Commun. Korean Math. Soc. **21** (2006), No. 4, pp. 595–612

선형보존자 문제들에 관한 연구

송석준

요 약. 선형보존자 문제들은 행렬들로 구성되는 벡터공간들 사이에서 어떤 함수, 부분집합, 관계 등을 불변하게 옮기는 선형연산자의 형태를 규명하고 그와 동치가 되는 조건들을 찾는 연구주제들을 말한다. 이 논문에서는 선형보존자 문제에 대한 전반적인 연구문제들과 연구의 동기와 원인들, 활발한 연구주제들, 연구방법들 및 앞으로의 연구방향에 대하여 요약한다.

제 1 절 서론

선형보존자 문제들(Linear Preserver Problems; LPP)의 일반적인 관심사항들은 행렬들로 구성되는 벡터공간들 사이에서 어떤 함수, 부분집합, 관계 등을 불변하게 옮기는 선형연산자(linear operator)의 형태를 규명하는데 있다.

역사적으로 이 분야에 관한 연구는 1897년에 발표된 G. Frobenius의 논문 [38]과 S. Kantor의 논문 [46]에서 시작되었다.

그 후 1992년까지 약 350여편의 논문들이 발표되었는데, 1992년에 이 분야의 연구를 위한 학술회의를 갖고, 발표된 논문들을 중심으로 논문집 Linear and Multilinear Algebra 33호를 특별호로 발행하였다 ([68]). 그리고 그동안의 논문들을 모아서 참고문헌 목록집을 만들었는데 여기에 실린 논문제목들의 수가 350여 편이었다. 그 후에도 괄목할 만큼 많은 논문들이 매년 발표되고 있다. 당시까지의 대표적 요약논문들은 R. Grone의 논문 [39]와 M. Marcus의 논문 [63] 등이 있었고, 이 특별호에 각 분야별로 선형보존자 문제들의 연구에 관한 요약된 논문들이 발표되었다.

그 이후, 다시 2001년에 Linear and Multilinear Algebra 논문집 48호에서는 이 선형보존자 문제들 만을 위한 특별호를 다시 한 번 발행한 바 있다 ([26]).

본 논문에서는, 선형보존자 문제에 대한 전반적인 연구문제들과 연구의 동기와 원인들, 활발한 연구주제들, 연구방법들 및 앞으로의 연구

Received September 7, 2006.
2000 Mathematics Subject Classification: 15A03, 15A04.
Key words and phrases: 선형연산자, 선형보존자.

방향에 대하여 요약한다. 그리고 본 연구자가 발표한 내용들을 첨부한다. 구체적인 내용들은 다음과 같다.

2절에서, 선형보존자 문제들의 일반유형들을 다룬다.

3절에서, 이 연구에 대한 몇 가지 원인을 제공한 동기들을 다룬다.

4절에서, 현재 매우 활발한 몇 가지 연구 주제들을 다룬다.

5절에서, 선형보존자 문제들의 다양성과 단일화의 양면을 다룬다.

각 절의 내용들은 이 주제에 관한 본인의 경험과 연구내용들에 기초함을 부언해 둔다. 다른 연구자라면 다른 견해와 강조점들을 다룰 수도 있겠다.

이제부터 Φ는 행렬공간 $\mathbb{M}$상의 선형연산자를 나타내는 것으로 약속하자. 행렬공간 $\mathbb{M}$은 다음 중 하나를 의미하는 것이다.

$F^{m\times n}$: 모든 $m\times n$ 행렬들의 집합으로서 그 성분들이 보통 실수 R이나 복소수 C와 같이 체(field) F에 있는 경우를 의미한다.

$S_n(F)$: F의 원소를 갖는 $n\times n$ 대칭(symmetric)행렬들의 집합을 의미한다.

$K_n(F)$: F의 원소를 갖는 $n\times n$ 의대칭(skew-symmetric)행렬들의 집합을 의미한다.

H_n : $n\times n$ 헤르미트(Hermitian)행렬들의 집합을 의미한다.

제 2 절 선형 보존자 문제들의 일반유형들

이 절에서는 선형보존자 문제들의 4가지 일반적인 유형들을 제시한다. 또한 그 각각에 대하여 예를 제시한다.

일반적인 문제유형의 첫 번째 형태는 어떤 함수를 보존하는 선형연산자의 연구와 관련된 것이다.

문제 I. f를 $\mathbb{M}$상의 한 함수(스칼라값, 벡터값 또는 집합값을 갖는 함수)라 하자. 이 때 모든 $A\in\mathbb{M}$에 대하여

$$f(\Phi(A)) = f(A)$$

를 만족하는 선형연산자 Φ의 형태를 결정하라.

이런 유형의 처음 연구는 1897년에 Frobenius가 시작하였다 ([38]). 그는 $\mathbb{M} = C^{n\times n}$이고 $f(A) = \det A$인 경우에 Φ의 유형을 결정하였는데 곧, 다음과 같다. 모든 $A\in\mathbb{M}$에 대하여

$$\Phi(A) = MAN \tag{1}$$

또는

$$\Phi(A) = MA^tN \tag{2}$$

형태이며, 여기서 M과 N은 $C^{n\times n}$의 원소들로서 $\det MN = 1$이 되어야 한다.

실제로, $f(A) = \det A$에 대하여, Frobenius는 두 가지 경우를 더 생각하였다. 곧 (i) $\mathbb{M}$이 real symmetric 행렬들(또는 홀수 차수의 skew symmetric 행렬들)의 벡터공간일 때와 (ii) $\mathbb{M} = \{A \in C^{n\times n} | \operatorname{tr} A = 0\}$일 때로 생각하였다. 이 경우들에서도 Φ의 유형은 (1)과 (2)에 나타난 것과 같은데, M과 N에는 조건이 추가된다; 곧 (i)에서는 $\det MN = 1$이 되면서, 어떤 상수 μ에 대하여 $N = \mu M^t$인 형태이어야 한다. (ii)에서는 $\det MN = 1$이면서 어떤 상수 μ에 대하여 $N = \mu M^{-1}$인 형태이어야 한다.

아래와 다른 예에서 볼 수 있듯이, 그리고 4절에서 더 논의를 할 예정인데, 사람들이 흔히 연구하는 내용들 중에는, 처음에 얻어진 독창성 있는 연구를 다른 행렬벡터공간들에 적용하거나 확장하는 연구를 하는 것들이 있다. 이 때, 다른 벡터공간에 적용한 결과는 매우 유사하더라도, 증명에 사용한 방법이나, 문제의 난이도는 매우 다르게 나타날 수 있다. 여기서 다른 선형보존자 문제들에서의 많은 선형보존자가 (1) 또는 (2)에서 나타난 것과 "같은 형태"를 가지되, 행렬 M과 N에 다른 조건을 주는 것으로 나타난다는 것을 중시할 가치가 있다고 여긴다. 몇 가지 특수한 상황에서는, 이것과 전혀 다른 형태의 선형연산자들이 나타나기도 한다.

문제 I의 변형으로서 다음과 같은 것을 생각할 수 있는데, 곧, 모든 $A \in \mathbb{M}$에 대하여

$$g(\Phi(A)) = f(A)$$

와 같은 유형으로서 g와 f는 다른 함수들이다. 물론, 이 문제에 대하여는, 먼저 Φ의 존재성문제를 해결해야 한다.

예를 들면, [64]에서 Marcus와 Minc가 증명한 바에 의하면, 모든 $A \in \mathbb{M} = R^{n\times n}$에 대하여 $\operatorname{per}\Phi(A) = \det A$가 되는 선형연산자 Φ는 $R^{n\times n}$ 상에서는 "없다"는 것이다.

일반적인 선형보존자 문제들의 두 번째 유형은 "어떤 부분집합을 보존하는 선형연산자"의 형태를 결정하는 문제이다.

문제 II. $S \subseteq \mathbb{M}$이라 하자. 이때 $\Phi(S) \subseteq S$ 또는 $\Phi(S) = S$가 되도록 하는 $\mathbb{M}$상의 선형연산자 Φ의 형태를 결정하라.

$\mathbb{M} = C^{n\times n}$이라 하고 S를 unitary group U_n이라 하자. [61]에서, Marcus는 $\Phi(S) \subseteq S$를 만족시키는 $\mathbb{M}$상의 선형연산자 Φ는 (1) 또는 (2)를 성립시키되, M과 N은 U_n의 원소이어야 한다는 것을 증명하였다. 이 결과를 [39]에서 Grone이 $m \times n$ 행렬들의 공간으로 확장시켰다. 그는 또 $AA^* = I_m$이 되는 모든 $A \in \mathbb{M} = C^{m\times n}$의 집합 S에 대하여 Φ가 $\Phi(S) \subseteq S$를 만족시키는 선형연산자가 될 필요충분조건은 (1)과 (2)가 성립하는 것이면서 $M \in U_m$이고 $N \in U_n$이어야 함을 증명하였다.

이제 $R^m(\downarrow)$를 R^m의 벡터들 중에서 비증가 순서로 배치된 모든 벡터들의 집합이라 하자. $c=(c_1,\ldots,c_m)\in R^m(\downarrow)$에 대하여, $S(c)$를 특이값(singular value) $c_1,\ldots,c_m$을 갖는 $C^{m\times n}$에 있는 행렬들 ($m\le n$을 가정함)의 집합이라 하자. 그러면 Marcus와 Grone ([40])이 생각하였던 집합 S는 $S(1,\ldots,1)$로서 간주할 수 있다.

이제 자연스럽게 어떤 고정된 $c(\neq 0)\in R^m(\downarrow)$에 대하여 $\Phi(S(c))\subseteq S(c)$를 만족시키는 선형연산자의 형태를 찾는 문제를 생각할 수 있다. Li와 Tsing ([55])은 임의의 영이 아닌 $c\in R^m(\downarrow)$으로 그 결과를 확장시켰다. 다시 복소수행렬들에 대하여 같은 종류의 결과를 얻었는데, 그 이후에 다른 체들(fields)상의 행렬들로 이 결과를 확장하려고 노력하고 있다. 실제로, 실수 행렬들 위에서 같은 문제가 연구되었다 ([58]).

문제 II의 변형 문제들로서 자연스럽게 다음과 같은 것들이 나온다. 곧, 서로 다른 $\mathbb{M}$의 두 부분집합들 S_1과 S_2에 대하여 $\Phi(S_1)\subseteq S_2$ 또는 $\Phi(S_1)=S_2$를 만족시키는 Φ의 유형을 결정하라는 것이다.

예를 들면, [53, 57, 58]에서 Li와 Tsing들은 $S(c)$를 $S(d)$로 보내는 선형연산자 Φ를 결정하는 문제를 연구하였다. 여기서 c와 d는 $R^m(\downarrow)$의 벡터들이다.

일반적인 선형보존자 문제들의 또 다른 문제는 어떤 관계를 보존하는 선형연산자의 형태를 결정하는 문제이다.

문제 III. $\mathbb{M}$상에 하나의 관계(또는 동치관계)를 $\sim$라 하자. 이때 $A\sim B$이면 , $\Phi(A)\sim\Phi(B)$ 또는 $A\sim B$일 필요충분조건이 $\Phi(A)\sim\Phi(B)$를 만족시키는 $\mathbb{M}$상의 선형연산자 Φ의 형태를 결정하라.

F를 임의의 체(field)라 하고 $\mathbb{M}=F^{n\times n}$이라 하자. 만일 $AB=BA$인 것을 $A\sim B$로 정의하는 한 관계를 $\sim$라고 하자. 예컨데 [67]에서는

"$n\ge 3$에 대하여, $AB=BA$일 때 $\Phi(A)\Phi(B)=\Phi(B)\Phi(A)$를 만족시키는 Φ가 정칙(nonsingular)인 선형연산자가 되기 위한 필요충분조건은 모든 $A\in\mathbb{M}$에 대하여

$$\Phi(A)=\alpha X^{-1}AX+f(A)I \tag{3}$$

또는

$$\Phi(A)=\alpha X^{-1}A^tX+f(A)I \tag{4}$$

의 형태이며, 여기서 X는 정칙행렬이고 α 는 실수, f는 linear functional이다."를 증명했다.

대부분의 다른 선형보존자 문제들에서와 같이, 여러 연구자들은 $S_n(R)$과 H_n ([31])과 같은 다른 행렬공간에서 같은 문제를 연구하였다. 이때 $\mathbb{M}=S_n(R)$ 또는 $\mathbb{M}=H_n$인 경우에는 X가 실수 직교행렬이거나 복소수 unitary 행렬이어야 한다는 조건을 더 가지면서 Φ가 (3) 또는 (4)에 있는 선형연산자와 똑같은 형태를 가진다는 것을 증명하였다.

이 모든 경우들에서, $n = 2$인 경우에는 (3) 또는 (4)가 아닌 유형으로서 가환성(commutativity)을 보존하는 정칙인 선형연산자가 있다는 것이 예들로서 밝혀졌다. [35]에서 Choi 등은 정칙이라는 가정없이 가환성을 보존하는 선형연산자를 연구하였다. 많은 선형보존자 문제들에서, 먼저는 정칙(nonsingularity)인 조건을 갖는 선형보존자에 대한 결과가 얻어진 후에, 이 정칙성 조건을 없애는 연구가 새로운 선형보존자 문제들을 제공하게 된다. 비정칙(singular) 선형보존자를 결정하는 것은 대체로 매우 어렵다. 또한 비정칙인 선형보존자가 존재할 수 없음을 증명하기는 더욱 어렵다.

문제 I, II, III은 어떤 면에서는 서로 관련이 있다. 먼저 하나의 함수 f가 주어지면, f의 치역에 있는 어떤 부분집합 $\mathfrak{S}$에 대하여 $f^{-1}(\mathfrak{S})$로서 하나의 부분집합 $S(= f^{-1}(\mathfrak{S}))$를 정의하여, 이 S를 보존하는 선형연산자를 연구할 수 있다.

예를 들면, 만일 $f(A) = \det A$라 할 때, $S = f^{-1}(0)$은 모든 비정칙(singular) 행렬들의 집합이 되는데, $S = f^{-1}(F\backslash\{0\})$는 모든 정칙(nonsingular) 행렬들의 집합이 된다. 실제로 이 두 가지 경우에 그 대응하는 집합을 보존하는 선형연산자 문제는 Dieudonne ([36])과 Beasley ([2])가 연구하였다.

다른 한편, 하나의 집합 S가 주어지면, 이 S가 어떤 부분집합 $\mathfrak{S}$의 역상과 같도록 하는, 적당한 함수 f를 찾는 문제를 생각할 수 있다. 이런 식으로 f의 선형보존자 (즉, 문제 I 유형의 보존자)는 집합 S의 선형보존자(즉, 문제 II 유형의 보존자)에 연관되어 질 수 있다. 또한 $\mathbb{M}$을 부분집합들 S_i로 분할(partition)하였을 때, 이 분할에 기초하여 동치관계(equivalence relation)를 정의할 수 있다. 이것은 문제 II 유형이 문제 III 유형에 관련되어 있음을 보여준다.

이제 $\mathbb{M}$상의 어떤 변환과 교환가능한 선형연산자의 연구도 일반적인 선형보존자 문제들의 하나로 인정되고 있다. 곧,

문제 IV. 변환 $f : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$가 주어졌을 때, 모든 $A \in \mathbb{M}$에 대하여

$$f(\Phi(A)) = \Phi(f(A)) \tag{5}$$

를 만족시키는 $\mathbb{M}$상의 선형연산자 Φ의 형태를 결정하라.

만일 Φ가 정칙이면 (5)식은

$$\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi = f,$$

로 쓸 수 있고, 이것은 변환 f가 Φ의 기저의 변화에 의하여 보존된다는 것을 의미한다는 것을 주목할 가치가 있다. 조건 (5)는 이 개념의 일반화이다. 이런 유형의 문제를 푸는데 이용되는 방법과 얻어진 결과는 앞의 세 가지 형태의 것들과 매우 유사함이 밝혀지고 있다.

$\mathbb{M} = C^{n\times n}$이라 하고 $f(A) = \mathrm{adj}(A)$, A의 adjoint 행렬이라 하자. [71]에서 Sinkhorn은 선형연산자 Φ가 이 f와 교환될 수 있을 필요충분조건은

(i) Φ가 (1) 또는 (2)의 유형이면서 $MN = \mu I$라는 조건을 만족시켜야 하며, 또 $\mu^{n-2} = 1$이 되는 것이든지 또는

(ii) $n = 2$이고 $\Phi(A)$가 적당한 $P, Q \in \mathbb{M}$에 대하여 $PA(f(P))$와 $QA^t(f(Q))$ 형태의 함수들의 선형결합임을 증명하였다.

이 결과는 [34]에서 Chan 등이 임의의 무한 체 F에 대하여 $F^{n\times n}, S_n(F)$와 $K_n(F)$로 확장하였다. 또 $\mathbb{M} = F^{n\times n}$이나 $S_n(F)$에서 $\Phi(e^A) = e^{\Phi(A)}$를 만족시키는 Φ의 형태를 결정하였다. 곧, 이때 Φ는 (1) 또는 (2)의 유형으로서 $MN = I$이라야 함을 보였다. 또 [33]에서 Chan과 Lim은 $\mathbb{M} = F^{n\times n}$이고 $f(A) = A^k$(k는 1보다 큰 정수)일 때, $\mathbb{M}$상의 선형연산자 Φ가 이 f와 교환가능할 필요충분조건은 Φ가 (1) 또는 (2)의 형태이고 $MN = \mu I$이며 $\mu^{k-1} = 1$이 되는 것임을 밝혔다.

제 3 절 선형보존자 연구의 동기부여와 원인들

행렬론의 많은 연구과제들은 행렬집합 상의 함수들, 행렬들의 부분집합들, 행렬들 상의 관계들, 행렬로 구성되는 벡터공간의 변환들의 영역으로 크게 분류할 수 있다. 그리고 행렬벡터공간은 선형공간이므로, 선형변환이 모든 변환들 중에서 가장 자연스러운 연구주제가 되고 있다. 이 두 가지 관찰에서 자연스럽게 선형보존자 문제들이 제공된다: 곧, 일단 "보존한다(preserve)"는 단어가 그 내용의 의미로부터 정의되기만 하면, 다음과 같은 질문들이 나오게 된다. 즉, 어떤 함수, 어떤 부분집합, 어떤 관계, 어떤 변환 등을 보존하는 선형연산자의 형태는 무엇과 같겠는가? 하는 문제가 나온다. 이것은 행렬론에서 선형보존자 문제들이 근본적이며, 이론적인 면에서 흥미있고도 중요한 문제임을 말해준다.

이와는 달리, 선형보존자 문제들의 연구를 필요로 하는 다른 동기와 원인들이 있다. 첫째로, 선형보존자 문제는 행렬론에서 어떤 기본적인 결과에 대하여 그 역의 문제를 생각할 때 자연스럽게 나타난다는 것이다.

예를 들면 $C^{n\times n}$상에서 선형연산자 Φ가 $\Phi(A) = MAN$ 또는 $\Phi(A) = MA^tN$을 만족하되 M과 N이 $C^{n\times n}$상에서 정칙행렬이라고 가정하자. 그러면 명백히 Φ는 행렬의 계수(rank)를 보존한다. 그러면 역으로, 행렬의 계수를 보존하는 선형연산자는 어떤 형태인지를 결정하라는 문제가 자연스럽게 나온다. 그 답은 Φ는 오직 (1)과 (2)의 조건들을 만족하는 것 뿐임이 알려져 있다 ([65]).

다른 한 가지 예를 들자. $C^{n\times n}$상의 선형연산자 Φ가 어떤 unitary 행렬 U에 대하여 $\Phi(A) = U^*AU$이든가 $\Phi(A) = U^*A^tU$로서 정의되었다고

하자. 그러면 Φ는 고유치, determinant, spectral norm, unitary group, Hermitian group, normal matrices, numerical range, inertia 등을 보존함이 밝혀졌다. 그러면 재미있는 문제의 하나로서, 위의 많은 성질들 중에서 어느 것이 Φ가 위의 두 가지 유형으로서 결정되게 하는가를 밝히라는 것이다. 이 문제에 답하기 위하여 연구자들은 여러 가지 선형보존자 문제들을 연구하여야 했다.

어떤 경우에서는, 선형보존자 문제들의 해결이 다른 수학분야의 문제들을 단순화시키는데 실제적으로 사용되기도 하였다. 오랜 세월동안, 사람들이 관심을 가지고 알고자 하였던 문제 중에는

$$\operatorname{per}\Phi(A) = \det A$$

를 만족시키는 $R^{n\times n}$ 상의 선형연산자 Φ가 존재하는가? 하는 것이 있다 ([69]). 이것은 행렬의 차수가 높을수록 permanent의 계산이 determinant의 계산보다 훨씬 더 어려운 것이라는 관찰에서 유래되었다고 여겨진다. 만일 $\operatorname{per}\Phi(A) = \det A$를 만족시키는 선형연산자 Φ가 있다면, permanent의 계산이 선형변환 Φ를 통하여 훨씬 더 쉬워졌을 것이다. 그렇지만 최근에 그런 선형연산자는 존재할 수 없음이 Marcus와 Minc에 의하여 [64]에서 밝혀졌다. 그 후에, 이 문제는 영이 아닌 원소가 몇 개까지 있으면, 또는 어떤 조건하에서 성립하는가 하는 문제로 계속 연구되고 있다.

다른 예는, 한 조의 미분방정식을 푸는 문제에서 나온다. 주어진 문제를 간단히 하기 위해서, 연구자들은 그 문제를 풀기 전에 그 방정식들의 한 조에 변환을 적용하고자 한다. 이때 변환은 간단명료하면서, 몇 가지 좋은 성질들을 가져야 한다. 예컨데, 한 조의 선형 미분방정식에 선형변환을 사용하여서 풀고자 할 때에, 그 방정식들의 eigenmodes와 stability를 보존하는 것이기를 바라게 된다. 이것은 자연스럽게 선형보존자 문제를 만든다.

때로는 어떤 주제에 관한 선형보존자 문제들을 연구하는 목적이, 연구할 주제를 더 잘 이해하려는 것일 수도 있다. 행렬의 표준형 이론을 연구할 때와 같은 여러 가지 경우에서, 연구자는 행렬벡터공간 상에 group action을 고려해야 하는 경우가 생긴다. 이런 경우에는 단 하나의 행렬보다는 오히려 특별한 group action으로 행렬이 어떻게 변화해 가는가를 연구의 초점으로 삼아야 한다. 이때에 기본적인 문제의 하나는 변화된 행렬을 어떻게 미분할 수 있는가가 될 수 있다. 이 문제를 연구하는 자연스러운 한 가지 방법은 두 가지로 변화된 행렬사이의 함수를 생각하는 것이다. 예컨대, 하나의 행렬을 group action으로 다른 행렬로 바꾸었을 때 그 둘을 맺어주는 한 함수가 있는가를 묻는 것이다. 특히, 그 함수가 선형이라는 제약조건이 있다면, 그 문제는 선형보존자 문제가 된다. 이런 예들은, 제 5절에서 몇 가지 특수한 방법들을 논할 때 더 논의하도록 하자.

어떤 선형보존자 문제들은 아주 일반적인 질문의 특별한 경우로 나타나기도 한다. 예컨데, Banach 공간을 연구할 때에, 연구자는 그 공간 위에서 선형 등거리 변환들(linear isometries)의 구조를 알고 싶어 할 수 있다. Banach 공간이 행렬벡터공간임을 생각한다면, 위의 문제는 하나의 선형보존자 문제로 간주될 수 있다. 이것은 매우 일반적인 경우의 수학문제가 때로는 하나의 특별한 선형보존자 문제들의 연구에 문제를 제공할 수 있음을 보여준다.

제 4 절 몇 가지 활발한 연구주제들

이미 3절의 처음에 언급한 대로, 일단 "보존한다(preserve)"가 어떤 의미로서 정의되기만 하면, 행렬들 상의 함수, 행렬들의 부분집합, 행렬들 상의 관계, 행렬벡터공간 $\mathbb{M}$의 변화로서 $C^{m\times n}$, $R^{m\times n}$ 또는 H_n 등으로 변화를 주는 경우를 생각함으로서, 연구자는 많은 다른 선형보존자 문제들을 다룰 수 있다. 더구나, 선형보존자 문제들은 여러 가지의 변화된 상황에서 연구될 수 있으므로, 연구과제들은 그만큼 더 많아서 연구할 것이 풍부하다. 이것은 이 선형보존자 문제들에 관한 참고문헌이 될 수 있는 것이 많고, 또 이 주제에 많은 노력이 기울여지는 이유가 될 수 있다. 이하에서는 몇 가지 활발한 연구주제들을 간략히 열거하며 설명하겠다.

A. 계수 보존자 (rank preserver)

하나의 양의 정수 k에 대하여, $\mathbb{M}$상에서 선형연산자 Φ가 계수 k의 보존자(rank k preserver)라는 정의는, Φ가 계수가 k인 행렬들의 집합을 그 집합 자체 내로 보내는 것은 말한다. 즉

$$\operatorname{rank}(A) = k \to \operatorname{rank}(\Phi(A)) = k$$

일 때를 말한다.

그런데 많은 선형보존자 문제들의 증명들은 계수 1의 보존자들에 크게 의존한다는 사실을 중시하여야 한다. 계수 k의 보존자에 관한 문제는 현재까지 $\mathbb{M} = C^{m\times n}$인 경우에 완전히 해결되었다 ([3]). 또 $k = 1$이고 $\mathbb{M} = F^{m\times n}$으로서 F가 characteristic이 0인 algebraically closed field일 때도 완전히 해결되었다 ([65]). 위의 두 가지 해결에서 계수 k의 보존자는 (1) 또는 (2)식과 같으며, M과 N은 어떤 정칙인 행렬들이다. 이것과 관련된 문제의 하나는 계수 k를 증가시키지 않는 함수에 관한 연구이다. 이것은 하나의 양의 정수 k에 대하여 계수가 k인 행렬들을 계수가 k보다 작거나 같은 행렬들로 보내는 선형연산자의 형태를 결정하라는 문제이다 ([2]). 이 문제들은 또한 행렬벡터공간에서 tensor 벡터공간으로 확장될 수 있으며 이에 대한 연구결과는 [32, 37, 65]에 있다.

최근에 이 계수 보존자에 관한 연구는 반환과 부울대수 상의 행렬들의 집합 위로 확장되어 연구되고 있다. 이러한 대수적 구조 위에서는 행렬의 계수를 새롭게 정의하게 된다. 곧, $m \times n$ 행렬 A의 반환계수(semiring rank) 또는 분해계수(factor rank)는 주어진 반환 상에서 행렬 A를 $m \times k$ 행렬 B와 $k \times n$ 행렬 C의 곱으로 나타낼 수 있는 최소의 k로서 정의한다. Beasley와 Pullman ([10])은 이 정의에 의하여 (0,1) 부울대수 반환 상에서 이 반환계수를 보존하는 선형연산자의 형태를 처음으로 연구하게 되었는데, 그 결과는 (1) 또는 (2)식과 같으며, M과 N은 어떤 정칙인 행렬들임을 밝혔다. 그 후 이들은 비음의 정수 ([9, 22])와 퍼지 반환 ([11]) 상의 반환계수를 보존하는 선형연산자의 구조를 규명하였다.

한편, 반환상의 행렬들에서는 행렬의 반환계수가 열계수(column rank)와는 다른 값을 갖게 된다 ([13]). 이 점에 착안하여 Song은 그의 여러 동료 연구자들과 반환상의 행렬들에 대하여 열계수를 보존하는 선형연산자를 규명하였다. 먼저는 부울대수 ([72, 81, 84]) 상의 열계수 보존자에서 시작하여 퍼지 반환 ([73, 83]), 비음의 정수 반환 ([76]), 비음의 실수 반환 ([24, 78]), max algebra ([79]) 등으로 연구를 확장하였다. 그 외에도 열계수와 다른 극대열계수(maximal column rank) ([44, 75, 84]), 유도열계수(spanning column rank) ([74, 78])등에 관한 보존성 문제를 연구하였다.

조합론과 관련하여 중요한 개념인 항별계수(term-rank)는 주어진 행렬의 영이 아닌 모든 원소를 덮는데 필요한 최소의 행과 열의 개수로 정의한다 ([12]). 또한 이와 대비되는 영항계수(zero-term rank)는 주어진 행렬의 모든 영원소를 덮는데 필요한 최소의 행과 열의 개수로 정의한다 ([25]). 이 두 개념에 대한 보존자 문제를 생각할 수 있다. 이에 관한 연구결과는 Beasley와 Song의 반환상의 특성연구들로 나타난다 ([23, 26]).

B. 관성 보존자 (inertia preserver).

$\mathbb{M}$을 H_n 또는 $S_n(R)$이라 하자. $\mathbb{M}$의 한 행렬 A가 관성(Inertia) (r, s, t)를 갖는다는 정의는 A가 r개의 양수 고유치들, s개의 음수 고유치들, t개의 영인 고유치들을 갖는 것이다. 관성 (r, s, t)를 갖는 $\mathbb{M}$에 있는 행렬들의 집합을 $G(r, s, t)$로 나타내자. 선형연산자 Φ가 $G(r, s, t)$ 보존자라는 정의는 Φ가 $G(r, s, t)$를 그 자체내부로 보내는 것이다.

현재까지 $G(n, 0, 0)$을 보존하는 선형연산자의 형태를 결정하라는 문제가 미해결로 남아있는데, 일반적으로 매우 어려울 것으로 예상하고 있다.

Johnson과 Pierce가 [45]에서 다음과 같은 문제를 제안하였다.

$n \geq 3, r > 0, s > 0$일 때, Φ가 $G(r, s, t)$의 보존자가 될 필요충분조건은 (1)과 (2)가 성립하는 것으로서 $M = \mu N^*$이어야 하며, 단 $\mu = \pm 1$이

라는 것이다. Φ가 정칙(nonsingular)임을 가정한다면 이 제안은 성립한다. 이 조건 없이는 [36]에서 $r \neq s$일 때만 Loewy가 증명하였다. 이 주제에 관한 다른 관련된 결과들은 [60]에서 Loewy가 보고서를 낸 것을 참고하면 된다.

C. 대수적 집합 보존자 (algebraic set preserver)

$\mathbb{M}$의 부분집합 S가 대수적 집합(algebraic set)이라는 정의는 행렬의 원소들을 변수로 갖는 유한개의 다항식들의 공통근의 집합을 말한다. 예를 들면 determinant가 영이 되는 모든 행렬들의 집합은 대수적 집합이다. 그러면 S를 보존하는 Φ는 대수적 집합 보존자가 된다. 정방행렬에 대하여는 집합 S는 곱셈군이 될 수 있다. 이 경우에 Φ는 대수적 군의 보존자가 된다. 중요한 연구 과제는 "행렬들의 원소들을 변수로 갖는 고정된 다항식 함수를 보존하는 $\mathbb{M}$상의 Φ의 형태를 결정하라"는 것이다.

최근에, 행렬다항식의 근의 집합을 보존하는 선형연산자에 대한 연구가 시작되었다 ([5, 6]). 이것은 반환상에서 시작하였지만, 체 상에서도 아직 연구되지 않은 문제들이다. 그리고 행렬의 계수와 관련된 부등식을 생각하여 이 부등식의 극치의 경우에 해당하는 행렬의 집합을 보존하는 선형연산자를 연구하기도 하였다 ([8]). Song 등은 이 문제를 반환상의 행렬의 열계수와 관련된 부등식의 극치문제로 확장하여 연구하였다 ([7]).

이 모든 문제들에 대수기하와 대수학의 테크닉을 사용하는 것은 자연스럽다. 이 유형의 많은 문제의 결과들에서 Φ는 (1) 또는 (2)의 유형으로서 M과 N에 특수한 조건이 부과되었다. 이 주제의 보다 자세한 것은 Pierce의 [66]에 자세히 언급되어 있다.

D. 특이값의 함수 (function of singular values)

$\mathbb{M} = C^{m\times n}$ 또는 $R^{m\times n}$상의 함수 f가 단일적 불변함수(unitarily invariant function)라는 정의는 그 함수의 값이 오직 특이값들(singular values)에만 의존하는 것을 말한다. 곧 A와 B가 똑같은 특이값들만을 가질 때는 언제나 $f(A) = f(B)$가 되는 경우를 말한다. 특별히 중요한 것은 $\mathbb{M}$상의 단일적 불변 노름(norm)에 관한 연구이다. 행렬의 특이값들 위에서 어떤 함수를 보존하는 Φ의 형태를 결정하기 위하여 많은 연구가 있었다. 분명히, f가 단일적 불변함수이고, Φ가 (1) 또는 (2)로서 M과 N이 유니터리(unitary) 행렬들이라면, Φ는 f를 보존한다. 또 그 역이, 많은 단일적 보존함수들 f에 대하여 성립한다는 것은 중시할 가치가 있다. 이 부분의 내용은 [32]를 참고하라. 이 분야의 중요한 문제는, Φ가 f를 보존하기 위한 필요충분조건이 Φ가 행렬들의 특이값들을 보존하는 것이 되는, 그러한 단일적 불변 함수 f에 어떤 조건이 있어야 하는가를 결정하는 것이다. 이 경우에, 적당한 유니터리 행렬들 M, N에

대하여 Φ는 (1) 또는 (2)의 형태가 되고, 또 Φ는 $S(c)$를 보존하여야 한다. 단, $c \in R^m(\downarrow)$이다 ([53], [58]).

E. 수치영역과 수치반경 (numerical range and radius).

$\mathbb{M} = C^{n\times n}$ 또는 H_n이라고 하자.

$$W(A) = \{x^*Ax | x \in C^n, x^*x = 1\}$$

을 A의 수치영역(numerical range of A)이라고 정의한다. 이 수치영역은 하나의 행렬 A를 집합 $\{x^*Ax | x^*x = 1\}$에 대응시키는 함수로 간주할 수 있다. 수치 영역에는

$$r(A) = \max\{|z| : z \in W(A)\}$$

로 정의되는 A의 수치반경(numerical radius)을 연결시킬 수 있다. 이 때 수치반경은 행렬을 하나의 스칼라에 대응시키는 함수로 볼 수 있다.

밝혀진 내용 중에는 $\mathbb{M}$상의 Φ가 행렬들의 수치영역을 보존할 필요충분조건은 Φ가 (1) 또는 (2)의 형태이면서, $M = N^*$이고 $MN = I$이라는 것이 있다.

또 Φ가 행렬들의 수치반경을 보존할 필요충분조건은 Φ가 수치영역을 보존하는 다른 선형연산자 ψ의 스칼라 곱이 되는 것이다 ([49]).

수치영역과 수치반경의 많은 일반화가 있다. 그에 따라서 대응하는 선형보존자 문제들도 많고 연구의 영역이 넓어진다. 일반화된 수치영역 보존자들에 관한 많은 결과들이 알려져 있지만, 대응하는 수치반경 보존자들이 그들의 스칼라 곱이 되는가를 증명하는 문제가 관심을 끌고 있다.

F. 관계의 선형보존자 (linear preservers of relation)

2절에서 가환성(commutativity)을 보존하는 Φ에 대한 문제를 언급한 바 있다. 이 문제는 Beasley와 Pullman에 의하여 부울대수와 퍼지 반환 상의 문제로 일반화 되었다 ([17]). 그 후 Song은 그의 동료들과 함께 이 문제를 일반적인 부울대수와, 비음의 정수 반환, 비음의 실수 그리고 max algebra 등으로 확장하여 연구결과를 얻었다 ([1, 80]). 그 결과의 선형연산자 Φ는 거의가 (1)과 (2)의 형태로 규명되었다.

한편 재귀행렬(idempotent matrix)과 멱영행렬(nilpotent matrix)의 집합을 보존하는 선형연산자도 규명되었다 ([18]). 이에 관한 연구들이 체에서 반환 ([19]) 상으로 그리고 부울대수 상으로 확장되어 왔다. 그리고 재귀행렬을 일반화하여 r-potent 행렬의 집합을 보존하는 선형연산자가 Beasley와 Lee에 의하여 연구되었다 ([21]).

여러 연구자들은 동치관계와 행렬들의 표준형과 관련있는 관계들에 관한 선형보존자 문제들을 생각하였다.

예를 들면 Horn 등은 $C^{n\times n}$상의 상사성(similarity)에 관한 선형보존자들을 연구하였다. 또 많은 유사한 문제들을 단일화시켜 보려는 연구도 진행되어 왔다 ([43]).

동치관계들 상의 많은 선형보존자 문제들은 행렬들 상의 group actions과 관계가 있음이 밝혀지면서, 그들을 풀기 위하여 미분기하의 방법이 사용되고 있다.

G. 반환 또는 부울 대수 상의 선형보존자.

지금까지 논한 선형보존자 문제들은 대부분 체(fields)상의 행렬들을 다루었지만, 같은 선형보존자 문제들을 반환(semiring)이나 부울 대수 상의 행렬들에 옮겨서 연구할 수 있다. 실제로, 이런 대수적 구조들 위에서 선형보존자 문제들을 연구하기 위하여 많은 재미있고 중요한 문제들과 연구방법들이 도입되었다. 이런 문제들에 대하여는 Beasley와 Pullman, Song 교수가 중심이 되어 많은 연구가 진행되었다. 현재 이 분야에 대하여는 많은 참고문헌들과 미해결 문제들이 남아 있어서 활발한 연구가 진행되고 있다. 앞의 계수 보존자에서도 언급하였지만, 반환 상에서는 행렬의 반환 계수(semiring rank)와 열 계수(column rank)의 값이 다르게 나타난다. 그래서 그들의 차이를 규명하는 연구도 있고 ([13, 22, 74]), 또 이에 기초하여 열계수와 관련된 선형보존자 문제도 연구되어 왔다. 그 결과는 (1)과 (2)의 형태 중에서 우측의 가역행렬에 조건이 강화되는 형태가 되었다 ([72-84]).

한편, 주어진 행렬의 계수가 1일 때는 이 행렬을 열벡터와 행벡터의 곱으로 분해할 수 있는데, 이 때 이 열벡터와 행벡터에 있는 영 아닌 원소들의 개수를 주변길이(perimeter)로 정의한다. 이 주변길이의 보존자에 관한 연구도 반환상에서 이루어졌다 ([77]). 이 결과는 행렬의 계수가 1보다 큰 경우로 확장되어 연구되고 있다.

그리고 그래프이론의 많은 정의들을 활용하여 그들의 보존자에 대한 연구도 발표되고 있다 ([14-17, 20]).

제 5 절 다양화와 단일화

앞 절의 여러 가지 연구주제들을 통해서, 선형보존자 문제들은 매우 많은 연구영역들로 나누어졌고, 또 각 영역들에는 수많은 변형문제들이 있음을 분명히 볼 수 있었다. 이것은 다음과 같은 이유들로 연구자들에게는 매우 바람직한 현상이다. 곧,

첫째로 함수들, 부분집합들, 관계들, 변환들을 다르게 생각하여 새로운 선형보존자 문제들을 만들 수 있다.

둘째는 주어진 행렬공간을 변화시켜서 새로운 선형보존자 문제들을 만들 수 있다.

셋째는 이미 나온 결과들에서 어떤 조건들을 변화시켜서 새로운 선형보존자 문제들을 만들 수 있다.

넷째는 하나의 선형보존자 문제들을 행렬공간 내에서 변화시키는 대신에, 연산자 대수나 텐서공간으로 일반화하여 역시 새로운 선형보존자 문제들을 만들 수 있다.

그러나, 확실한 것은 다른 선형보존자 문제들은 그들을 풀기 위하여 다른 도구나 테크닉들이 요청된다는 사실이다.

예를 들면, $C^{n\times n}$상에서 계수 k의 보존자에 관한 선형보존자 문제들의 해답은 계수 k인 행렬들과 영 행렬들만을 포함하는 행렬들의 부분공간의 구조에 달려있는데 반하여, 상사성 보존자들에 관한 증명은 탄젠트 공간이론을 사용하였다는 점이다.

따라서 선형보존자 문제들의 다양화는 다양한 다른 도구들과 테크닉들을 만들어낸다. 반대로 이 똑같은 다양화가 다양한 선형보존자 문제들의 단일화의 가능성을 제시해 주는 점이 있다.

예들 들어, 가환성에 관한 선형보존자 문제들을 생각하자. 그 문제는 여러 가지 다른 행렬공간에서 고려되어 연구되었다 ([1, 31, 35, 67, 69, 85]). 다른 행렬 공간들 위에서 다양한 결과들의 증명방법을 아는 것만으로도, 일반적인 가환성 보존자 문제들에 관한 증명의 구성요소들을 단일화시킬 수 있다.

서로 다른 선형보존자 문제들을 단일화시켜보려는 시도가 여러 가지 있다. 먼저는 다른 문제들을 해결하기 위하여 일반적인 테크닉이나 방법을 찾아보는 것이다. 이런 생각에 대한 좋은 설명은 Pierce와 Watkins의 논문 [67]에 있다. 그 논문에서 저자들은 두 가지 무관한 선형보존자 문제들, 곧, $C^{n\times n}$상에서 가환성 보존자들과 k-수치영역 보존자들을 동시에 풀기 위하여 사영기하학을 사용하였다. 다른 예는 Botta의 논문들 [28, 29]에 있는데, 그는 많은 선형보존자 문제들을 증명하거나 다른 증명법을 얻기 위하여 대수기하의 결과들을 사용하였다. 또 Li와 Tsing은 선형등거리(isometry) 문제들을 풀기위하여 미분기하학에서 나온 결과들을 쌍대성원리와 함께 이용하였다 ([52, 53]). 사실상, 연산자이론, 조합론, 그래프이론, 추상대수학, 다중 선형대수 등의 다양한 도구들이 다른 선형보존자 문제들을 해결하기 위하여 사용되었다. C. R. Johnson이 지적한대로, 선형보존자 문제들의 어떤 증명들은 알려진 선형보존자들 결과의 어떤 것도 사용하지 않은 것들도 있다. 즉, 사용한 테크닉이 모든 다른 문제들에서 사용한 방법과 다른 것이다 ([27, 41]).

그렇지만, 많은 다른 접근방법이 있음에도 불구하고, 대부분의 선형보존자 문제들의 결과는 매우 닮았다. 그래서 모든 증명을 포함하는 일반적인 원리가 있지 않을까 하는 생각을 하게 된다. 그렇지 않으면, 대부분의 선형보존자 문제들을 다룰 수 있는 일반적인 방법이라도 찾을 수 없을까 하는 문제를 생각할 수 있다.

서로 다른 선형보존자 문제들을 단일화하기 위한 방법은 그들에 대한 일반적인 공식을 찾는 것이다. 여러 가지 문제들에 대한 일반적인 공식을 가지게 되면, 그들을 풀 때에 몇 가지 제도화된 테크닉과 전략을 사용할 수 있을 것이다. 예를 들면, 대수적 집합 보존자들을 연구할 때 대수기하를 사용하는 것은 매우 자연스럽다 ([30]). 선형등거리 문제를 연구하기 위해서는 주어진 노름들에 관한 단위구(unit ball)들을 연구하는 것이 자연스럽다 ([40, 53]). 또 어떤 동치관계를 보존하는 선형연산자를 연구하기 위해서는 그 동치류들의 기하학적 성질들을 연구하는 것이 자연스럽다 ([43, 50]).

일반적인 테크닉과 일반화된 공식들을 사용하지 않고, 서로 다른 선형보존자 문제들을 관련 지우는 다른 방법이 있다. 예를 들면, 이런 경우에는 선형보존자의 쌍대변환을 연구하는 방법이다. 때때로, 쌍대변환은 선형보존자의 다른 유형을 제시하기도 한다. 그래서 그 문제를 공략하기 위하여 사용될 수 있는 다양한 도구들을 추가할 수 있다. 또 얻을 수 있는 결과를 배가시키는 효과도 얻을 수 있다.

이상에서 우리는 선형보존자 문제들을 연구하는 여러 가지 문제들과 그 문제들을 풀기 위하여 사용하는 방법들을 살펴보았다. 이 연구는 앞으로도 행렬이론과 선형대수학의 연구에 중심과제로 많은 연구자들의 관심과 연구속에 계속 진행 될 것으로 여겨진다.

참고 문헌

[1] R. B. Bapat, S. Pati and S. Z. Song, *Rank preservers of matrices over max algebra*, Linear and Multilinear algebra **48** (2000), 149–164.

[2] L. Beasley, *Linear transformations on matrices: The invariance of commuting pairs of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **6** (1978), 179–183.

[3] ———, *Rank k-preservers and preservers of sets of ranks*, Linear Algebra Appl. **55** (1983), 11–17.

[4] ———, *Linear operators on matrices: The invariance of rank-k matrices*, Linear Algebra Appl. **107** (1988), 161–167.

[5] L. Beasley, A. Guterman, S. G. Lee, and S. Z. Song, *Linear transformations preserving the Grassmannian over $M_n(Z_+)$*, Linear Algebra and Its Applications, **393** (2004), 39–46.

[6] ———, *Linear preservers of zeros of matrix polynomials*, Linear Algebra and Its Applications **401** (2005), 325–340.

[7] ———, *Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: Row and column ranks*, Linear Algebra and Its Applications **413** (2006), 495–509.

[8] L. Beasley, S. G. Lee, and S. Z. Song, *Linear operators that preserve pairs of matrices which satisfy extreme rank properties*, Linear Algebra and Its Applications **350** (2002), 263–271.

[9] L. Beasley and N. Pullman, *Nonnegative rank preserving operators*, Linear Algebra Appl. **65** (1985), 207–223.

[10] ———, *Boolean-rank-preserving operators and Boolean-rank-1 spaces*, Linear Algebra Appl. **59** (1984), 55–77.

[11] ———, *Fuzzy rank-preserving operators*, Linear Algebra Appl. **73** (1986), 197–211.
[12] ———, *Term-rank, permanent and rook polynomial preservers*, Linear Algebra Appl. **90** (1987), 33-46.
[13] ———, *Semiring rank versus column rank*, Linear Algebra Appl. **101** (1988), 33–48.
[14] ———, *Linear operators strongly preserving primitivity*, Linear and Multilinear Algebra **25** (1989), 205–213.
[15] ———, *Linear operators preserving digraphs whose maximum cycle length is small*, Linear and Multilinear Algebra **28** (1990), 111–117.
[16] ———, *Linear operators preserving properties of graphs* , Congruss Numerantium **70** (1990), 105–112.
[17] ———, *Linear operators strongly preserving commuting pairs of Boolean matrices*, Linear Algebra Appl. **132** (1990), 137–143.
[18] ———, *Linear operators preserving idempotent matrices over fields*, Linear Algebra Appl. **146** (1991), 7–20.
[19] ———, *Linear operators strongly preserving idempotent matrices over semirings*, Linear Algebra Appl. **160** (1992), 217–229.
[20] ———, *Linear operators that strongly preserve graphical properties of matrices*, Discrete Math. **104** (1992), 143–157.
[21] L. Beasley and S. G. Lee, *Linear operators preserving r-potent matrices over semirings*, Linear Algebra Appl. **164** (1992), 589–600.
[22] L. B. Beasley and S. Z. Song, *A comparison of nonnegative real ranks and their preservers*, Linear and Multilinear Algebra **31** (1992), 37–46.
[23] ———, *Linear operators that preserve zero-term rank over fields and rings*, Linear Algebra and Its Applications **341** (2002), 143–149.
[24] L. Beasley, S. Z. Song, K. T. Kang, and B. Sarma, *Column ranks and their preservers over nonnegative real matrices*, Linear Algebra and Its Applications **399** (2005), 3–16.
[25] L. B. Beasley, S. Z. Song and S. G. Lee, *Linear operators that preserve zero-term rank of Boolean matrices*, J. Korean Math. Soc. **36** (1999), no. 6, 1181–1190.
[26] ———, *Zero-term rank preservers*, Linear and Multilinear Algebra **48** (2001), no. 4, 313–318.
[27] A. Berman, D. Hershkowitz, and C. R. Johnson, *Linear transformations that preserve certain positivity classes of matrices*, Linear Algebra Appl. **68** (1985), 9–29.
[28] E. P. Botta, *Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices*, Linear Algebra Appl. **20** (1978), 45–49.
[29] ———, *Linear transformations preserving the unitary group*, Linear and Multilinear Algebra **8** (1979), 89–96.
[30] E. P. Botta and S. Pierce, *The preservers of any orthogonal group*, Pacific J. Math. **70** (1977), 347–359.
[31] G. H. Chan and M. H. Lim, *Linear transformations on symmetric matrices that preserve commutativity*, Linear Algebra Appl. **47** (1982), 11–22.
[32] ———, *Linear transformations on tensor spaces*, Linear and Multilinear Algebra **14** (1983), 3–9.

[33] G. H. Chan, M. H. Lim, and K. K. Tan, *Linear preservers on powers of matrices*, Linear Algebra Appl., **162** (1992), 615–626.

[34] ______, *Linear preservers on matrices*, Linear Algebra Appl. **93** (1987), 67–80.

[35] M. D. Choi, A. A. Jafarian, and H. Radjavi, *Linear maps preserving commutativity*, Linear Algebra Appl. **87** (1987), 227–241.

[36] J. Dieudonne, *The Automorphisms of the Classical Groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **2** (1949).

[37] D. Z. Djokovic, *Linear transformations of tensor products preserving a fixed rank*, Pacific J. Math., **30** (1969), 411–414.

[38] G. Frobenius, *Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, (1897), pp. 994–1015.

[39] R. Grone, *Isometries of Matrix Algebras*, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Santa Barbara, (1976).

[40] R. Grone and M. Marcus, *Isometries of matrix algebra*, J. Algebra **47** (1977), 180–189.

[41] D. Hershkowitz and C. R. Johnson, *Linear transformations which map the P-matrices into themselves*, Linear Algebra Appl. **74** (1986), 23–38.

[42] F. Hiai, *Similarity preserving linear maps on matrices*, Linear Algebra Appl. **97** (1987), 127–139.

[43] R. Horn, C. K. Li, and N. K. Tsing, *Linear operators preserving certain equivalence relations on matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **12** (1991), 195–204.

[44] S. G. Hwang, S. J. Kim and S. Z. Song, *Linear operators that preserve maximal column rank of Boolean matrices*, Linear Multilinear Algebra **36** (1994), no. 4, 305–313.

[45] C. R. Johnson and S. Pierce, *Linear maps on hermitian matrices: The stabilizer of an inertia class II*, Linear and Multilinear Algebra **19** (1986), 21–31.

[46] S. Kantor, *Theorie der Äquivalenz von linearen ∞ Scharen bilinearer Formen, Sitzungsber. Münchener Akad.*, (1987), pp. 367–381.

[47] S. Kirkland and N. J. Pullman, *Linear operators preserving invariants of nonbinary matrices*, Linear and Multilinear Algebra **33** (1992), 295–300.

[48] A. Kovacs, *Trace preserving linear transformations on matrix algebras*, Linear and Multilinear Algebra **4** (1976/77), 243–250.

[49] C. K. Li, *Linear operators preserving the numerical radius of matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 601–608.

[50] C. K. Li, L. Rodman, and N. K. Tsing, *Linear operators preserving certain equivalence relations originating in system theory*, Linear Algebra Appl. **161** (1992), 165–226.

[51] C. K. Li, B. S. Tam, and N. K. Tsing, *Linear operators preserving the (p,q) numerical range*, Linear Algebra Appl. **110** (1988), 75–89.

[52] C. K. Li and N. K. Tsing, *Duality between some linear preserver problems: The invariance of the c-numerical range*, the c-numerical radius and certain matrix sets, Linear and Multilinear Algebra **23** (1988), 353–362.

[53] ______, *Duality between some linear preserver problems.II. Isometries with respect to c-spectral norms and matrices with fixed singular values*, Linear Algebra Appl. **110** (1988), 181–212.

[54] ______, *Linear operators preserving unitarily invariant norms on matrices*, Linear and Multilinear Algebra **26** (1990), 119–132.

[55] ———, *Linear operators preserving certain functions on singular values of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **26** (1990), 133–143.
[56] ———, *Linear operators preserving unitary similarity invariant norms on matrices*, Linear and Multilinear Algebra **27** (1990), 213–224.
[57] ———, *Duality between some linear preserver problems.III. c-spectral norms on (skew)-symmetric matrices and matrixes with fixed singular values*, Linear Algebra Appl. **143** (1991), 67–97.
[58] ———, *Linear operators leaving a class of matrices with fixed singular values invariant*, Linear and Multilinear Algebra, **34** (1993), 41–49.
[59] R. Loewy, *Linear maps which preserve an inertia class*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **11** (1990), 107–112.
[60] R. Loewy and S. Pierce, *Linear preservers of balanced singular inertia classes*, Linear Algebra and its Applications, **201** (1994), 61–77.
[61] M. Marcus, *Linear operators leaving the unitary group invariant*, Duke Math. J. **26** (1959), 155–163.
[62] ———, *Linear operations on matrices*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 837–847.
[63] ———, *Linear transformations on matrices*, J. Res. Nat. Bur. Standards **75B** (1971), 107–113.
[64] M. Marcus and H. Minc, *On the relation between the permanent and the determinant*, Illinois J. Math. **5** (1962), 327–332.
[65] M. Marcus and B. Moyls, *Transformations on tensor product spaces*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1215–1221.
[66] S. Pierce, *Linear maps on algebraic groups*, Linear Algebra Appl. **162** (1992), 237–242.
[67] S. Pierce and W. Watkins, *Invariants of linear maps on matrix algebras*, Linear and Multilinear Algebra **6** (1989/79), 185–200.
[68] S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems*, Linear and Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
[69] G. Polya, *Aufgabe 424*, Arch. Math. u. phys. **203** (1913), 271.
[70] H. Radjavi, *Commutativity-preserving operators on symmetric matrices*, Linear Algebra Appl. **61** (1984), 219–224.
[71] R. Sinkhorn, *Linear adjugate preservers on complex matrices*, Linear and Multilinear Algebra **12** (1982/83), 215–222.
[72] S. Z. Song, *Linear operators that preserve column rank of Boolean matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **119(4)** (1993), 1085–1088.
[73] ———, *Linear operators that preserve column rank of fuzzy matrices*, Fuzzy Sets and Systems **62** (1994), 311–317.
[74] ———, *On spanning column rank of matrices over semirings*, Bull. Korean Math. Soc. **32** (1995), 337–342.
[75] ———, *A comparison of maximal column ranks of matrices over related semirings*, J. Korean Math. Soc. **34** (1997), no. 1, 213–225.
[76] ———, *Linear operators that preserve maximal column ranks of nonnegative integer matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2205–2211.
[77] S. Z. Song, L. Beasley, G. S. Cheon and Y. B. Jun, *Rank and perimeter preserver of Boolean rank-1 matrices*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), no. 2, 397–406.

[78] S. Z. Song and S. G. Hwang, *Spanning column ranks and their preservers of nonnegative matrices*, Linear Algebra and Its Applications **254** (1997), 485–495.
[79] S. Z. Song and K. T. Kang, *Column ranks and their preservers of matrices over max algebra*, Linear and Multilinear Algebra **51** (2003), no. 3, 311–318.
[80] ______, *Linear maps that preserve commuting pairs of matrices over general Boolean algebra*, J. Korean Math. Soc. **43** (2006), no. 1, 77–86.
[81] S. Z. Song, K. T. Kang and Y. B. Jun, *Linear preservers of Boolean nilpotent matrices*, J. Korean Math. Soc. **43** (2006), no. 3, 539–552.
[82] S. Song and S. Lee, *Column ranks and their preservers of general Boolean matrices*, J. Korean Math. Soc. **32** (1995), 531–540.
[83] S. Z. Song and S. R. Park, *Maximal column rank preservers of fuzzy matrices*, Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications **21** (2001), no. 2, 207–218.
[84] S. Z. Song, S. D. Yang, S. M. Hong, Y. B. Jun and S. J. Kim, *Linear operators preserving maximal column ranks of nonbinary Boolean matrices*, Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications **20** (2000), no. 2, 255–265.
[85] W. Watkins, *Linear maps that preserve commuting pairs of matrices*, Linear Algebra Appl. **14** (1976), 29–35.

제주도 제주시 제주대학교
자연과학대학 정보수학과
690-756
E-mail: szsong@cheju.ac.kr