & vy_{23} & \cdots & vy_{2n} \\ -y_{13} & -y_{23} & 0 & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{1n} & -y_{2n} & -y_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

$D = \mathrm{diag}\{v, v, 1, 1, \cdots, 1\}$이고 $D' = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, 1, \cdots, 1\}$이면 교대행렬 $\mathcal{A}(X)$는 다음과 같다:

$$\mathcal{A}(X) = \begin{bmatrix} 0 & vw & vy_{13} & \cdots & vy_{1n} \\ -vw & 0 & vy_{23} & \cdots & vy_{2n} \\ -vy_{13} & -vy_{23} & 0 & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -vy_{1n} & -vy_{2n} & -y_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

다음 정리는 교대행렬 $\mathcal{A}(X)$가 3등급, 2유형, $\lambda > 0$, 최소 생성자의 개수가 홀수인 완전 아이디얼의 구조를 특징짓는다는 것을 보여준다.

정리 4.3. *$(R,\mathfrak{m})$은 noetherian 국소 가환환, 3보다 큰 홀수 n, 그리고 $v, w \in \mathfrak{m}$이다. X와 $\mathcal{A}(X)$는 (4.1)과 (4.2)에서 정의된 $n\times n$ 행렬이다.*

(1) $x_i = \mathcal{A}(X)_i/v$로 두자. $I = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$이 3등급이고 $\lambda(I) > 0$이면 I는 2유형인 완전 아이디얼이다.
(2) 3등급, 2유형, $\lambda(I) > 0$, 최소 생성자의 개수가 3보다 큰 완전 아이디얼은 (1)과 같은 방법으로 만들어 진다.

증명. (1) Y는 X와 $\mathcal{A}(X)$를 정의할 때 이용한 $n \times n$ 교대행렬이라 하면 R/I의 극소 자유분해는 다음의 행렬과 사상으로 구할 수 있다:

$$V = \begin{bmatrix} -x_2 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T,$$
$$f_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix},$$
$$f_2 = \begin{bmatrix} V & X \end{bmatrix},$$
$$f_3 = \begin{bmatrix} w & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_n \\ -v & 0 & 0 & Y_{123} & \cdots & Y_{12n} \end{bmatrix}^T$$

일 때

$$\mathbb{F} : 0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{f_3} R^6 \xrightarrow{f_2} R^4 \xrightarrow{f_1} R$$

는 Buchsbaum-Eisenbud의 acyclicity 정리 [4]에 의하여 완전하다는 것을 알 수 있다. 그러므로 I는 3등급 2유형 완전 아이디얼이다.

(2) 이부분의 증명은 정리 4.1과 정리 3.11의 (1)에 의하여 명확하다. □

참고 문헌

[1] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math, vol **3** Interscience London, 1957.
[2] L. Avramov, *Obstructions to the existence of multiplicative structures on minimal free resolutions*, Amer. J. Math. **103** (1981), 1–31.
[3] L. Avramov, A. Kustin, and M. Miller, *Poincaré series of modules over local rings of small embedding codepth or small linking number*, J. Algebra **118** (1988), 162–204.
[4] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *What makes the complex exact ?*, J. Algebra **25** (1973), 259–268
[5] ———, *Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension* 3, Amer. J. Math. **99** (1977), no. 3, 447–485.
[6] A. Brown, *A structure theorem for a class of grade three perfect ideals*, J. Algebra **105** (1987), 308–327.
[7] L. Burch, *On ideals of finite homological dimension in local rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 941–948.
[8] E. S. Golod, *A note on perfect ideals, from the collection "Algebra"(A. I. Kostrikin, Ed)* Moscow State Univ. Publishing House (1980) 37–39.
[9] A. Kustin, *Gorenstein algebras of codimension four and characteristic two*, Comm. Alg. **15** (1987), 2417–2429.

[10] ———, *The minimal resolution of a codimension four almost complete intersection is DGC-algebra*, J. Algebra **168** (1994), no. 2, 371–399.

[11] O.-J. Kang and H. J. Ko, *The structure theorem for Complete Intersections of grade* 4, Algebra Collo. **12** (2005), no. 2, 181–197.

[12] A. Kustin and M. Miller, *Algebra Structures on Minimal free resolutions of Gorenstein Rings of Embedding Codimension four*, Math. Z. **173** (1980), 171–184.

[13] ———, *Structure theory for a class of grade four Gorenstein ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 287–307.

[14] ———, *Multiplication structure on resolutions of algebras defined by Herzog ideals*, J. London Math. Soc. **28** (1983), no. 2, 247–260.

[15] E. Kunz, *Almost complete intersections are not Gorenstein*, J. algebra. **28** (1974), 111–115.

[16] S. Palmer, *Multiplication Structure on resolutions of grade four almost complete intersections*, J. Algebra **159** (1993), no. 1, 1–46.

[17] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques* , Invent. Math. **26** (1974), 271–302.

[18] R. Sanchez, *A Structure Theorem for Type* 3, *Grade* 3 *Perfect Ideals*, J. Algebra **123** (1989), 263–288.

[19] J.-P. Serre, *Sur les modules projectifs*, Seminaire Dubreil, (1960).

[20] H. Srinivasan, *Algebra Structures on some canoncal resolutions*, J. Algebra **122** (1989), 150–187.

[21] ———, *Minimal algebra resolutions for cyclic modules defined by Huneke-Ulrich ideal*, J. Algebra **137** (1991), 433–472.

[22] ———, *A Grade Five Gorenstein Algebra with no Minimal Algebra resolutions*, J. Algebra **179** (1996), 362–372.

[23] R. P. Stanley, *Hilbert functions of graded algebras*, Adv. in Math. **28** (1978), 57–83.

서울시 서대문구 신촌동 134
연세대학교 수학과
120-749
E-mail: ohkang@yonsei.ac.kr
hjko@yonsei.ac.kr