

수정 환경사 파랑식에 대한 포물형 근사식 모형 A Parabolic Model to the Modified Mild Slope Equation

서승남* · 이종찬**

Seung-Nam Seo* and JongChan Lee**

요 지 : 천해역의 파랑을 추산하기 위한 포물형 근사식에 대해 기존 모형을 도출할 수 있는 일반화된 모형을 제시하고 이를 수정 환경사 파랑식에 대한 포물형 근사식으로 확장하였다. 제시한 수치모형을 Berkhoff et al.(1982)의 수리모형 실험과 비교하였으며 이 경우에는 기존 포물형 근사모형과 수정 포물형 근사모형의 결과가 거의 같으며 수리실험 결과와 아주 잘 일치하는 것으로 나타났다. 따라서 계산이 빠르고 안정성이 높은 기존 포물형 근사식은 천해역의 파랑 추산에 유용한 도구라 판단된다.

핵심용어 : 수정 환경사 파랑식, 포물형 근사식, 수치모형, 타원형 천퇴

Abstract : In order to calculate waves propagating into the shallow water region, a generalized parabolic approximate model is presented. The model is derived from the modified mild slope equation and includes all the existing parabolic models presented in the paper. Numerical results are presented in comparison to laboratory data of Berkhoff et al.(1982). The existing parabolic model shows almost same accuracy against the modified parabolic model and both results of models stand in closer agreement to the laboratory data. Therefore the existing parabolic model based on mild slope equation is a useful tool to compute shallow water waves which turns out to be more fast and stable in computational aspect.

Keywords : modified mild slope equation, parabolic approximate form, numerical model, elliptic shoal

1. 서 론

수심이 변하는 지역을 지나는 파랑 변형에 대한 운동방정식은 3차원 미분방정식으로 나타낼 수 있으며, 3차원 파랑식을 풀어 해를 구하기 위해서는 상당한 노력이 필요하다. 이러한 계산 문제를 보다 쉽게 해결하기 위해 파랑운동의 수심 분포를 적절히 가정하여 2차원 미분식으로 변형한 근사식을 사용한다. 그 대표적인 식으로는 환경사 파랑식과 Boussinesq 파랑식(Liu, 1994; Kirby, 1997)이 있다. 본 논문에서는 수정 환경사 파랑식과 이를 포물형 미분식으로 전환한 포물형 근사식에 대한 기존 이론의 상호비교와 포물형 근사식의 수치모형 결과를 제시하고자 한다. 환경사 파랑식(Berkhoff, 1972)은 수심이 일정한 경우의

수심 분포함수를 수심이 완만히 변하는 경우로 확장하여, 수심 분포함수를 수심 적분하여 구한 2차원 타원형 미분식이다. 따라서 이에 대한 해를 구하기 위해 통상 입사 경계, 해안 경계 그리고 좌우측 경계에 대한 4개의 경계조건을 부여하여야 한다. 이 가운데 쇄파가 발생하는 완만한 해안선을 경계로 갖는 경우에는 적절한 경계조건을 부여하기가 상당히 어렵다. 또한 환경사 파랑식에는 시간 의존형(Kirby, 1984; Liu, 1990)과 단주기형으로 세분할 수 있다. 시간 의존형의 경우는 계산 경계지역에 인위적인 감쇄역(sponge damping region)을 사용하여 이 경계에서 파생되는 원치 않는 파랑성분을 제거하는 기법(Suh et al., 1997)을 사용하기도 한다. 그러나 이 방법 역시 계산 영역 밖에서 반사되어 들어오는 파랑 에너지는 고려할 수 없기 때문에

*한국해양연구원 연안개발연구본부(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

**한국해양연구원 연안개발연구본부(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. jlee@kordi.re.kr)

반사율이 주어진 지역에 경계를 설정해야한다. 한편 경계에서 부분반사 조건을 사용하는 경우도 있으나 이 조건은 사전에 경계에서의 위상을 포함한 반사율을 정해야하며 대부분의 경우에 이 반사율은 해의 일부가 되기 때문에 어려움이 있다.

파랑은 해안에 접근할수록 굴절에 의해 해안서는 거의 직각으로 입사하며 해안에서의 반사율은 0.05-0.2의 값을 보인다(Goda, 2000). 한편 입사경계(수심과 파장의 비, $kh=0.865$)와 해안경계($kh=0.464$) 부분의 수심은 일정하나 그 밖에서는 수심경사가 일정한 지형에 대해 Booij(1983)와 Suh et al.(1997)이 환경사 파랑식을 이용하여 1:10인 급경사에서 계산한 반사율은 0.03보다 작으며 자연 모래해안의 경사는 이보다 완만하기 때문에 반사율은 더욱 작게 된다.

그리고 연안구조물을 경사가 급한 지역에 설치하면 강한 충격 쇄파압이 구조물에 작용하기 때문에 설계 기준서(해양수산부, 2005)에는 구조물을 비교적 경사가 완만한 지역에 설치하도록 권장하고 있다. 또한 구조물의 설계를 위하여 안정성을 검토할 경우에는 수리실험의 경우와 같이 주어진 입사파랑을 대상으로 검토하므로 구조물에 의한 반사는 고려하지 않는다.

한편 포물형 근사식은 해안 쪽의 경계조건을 사용하지 않아 경계조건이 부여가 용이할 뿐 아니라 포물형 미분식을 사용함으로 수치 계산상에도 빠른 장점을 가진다. 그러나 반사파를 분리하여 계산하는 포물형 근사식에서는 분리과정에서 생기는 오차로 인해 근사적인 해를 구하게 되며 이에 대한 연구가 Kirby(1986a, 1986b)에 의해 시도되었다. 수치 계산의 용이함, 신속함 그리고 위에 기술한 구조물에 대한 친해파를 산출에 관한 적합성이 포물형 파랑모형의 가장 큰 장점이다. 따라서 본 논문에서는 포물형 근사식에 대한 기존 연구를 비교분석하고 수심경사와 해저곡률을 포함하는 수정 환경사 파랑식에 대한 새로운 포물형 근사식에 대한 수치모형과 계산결과를 제시하고자 한다.

2. 수정 환경사 파랑식

수심 $h(x, y)$ 이 변하는 지역을 지나는 파랑의 선형 운동은 속도 포텐셜 $\phi(x, y, z)$ 을 이용하여 다음 Laplace 미분식의 해로 나타낼 수 있다. 좌표계의 원점은 정지해면 상에 위치하며 z 축은 상향을 양의 방향으로 정한 오른손 좌표계를 사용한다. 그리고 $x-y$ 평면공간의 미분 연산자는 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 으로 정의하고 수면과 수심의 z 방향 경계면과 $x-y$ 평면에 관한 측면 경계면으로 둘러싸인 정의구역 내에서

의 파랑운동을 고려한다.

$$\nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0, \quad -h(x, y) < z < 0 \quad (1a)$$

$$\phi_z - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, \quad z = 0 \quad (1b)$$

$$\phi_z = -\nabla h \cdot \nabla \phi, \quad z = -h(x, y) \quad (1c)$$

$$\phi = \phi_s, \quad \text{on the lateral boundaries} \quad (1d)$$

여기서 파수는 $k = 2\pi/L$ 로 정의된 파장의 함수이며, g 는 중력가속도, 해수면 경계조건으로부터 유도되는 파랑 분산식은 $\omega^2 = gk \tanh kh$ 이 된다. 그러면 파장, 주기 T_w (각속도 $\omega = 2\pi/T_w$) 그리고 수심의 함수로 정의된 파랑 분산식에서 이들 가운데 하나는 일의적으로 정해진다. 식(1d)는 측면경계면에서 속도 포텐셜 ϕ_s 은 주어진 함수임을 나타내며 이를 포함하여야 비로소 식 (1)은 올바르게 설정된 하나의 미분식(a well posed boundary value problem)이 된다.

식 (1)은 3차원 미분식으로 이를 보다 다루기 쉬운 2차원 미분식으로 변환하기 위해 수심방향에 적절한 분포함수를 이용하여 적분한다. 이 수심 분포함수의 설정에 따라 환경사 파랑식(Smith and Sprinks, 1975; Mei, 1989) 또는 Boussinesq 파랑식(Liu, 1994)을 각각 얻을 수 있다. 이들 중 본 논문에서는 환경사 파랑식에 대한 포물형 근사식을 다루며 그 모체가 되는 환경사 파랑식을 구하기 위해 Chamberlain과 Porter(1995)가 사용한 변분법을 사용하고 유도과정을 통해 그들이 생략하여 분명히 나타내지 않은 개념에 대한 올바른 해석을 부여하고자 한다.

파랑운동에서 속도 포텐셜로 표현된 파랑의 위치에너지와 운동에너지의 합인 Lagrangian 또는 Hamiltonian이 최소가 되는 경우의 속도 포텐셜은 식 (1)의 지배방정식과 경계조건을 만족한다(Luke, 1967; Miles, 1977). Chamberlain과 Porter는 시간 항이 없는 식 (2)의 Lagrangian을 제시하였으며, 이로부터 식 (1)의 미분방정식을 얻을 수 있으며 또한 이것은 Ritz방법(또는 Rayleigh-Ritz방법)을 사용하여 근사적인 해를 구할 수 있는 출발점이 된다.

$$L(\phi) = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \phi^2 \Big|_{z=0} - \frac{1}{2} \int_{-h(x,y)}^0 (|\nabla \phi|^2 + \phi_z^2) dz \right\} ds \quad (2)$$

여기서 정의구역의 $x-y$ 평면 S 는 폐경계선 $C(z)$ 의 함수로 둘러싸여 있으며, C 에서의 변량은 $\delta \phi = 0$, ds 는 미소면적이다.

Luke가 보인 바와 같이 적합하게 정의된 미지함수의 Lagrangian은 이 함수에 관련된 경계조건을 포함한 미분방정식을 만족하게 된다. 그러나 Chamberlain과 Porter는 이

를 생략하였기 때문에 본 논문에서는 식 (2)의 변량이 0인 ($\delta L = 0$) 조건으로부터 ϕ 에 대한 미분식 (1)을 만족하는지 먼저 살펴보기로 한다. 식 (2)에 변분원리(variation principle)를 적용하면 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\delta L = \int_s \left\{ \frac{\omega^2}{g} (\phi \delta \phi) \Big|_{z=0} - \int_{-h(x,y)}^0 (\nabla \phi \cdot \delta \nabla \phi + \phi_z \delta \phi_z) dz \right\} ds \tag{3}$$

미분연산자와 변량연산자 간에 성립하는 교환법칙(Hildebrandt, 1965)과 미분연산자가 작용된 모든 변량의 항들을 변량 자체로 나타내기 위한 통상적인 연산공식을 사용하여 변형하면 식 (4)을 얻을 수 있다.

$$0 = \int_s \left\{ \frac{\omega^2}{g} (\phi \delta \phi) \Big|_{z=0} - \int_{-h(x,y)}^0 [\nabla \cdot (\nabla \phi \delta \phi) - (\nabla^2 \phi) \delta \phi] dz - \int_{-h}^0 [(\phi_z \delta \phi)_z - \phi_{zz} \delta \phi] dz \right\} ds \tag{4}$$

식 (4)의 적분 내부에 있는 미분연산자를 적분 밖으로 끌어내기 위해 Leibnitz 공식을 사용하여 정리하면 경계 항이 포함된다.

$$0 = \int_s \left\{ \frac{\omega^2}{g} (\phi \delta \phi) \Big|_{z=0} - \nabla \cdot \int_{-h}^0 (\nabla \phi \delta \phi) dz + \int_{-h}^0 (\nabla^2 \phi) \delta \phi dz + (\nabla \phi \delta \phi) \Big|_{z=-h} \cdot \nabla h - (\phi_z \delta \phi) \Big|_{z=-h} + \int_{-h}^0 \phi_{zz} \delta \phi dz \right\} ds \tag{5}$$

마지막으로 식 (5)에 Gauss 정리(Divergence theorem)를 써서 면적분을 선적분으로 바꾸어 정리하면 식 (6)을 얻을 수 있다.

$$0 = \int_s \left\{ \int_{-h}^0 (\nabla^2 \phi + \phi_{zz}) \delta \phi dz + \left(\frac{\omega^2}{g} \phi - \phi_z \right) \delta \phi \Big|_{z=0} + (\nabla \phi \cdot \nabla h + \phi_z) \delta \phi \Big|_{z=-h} \right\} ds - \int_C \hat{n} \cdot \int_{-h}^0 (\nabla \phi \delta \phi) dz dl \tag{6}$$

여기서 \hat{n} 는 경계선 C의 외향 단위벡터이고 dl 은 C상의 미소길이다. 식 (6)에서 임의의 수심 z에서 경계선 C에서는 ϕ 가 주어져 변량 $\delta \phi = 0$ 이므로 식 (6)의 마지막 항은 0이 된다. 한편 경계를 제외한 영역 내의 모든 점(x, y, z)에서는 $\delta \phi$ 는 임의의 변량이므로 식 (6)이 성립하려면 첫째 항의 피적분 함수는 반드시 0이 되어야하며 이로부터 지배방정식이 얻어진다. 그리고 정지수면(z=-h)와 해저면의 경계에서는 ϕ 가 주어지지 않아 둘째와 셋째 항에는 natural

boundary conditions을 부여함으로 경계조건이 얻어진다.

종합하면 식 (2)로 주어진 Lagrangian이 극값 조건을 만족하는(즉 stationary) 경우에는 함수 ϕ 는 선형 파랑의 운동에 대한 미분식 (1)을 만족한다. 이 유도과정은 적절히 선정된 다른 형태의 Lagrangian으로부터 비선형 파랑의 미분식을 구한 Luke(1967)가 제시한 방법과 동일하다. 단지 차이점은 Luke는 비선형 파랑을 다루기 때문에 정지수면이 아닌 또 다른 미지함수인 자유수면까지 적분한 점에 있다.

위에서 보인 바와 같이 미지함수의 미분식의 해를 구하는 것은 적절히 선정된 Lagrangian에 변분원리를 적용하여 해를 구하는 것과 동일하며, 이 Lagrangian은 하나의 적분식으로 표시되어 경계조건을 포함하는 미분식보다 다루기 쉬울 뿐 아니라 보다 중요한 것은 근사해를 구하기 위해 Ritz방법을 이용할 수 있다는 점에 있다. Ritz방법에서는 근사해를 적절히 선정된 일차독립인 기지의 함수(linearly independent function, $f_i(x, y, z)$)들을 포함하는 유한급수로 나타낸다.

$$\phi(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^N f_i(x, y, z) \eta_i(x, y) \tag{7}$$

그리고 급수의 개수가 증가하면 근사해는 엄밀해로 수렴한다(Mikhlin, 1964). 측면 경계에서 ϕ 가 주어져 이곳에서 $\delta \phi = 0$ 이고, 이를 식 (7)에 적용하면 f_i 는 일차독립이므로 모든 $\phi \eta_i = 0$ 가 성립한다.

본 논문에서는 식 (7)의 우변이 한 개의 항으로 구성된 가장 단순한 경우를 대상으로 하여 수식 전개 of 편의상 $f = f_1, \eta = \eta_1$ 으로 나타낸다. 한 개 항으로 구성된 근사해인 식 (7)을 식 (2)에 대입하면 Lagrangian은 식 (8)이 되며 함수 f 는 아직 명시하지는 않았으나 주어진 함수이기 때문에 변량 함수는 η 가 된다.

$$L(\eta) = \int_s \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} f \Big|_{z=0} \eta^2 - \frac{1}{2} \int_{-h}^0 (\eta^2 |\nabla f|^2 + 2 \eta f \nabla \eta \cdot \nabla f + f^2 |\nabla \eta|^2 + f_z^2 \eta^2) dz \right\} ds \tag{8}$$

일반적인 Ritz방법에서는 식 (7)의 η_j 가 미지의 상수이기 때문에 극값조건은 $\partial L / \partial \eta_j = 0$ 을 이용하여 구하게 되나, 여기서는 함수이기 때문에 식 (8)의 극값조건은 $\partial L = 0$ 를 사용한다. 즉 Lagrangian에 변분원리를 적용하면 식 (9)를 얻을 수 있다.

$$\delta L = 0 = \int_S \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{g} f|_{z=0} \eta \delta \eta \\ - \int_{-h}^0 [|\nabla f|^2 \eta \delta \eta + f \nabla f \cdot \delta(\eta \nabla \eta) + f^2 \nabla \eta \cdot \delta \nabla \eta + f_z^2 \eta \delta \eta] dz \end{array} \right\} ds \quad (9)$$

식 (9)의 우변의 변량 연산자와 미분 연산자간의 교환법칙 $\delta(\eta \nabla \eta) = \nabla(\eta \delta \eta)$, Gauss 정리 그리고 경계에서의 변량 $\delta \eta = 0$ 인 조건을 사용하면 식 (9)는 다음 식 (10)으로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ \int_{-h}^0 f \nabla f \cdot \delta(\eta \nabla \eta) dz \right\} ds \\ &= \int_C \hat{n} \cdot \left(\int_{-h}^0 f \nabla f dz \eta \delta \eta \right) dl - \int_S \left(\nabla \cdot \int_{-h}^0 f \nabla f dz \right) \eta \delta \eta ds \\ &= - \int_S \left(\nabla \cdot \int_{-h}^0 f \nabla f dz \right) \eta \delta \eta ds \quad (10) \end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 식 (9)의 우변 넷째 항도 유사한 과정을 거쳐 앞에서 얻은 결과를 식 (9)에 대입하면 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$0 = \int_S \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{g} f|_{z=0} \eta - \int_{-h}^0 [(|\nabla f|^2 + f_z^2)] dz \eta \\ + \left(\nabla \cdot \int_{-h}^0 f \nabla f dz \right) \eta + \left(\nabla \cdot \int_{-h}^0 f^2 dz \nabla \eta \right) \end{array} \right\} \delta \eta ds \quad (11)$$

식 (11)에서 변량 $\delta \eta$ 은 임의의 함수이므로 식이 항상 성립하려면 이를 제외한 피적분함수가 0이 되어야 한다. 따라서 변분법에 의한 근사해는 다음 식 (12)을 만족하는 함수가 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f^2 dz \nabla \eta \right) + \left(\nabla \cdot \int_{-h}^0 f \nabla f dz \right) \eta \\ &+ \frac{\omega^2}{g} f|_{z=0} \eta - \int_{-h}^0 [(|\nabla f|^2 + f_z^2)] dz \eta \quad (12) \end{aligned}$$

이를 기존 연구결과와 같은 식으로 변형하기 위하여 둘째 적분에 미분 연산자를 적분 연산자의 안으로 넣고 마지막 적분에 $(f_z)^2 = (ff_z)_z - ff_{zz}$ 을 이용하여 정리하면 식 (13)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f^2 dz \nabla \eta \right) + \left(\int_{-h}^0 ff_{zz} dz + \int_{-h}^0 f \nabla^2 f dz \right) \eta \\ &+ \left(\frac{\omega^2}{g} f^2 - ff_z \right)_{z=0} \eta + (ff_z + f \nabla f \cdot \nabla h)_{z=-h} \eta \quad (13) \end{aligned}$$

이제까지 함수 f 를 설정하지 않았기 때문에 식 (13)은 일반적인 식이라 할 수 있으며, 이는 Chamberlain과 Porter의 식 (2.6)과 동일하다. 마지막으로 완경사 파랑식으로 변환하기 위해 식 (14)와 같은 수직분포 함수 f 를 설정하고 관련된 수심 적분을 나타내었다. 이 분포함수는 해저면이 일정한 경우에 엄밀해의 수직분포이며(Dean and Darlymple, 1984; Mei, 1989) 이를 경사진 해저면으로 확장한 것으로 해석할 수 있다. 즉 해저경사가 아주 작은 경우에는 이는 엄밀해와 거의 같게 됨을 예상할 수 있다. 또한 근사해가 설정된 정밀도에 도달하는 정도는 이 함수의 특성에 따라 식 (7)의 근사해에 포함된 항의 개수에 의해 좌우되고 따라서 해의 수렴특성도 연관되어 있음을 유추할 수 있다.

$$f(x, y, z) \equiv \cosh k(h+z) / \cosh kh$$

$$P = \int_{-h}^0 f^2 dz = \frac{\tanh kh}{2k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$\equiv \frac{1}{2k} [T + kh(1 - T^2)] = \frac{CC_g}{g} \quad (14)$$

여기서 파속 $C = \omega/k$, 군속도 $C_g = Cn$, $n = (1 + 2kh/\sinh 2kh)/2$ 그리고 $T = \tanh kh$ 로 각각 정의되었다.

식 (14)을 식 (13)에 대입하면 수면 경계조건 항과 해저 경계조건의 일부는 소거되고, $\nabla f = \partial f / \partial h \nabla h$ 를 이용하여 정리하면 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f^2 dz \nabla \eta \right) + k^2 \eta \int_{-h}^0 f^2 dz \\ &+ \eta |\nabla h|^2 \left[\int_{-h}^0 f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} dz + \left(f \frac{\partial f}{\partial h} \right)_{z=-h} \right] + \eta \nabla^2 h \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \quad (15) \end{aligned}$$

식 (15)의 둘째 줄에 있는 수심경사 제곱 항과 해저곡률 항이 작다고 가정하여 무시한 경우에는 완경사 파랑식(Berkhoff, 1972; Smith and Sprinks, 1975)을 얻게 된다. 고유함수 전개법을 사용하여 Smith와 Sprinks 유도한 식에는 진행파 성분(propagating component)인 식 (15)의 모든 항이 존재할 뿐 아니라 역류파 성분(non-propagating components)도 포함되어 이들에 의한 오차 범위를 유추하여 기술하였다.

한편 Chamberlain과 Porter는 일련의 연안사주가 존재하는 경우에는 완경사 파랑식으로는 파랑의 변형을 올바르게 나타낼 수 없으며, 따라서 식 (15)의 모든 항을 포함하여야 연안사주 위를 지나는 파랑의 변형을 올바르게 기술할 수

있음을 보였고 이를 수정 환경사 파랑식으로 지칭하였다. 본 논문에서도 식 (15)의 모든 항을 포함한 파랑식을 사용하기 때문에 억류와 성분은 무시한 근사식이다. 마지막으로 식 (16)의 수심경사 제곱 항과 해저면의 곡률 항의 적분을 계산하여 이를 각각 D_s, D_c 로 표기하면 식 (16)이 된다.

$$D_c = \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz = \frac{(1-T^2)[T-kh(1-T^2)]}{4[T+kh(1-T^2)]}$$

$$D_s = \int_{-h}^0 f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} dz + \left(f \frac{\partial f}{\partial h} \right)_{z=-h} = \frac{-k(1-T^2)}{12[T+kh(1-T^2)]^3}$$

$$\times \begin{bmatrix} 9T^2(1+T^2) - 6T(1-2T^2+3T^4)(kh) \\ -3(1-T^2)(1-2T^2+3T^4)(kh)^2 \\ -8T(1-T^2)^2(kh)^3 - 2(1-T^2)^3(kh)^4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (16)은 Chamberlain과 Porter 그리고 Miles와 Chamberlain (1998)가 제시한 식과 동일하다.

3. 수정 환경사 파랑식에 대한 포물형 근사식

이 절에서는 앞 절에서 유도한 수정 환경사 파랑식으로부터 포물형 근사식을 유도하는 과정을 기술하기로 한다. 파랑을 진행파와 반사파로 분리하여 진행파 성분만을 추출하는 포물형 근사식은 Radder(1979), Lozano와 Liu(1980) 그리고 Booij(1981)가 각각 다른 방법을 사용하여 유도하였으나 최종 식은 거의 같으며, 본 절에서는 유도에 포함된 가정과 오차 그리고 최종 식의 연관성에 대해 기술한다. 그리고 포물형 근사식에 포함된 연산자를 유사연산자(Pseudo operator)로 취급하여 근사시키는 방법에 따라 여러 형태의 수치모형이 제시되었고, 이들의 특성에 대해 기술하기로 한다.

제 2절에서 유도한 수정 환경사 파랑식을 Helmholtz식의 형태로 바꾸기 위해 식 (15)에 $\zeta = \sqrt{P}\eta$ 를 이용하여 변수 변환하여 정리하면 식 (17a)을 얻을 수 있다. 식 (17a)로 정의된 연산자 K^* 를 사용한 식을 포물형 근사식 유도의 출발점으로 삼는다.

$$0 = \nabla^2 \zeta + \left(k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{\sqrt{P}} + \frac{D}{P} \right) \zeta \equiv \nabla^2 \zeta + K^2 \zeta \equiv \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + (K^*)^2 \zeta \quad (17a)$$

식 (17)에 연산자 K, D, K^* 는 식 (14)-(16)을 이용하면 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} (K^*)^2 = K^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{\sqrt{P}} + \frac{D}{P} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ D \equiv D_c \nabla^2 h + D_s |\nabla h|^2 \end{cases} \quad (17b)$$

Liu(1990)는 현상학적 관점에서 포물형 근사식을 유도하였고 이를 간략히 소개한 뒤에 이와 다른 관점에서 유도된 식들의 연관성을 살펴보고자 한다. Liu가 기술한 방법과 같이 물리적 배경을 설명하기 위해 가장 단순한 경우인 수심이 일정한 지역에 설치된 방파제에 의한 파랑변형(즉 회절 현상)을 대상으로 하고, 이 개념을 보다 복잡한 지형에 의한 굴회절 현상에 의한 포물형 근사식 유도에 적용하기로 한다. 일정 수심위에 설치된 방파제의 회절에 대한 지배방정식은 식 (17)과 같은 Helmholtz식이며 이 경우 연산자 K 는 파수 k 가 된다. 그리고 주파향의 방향을 x 축으로 설정하고 파랑의 급변하는 성분 $\exp(ikx)$ 와 서서히 변하는 파고성분 $\psi(x, y)$ 로 분리하여 식 (18)과 같이 표현한다.

$$\zeta = e^{ikx} \psi(x, y) \quad (18)$$

위 식을 식 (17)에 대입하면 다음 식 (19)가 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

포물형 근사식의 가정은 주 진행방향(x)의 파고변화율은 그 횡 방향(y)의 변화율보다 상당히 작은 것으로 간주한다. 즉 x, y 방향에서 유사한 크기의 파고변화를 보이는 특성거리를 각각 L_x, L_y 라 하고 이를 크기의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$O\left(\frac{L_y}{L_x}\right) = O(\mu) \ll 1 \quad (20)$$

한편 파랑은 구조물과 반응하여 서서히 변형되기 때문에 특성파장 L_w 은 특성거리 L_x, L_y 보다 훨씬 작아 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$O\left(\frac{1}{kL_y}\right) = O(\mu), \quad O\left(\frac{1}{kL_x}\right) = O(\mu^2) \quad (21)$$

이 특성길이를 이용하여 식 (19)을 무차원 식으로 변형하고 포물형 근사식의 가정에 따라 $O(\mu)^2$ 의 항을 무시하면 식 (22)가 된다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

그리고 식 (22)를 ζ 에 대한 식으로 변형하기 위해 식 (18)를 이용하여 정리하면 포물형 미분식 (23)을 얻을 수 있다.

$$0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2k^2 \zeta \quad (23)$$

따라서 원래의 타원형 미분식인 Helmholtz식 (17)과 유도된 포물형 근사식 (23)은 상당한 차이를 보인다. 이를 차이를 보이기 위해 $\zeta = A(x, y)\exp(ix + imx)$ 를 각각의 식에 대입한다. 그 이유는 이 미분식들은 평면파의 형태를 해로 갖기 때문이며, 여기서는 파랑이 급변하는 부분에 초점을 맞추고, 식 (20)과 (21)을 이용하여 크기를 비교하여 각 식에서의 부분만 취하면 파수성분간의 관계식 (24)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \text{Helmholtz식: } 1 = \left(\frac{l}{k}\right)^2 + \left(\frac{m}{k}\right)^2 \\ \text{포물형근사식: } \frac{l}{k} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{k}\right)^2 \end{cases} \quad (24)$$

식 (24)를 파수성분의 좌표계에 나타내면 Fig. 1과 같다.

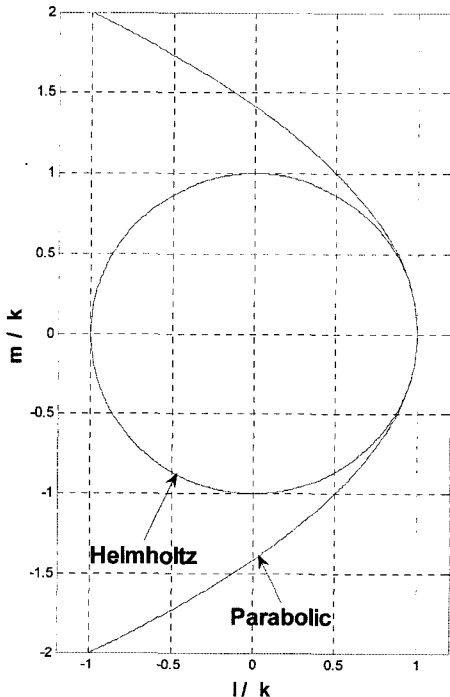


Fig. 1. Wave number vector's behavior in Helmholtz eq. and parabolic approximation.

Fig. 1에서 알 수 있듯이 파랑의 진행방향이 x축과 거의 같을 경우($m/k \ll 1$)에는 포물형 근사식에 의한 해는 Helmholtz식의 해에 일치하나 진행방향이 x축과 커짐에 따라 포물형 근사식의 해는 상당한 오차를 보이게 된다. 또한 포물형 근사식의 가정에서 파랑은 축의 양의 방향으로만 허용되나 Helmholtz식은 구조물에 의한 반사로 인해 x축의 음의 방향으로 진행되는 반사파랑도 가능하다. 따라서 미분방정식 관점에서 이를 해석하면 Helmholtz식은 타원형 미분식이므로 입사 경계와 해안측 경계를 포함한 전 경계에서 조건을 만족하도록 해를 구성해야하나 포물형 근사식에서는 해안측 경계조건은 유도과정에서 소멸되어 입사 경계에서 초기 조건과 측면경계 조건만을 만족하는 해의 형태를 갖게 된다.

수심이 변하는 지역을 지나는 파랑의 반사가 크지 않고 또한 파랑의 진행방향이 x축과 거의 같을 경우에는 진행방향의 파랑변형만을 고려하는 포물형 근사식의 해는 Helmholtz식의 해와 거의 같게 된다. 위에 기술한 바와 같이 포물형 근사식의 해를 구하는 과정이 상대적으로 다루기 쉽기 때문에 파랑의 반사가 크지 않은 경우 파랑 진행방향에 따른 오차를 줄이기 위한 연구가 시도되었다(Kirby; 1986a, 1986b). 파랑 진행방향의 제약을 완화하는 방법은 횡방향의 미분차수를 증가시키는 것과 연관되어있다. 즉 식 (23)의 y 미분 연산자는 식 (21)에 의해 $\alpha(\mu)^2$ 이므로 이를 유사연산자로 간주하여 식 (25)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= ik \left(1 + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \zeta \\ &\approx ik \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{1/2} \zeta \equiv ik(1 + \mu^2)^{1/2} \zeta \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)의 유사연산자 μ 를 근사하는 방법에 따라 여러 형태의 모형이 제시될 수 있으며, 이 가운데 가장 대표적인 근사로 이용되는 것이 식 (26)이다.

$$(1 + \mu^2)^{1/2} \approx \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\mu^2 \\ \text{or } \frac{1 + \frac{3}{4}\mu^2}{1 + \frac{1}{4}\mu^2} \end{cases} \quad (26)$$

식 (25)에서 우측 첫 식은 binomial 근사, 둘째 식은 rational 근사(또는 Padé 근사)이다.

다음에서는 파랑을 진행성분과 반사성분으로 나누어 주어진 미분식 (17)을 이용하여 진행성분만을 추출하는 포물형 근사식의 유도방법에 대해 기술하고자 한다. Radder(1979)

는 음향학에서 사용된 방법을 과량에 적용하였고, 뒤에 설명된 바와 같이 Booij(1981)는 독자적인 상이한 방법을 이용하였다. 본 논문에서는 포물형 근사식의 유도에 사용된 방법의 차이점과 그 적용성에 초점을 맞추었기 때문에 유도과정의 주요 부분만을 기술하기로 한다.

이들의 지배방정식은 Helmholtz식 (17)이고 속도 포텐셜의 x, y 평면함수 $\zeta(x, y, t)$ 를 진행파 성분(ζ^+)과 반사파 성분(ζ^-)으로 구분한 성분 분리법을 사용하여 포물형 근사식을 유도하였다.

$$\zeta = \zeta^+ + \zeta^- \tag{27}$$

Radder는 진행파와 반사파 성분으로 구성된 벡터는 분리행렬 S 에 속도 포텐셜과 수립자 속도의 벡터를 곱한 식 (28)로 나타내었다. 그리고 분리행렬의 각 요소는 x, y 의 연산자로 그 적절한 형태를 구하는 것이 목적이다.

$$\begin{Bmatrix} \zeta^+ \\ \zeta^- \end{Bmatrix} = S \begin{Bmatrix} \zeta \\ \zeta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta & \\ & \gamma\delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \zeta_x \end{Bmatrix} \tag{28}$$

식 (27), 식 (28) 그리고 ζ 와 ζ_x 의 일차 독립성을 이용하면 미정 연산자의 관계식 (29)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases} \tag{29}$$

식 (28)과 지배방정식 (17)을 이용하면 식 (30)를 얻게 되며, Radder가 생략한 과정은 서(1990)에 제시되었다.

$$\begin{Bmatrix} \zeta_x^+ \\ \zeta_x^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x + \beta_x \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \beta(K^*)^2 & \alpha_x - \beta_x \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta} - \beta(K^*)^2 \\ \gamma_x - \frac{\gamma}{\beta} \beta_x + \frac{\gamma^2}{\beta} + \beta(K^*)^2 & \gamma_x + \frac{\alpha}{\beta} \beta_x - \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \beta(K^*)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta^+ \\ \zeta^- \end{Bmatrix} \tag{30}$$

식 (30)은 어떤 제약도 부여되지 않은 일반성이 있는 식이다. 한편 진행파와 반사파의 성분이 완전히 분리되려면 행렬의 대각인자를 제외한 모든 인자는 0이 되어야하나 이 조건을 완화한 다음의 조건인 식 (31)을 사용하여 근사적으로 계산한다.

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{\beta} + \beta(K^*)^2 = 0 \\ \frac{\gamma^2}{\beta} + \beta(K^*)^2 = 0 \end{cases} \tag{31}$$

따라서 식 (29)과 식 (31)의 연립방정식을 풀면 분리행렬의 요소인 연산자는 다음 식 (32)와 같다.

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{i}{2K^*}, \delta = -\frac{i}{2K^*} \tag{32}$$

식 (32)에서는 속도 포텐셜 ζ 의 시간 성분을 $\exp(-i\omega t)$ 인 것으로 간주하여 부호가 정하여졌으며, 이를 식 (30)에 대입하면 성분과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \zeta_x^+ = \left(iK^* - \frac{K_x^*}{2K^*} \right) \zeta^+ + \frac{K_x^*}{2K^*} \zeta^- \\ \zeta_x^- = \left(-iK^* + \frac{K_x^*}{2K^*} \right) \zeta^- + \frac{K_x^*}{2K^*} \zeta^+ \end{cases} \tag{33}$$

식 (33)의 진행파에 대한 식에서 반사파 성분을 또 다시 무시하는 근사과정을 통해 얻은 포물형 근사식이 식 (34)이다.

$$\zeta_x^+ = \left(iK^* - \frac{K_x^*}{2K^*} \right) \zeta^+ \tag{34}$$

그러므로 포물형 근사식 (34)에 내재된 오차는 식 (33)으로부터 $(K_x^*/2K^*)\zeta^-$ 임을 알 수 있다. 만일 이 반사파 성분의 항이 작은 경우에는 포물형 근사식에 의한 해는 Helmholtz식의 해와 거의 같음을 알 수 있다.

한편 Booij가 제시한 바와 같이 임의 함수 ζ_m 가 다음 식 (35)를 만족하는 경우 반사파와 진행파가 완전히 분리됨을 보일 수 있으며 여기서 γ 는 미정 연산자이다.

$$\begin{cases} \zeta_m = \zeta_m^+ + \zeta_m^- \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} \right) + \gamma \zeta_m = 0 \\ \frac{\partial \zeta_m^+}{\partial x} = i\gamma \zeta_m^+, \frac{\partial \zeta_m^-}{\partial x} = i\gamma \zeta_m^- \end{cases} \tag{35}$$

이 γ 를 구하기 위해 또 다른 연산자 ξ 를 포함하는 $\xi_m = \xi \psi$ 을 대입하면 식 (36)을 얻을 수 있다.

$$0 = \psi_{xx} + \left(\frac{2\xi_x}{\xi} - \frac{\gamma_x}{\gamma} \right) \psi_x + \left(\frac{\xi_{xx}}{\xi} - \frac{\xi_x \gamma_x}{\xi \gamma} + \gamma^2 \right) \psi \tag{36}$$

위 식 (36)과 Helmholtz식 (17)을 비교하면 우선 ψ_x 항이 소거되어야 한다. 이 조건으로부터 미정 연산자들은 상수 c 를 포함하는 관계식 (37)을 만족한다.

$$\xi^2 = c\gamma \quad (37)$$

식 (36)의 ξ 에 대한 미분 항들을 무시하고 식 (37)에 $c=1$ 을 적용하면 식 (38)을 얻는다.

$$0 = \psi_{xx} + \xi^4 \psi \quad (38)$$

식 (38)은 진행파 또는 반사파에 식 (35)에 의해 모두 적용할 수 있으며 식 (36)에 의해 무시된 오차는 식 (39)로 주어진다.

$$\left[\frac{\xi}{\xi} \frac{\xi_{xx}}{\xi} - 2 \left(\frac{\xi_x}{\xi} \right)^2 \right] \psi = \left(\frac{\xi_x}{\xi} \right)_x \xi \psi = \left(\frac{\xi_x}{\xi} \right)_x \zeta_m \quad (39)$$

마지막으로 포물형 근사식 (38)과 Helmholtz식 (17)과의 비교로부터 연산자 ξ 는 다음 관계식으로 표시된다.

$$\xi^4 = (K^*)^2 \quad (40)$$

따라서 진행파에 대한 포물형 근사식을 얻기 위해 식 (40)의 연산자를 유사연산자로 간주하고 이를 식 (35)에 대입한다.

$$(\sqrt{K^*} \zeta^+)_x = iK^* \sqrt{K^*} \zeta^+ \quad (41)$$

식 (41)의 좌변을 전개한 식에 $1/\sqrt{K^*}$ 를 적용한 식 (42)이 근사적으로 성립한다면 이는 Radder가 유도한 식 (34)와 같아 이러한 조건에서는 동일한 포물형 근사식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{K^*}} \left(\sqrt{K^*} \zeta^+ + \frac{K_x^*}{2\sqrt{K^*}} \zeta^+ = iK^* \sqrt{K^*} \zeta^+ \right) \\ \Rightarrow \zeta_x^+ + \frac{K_x^*}{2K^*} \zeta^+ = iK^* \zeta^+ \end{aligned} \quad (42)$$

이제부터 포물형 근사식에 대해서만 수식 전개가 필요하기 때문에 편의상 진행파(ζ^+)의 표기를 ζ 로 하고 식 (40)과 식 (41)로부터 식 (43)이 얻어진다.

$$\left(\sqrt{k} \left[1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right]^{1/4} \zeta \right)_x = ik^{3/2} \left[1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right]^{3/4} \zeta \quad (43a)$$

$$\text{여기서 } A = -\frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{k^2 \sqrt{P}} + \frac{D}{k^2 P} \quad (43b)$$

식 (43)의 연산자에 포함된 지수를 근사하는 방법은 특성길이 크기의 비를 이용하여 식 (26)의 유도과정에서 기술하였고, 이 근사에 따라 파랑의 진행방향에 의한 오차가 좌우된다. 연산자 근사법을 식 (44)와 같이 나타내면 Kirby(1986)가 제시한 Minimax 근사를 포함하기 때문에 일반적인 식이 된다.

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right]^{1/4} &\simeq \left[b_0 + b_1 \left(\frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right) \right] \\ \left[1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right]^{3/4} &\simeq \left[a_0 + a_1 \left(\frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} + A \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

식 (44)를 포물형 근사식 (43)에 대입하여 정리하면 식 (45)를 얻을 수 있다.

$$(b_0 + b_1 A) \zeta_x = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{k_x}{2k} (b_0 + b_1 A) + b_1 \frac{3k_x}{2k^3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - b_1 A_x \\ &+ ik \left(a_0 + \frac{a_1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_1 A \right) - \frac{b_1}{k^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \right\} \zeta \quad (45)$$

식 (45)에서 항 A 를 무시하면 환경사 파랑식에서 유도된 기존의 포물형 근사식이 된다. 그리고 Table 1은 식 (44)의 근사에 포함된 상수로 이를 대입하면 기존의 포물형 근사식이 얻어진다. 식 (45)가 유일한 해를 갖기 위해서는 x 의 경계인 $x=0$ 에서 조건(초기조건)과 y 의 좌우측에 적절한 경계조건이 부여되어야 한다. 초기조건과 경계조건은 다음 절에서 기술하기로 한다.

한편 서(1990)의 방법은 Radder의 식 (34)에서 유도된 연산자 K^* 를 사용하였고 근사에 포함된 상수는 일정 경사면에서 굴절모형의 결과와 비교하여 계수를 정하였다. 식 (34)의 우변 첫 항을 근사하면 식(46a)에서 $b=1/2$ 이 일반적인 값이나, 연산자에 대한 것이기 때문에 이 값은 근사의 기준이 될 뿐이다. 그리고 우변 둘째 항은 (46b)와 같이 전개한 후 굴절모형의 결과와 비교하여 $a=1$ 을 사용하였다.

$$K^* = k \left[1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} \right]^{1/2} \simeq k \left[1 + b \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} \right], \quad b = 0.73 \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_x^*}{2K^*} &= \frac{K_x^* K_x^*}{2(K^*)^2} = \frac{\frac{k_x}{2k} + \frac{\partial^3}{4k^2 \partial x \partial y^2}}{\left(1 + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} \right)} \\ &\simeq \left(\frac{k_x}{2k} + \frac{\partial^3}{4k^2 \partial x \partial y^2} \right) \left(1 - a \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2} \right) \\ &\simeq \frac{k_x}{2k} + \frac{\partial^3}{4k^2 \partial x \partial y^2} - a \frac{k_x}{2k^3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (46b)$$

Table 1. Coefficients of the existing parabolic approximation models

	a_0	a_1	b_0	b_1	비 고
(1,0) Padé	1	1/2	1	0	Radder(1979)
(1,1) Padé	1	3/4	1	1/4	Booij(1981)
60° minimax	0.998213736	0.854229482	1	0.383283081	Kirby(1986)
70° minimax	0.994733030	0.890064831	1	0.451640568	
KORDI	1	0.73	1	1/4, 1/3	서(1990)

식 (46)에서 결정된 상수를 참고하면 식 (44)의 근사는 타당하며, 또한 식 (42)에 기술된 해석의 배경도 이로 인해 명확해진다.

결론적으로 환경사 파랑식에서 포물형 근사식을 유도하는 방법은 다르나 그 결과 식은 거의 같다. 그리고 위에서 기술한 바를 종합하면 Booij(1981)의 결과식은 연산자 자체가 분리된 형태로 나타나 연산자가 분수 형태를 갖는 Radder의 결과식보다 연산자 근사가 쉽기 때문에 보다 좋은 것으로 평가된다.

4. 포물형 근사식의 수치모형과 실험결과

제 3절에서 유도한 포물형 근사식에 대한 수치모형에 대한 내용과 모형의 결과를 본 절에서 기술하기로 한다. 속도 포텐셜 수평성분의 진행과 성분을 다시 평균 위상부분과 진폭을 포함한 변동위상부분으로 분리하기 위하여 식 (47)을 사용한다.

$$\zeta = e^{i(\int \bar{l} dx + \bar{m}y)} \psi(x,y) \tag{47}$$

여기서 \bar{m} 는 y 방향의 평균수심을 이용하여 계산한 y 평균파수 벡터 $\vec{k} = (\bar{l}, \bar{m})$ 의 y 성분이며 상수이다. 그리고 평균파수 벡터의 방향은 Snell법칙을 이용하여 계산한다. 식 (47)에 의한 변형으로 계산영역 전체에서 파랑 변동부분의 파향을 가능한 직교입사에 근접하게 함으로써 포물형 근사식에 내제된 오차를 줄이기 위함이다. 식 (47)을 포물형 근사식 (45)과 $b_0 = 1$ 대입하면 식 (48)을 얻을 수 있다.

$$(1 + b_1 A) \psi_x = \tag{48a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{k_x}{2k} (1 + b_1 A) - b_1 A_x - (\bar{m}) \frac{2^3 b_1 k_x}{2k^3} \\ & + i \left[k(a_0 + a_1 A) - \frac{a_1 (\bar{m})^2}{k} - b_0 \bar{l} + \frac{b_1 \bar{l}}{k^2} (\bar{m})^2 - b_0 \bar{l} A \right] \psi \\ & + 2\bar{m} \left(\bar{l} \frac{b_1}{k^2} - \frac{a_1}{k} + i \frac{3b_1 k_x}{2k^3} \right) \psi_y \end{aligned} \right\} \psi$$

$$+ \left[\frac{3b_1 k_x}{2k^3} + i \left(\frac{a_1}{k} - \bar{l} \frac{b_1}{k^2} \right) \right] \psi_{yy} - \frac{2i\bar{m}b_1}{k^2} \psi_{xy} - \frac{b_1}{k^2} \psi_{xyy}$$

$$C_1 \psi_x = C_2 \psi + C_3 \psi_y + C_4 \psi_{yy} + C_5 \psi_{xy} + C_6 \psi_{xyy} \tag{48b}$$

식 (48)의 포물형 근사식의 수치해를 구하기 위해 유한 차분법을 사용한다. 계산영역은 x 방향으로 M 개의 격자선 ($i = 1, \dots, M$)과 y 방향으로 N 개의 격자선 ($j = 1, \dots, N$)의 교점인 격자점으로 구성된다. 계산 영역에서 성립하는 식 (48)을 Crank-Nicolson방법으로 차분화하면, 한 격자점 (i, j)에서 변동성분 $\psi_{i,j}$ 에 대한 한 개의 연립방정식이 만들어지고, 연립방정식의 우변(forcing term)은 $i - 1$ 열에서 계산된 값이다. 식 (48b)을 차분화한 식은 식 (49)가 된다.

$$\begin{aligned} & \psi_{j-1}^{i+1} \left(-\frac{C_3^{i+1}}{4\Delta y} + \frac{C_4^{i+1}}{2\Delta y^2} - \frac{C_5^{i+1/2}}{2\Delta x \Delta y} + \frac{C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \\ & + \psi_j^{i+1} \left(-\frac{C_1^{i+1/2}}{\Delta x} + \frac{C_2^{i+1}}{2} - \frac{C_4^{i+1}}{\Delta y^2} - \frac{2C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \\ & + \psi_{j+1}^{i+1} \left(\frac{C_3^{i+1}}{4\Delta y} + \frac{C_4^{i+1}}{2\Delta y^2} + \frac{C_5^{i+1/2}}{2\Delta x \Delta y} + \frac{C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \\ & = \psi_{j-1}^i \left(\frac{C_3^{i+1}}{4\Delta y} - \frac{C_4^{i+1}}{2\Delta y^2} - \frac{C_5^{i+1/2}}{2\Delta x \Delta y} + \frac{C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \\ & + \psi_j^i \left(-\frac{C_1^{i+1/2}}{\Delta x} - \frac{C_2^i}{2} + \frac{C_4^i}{\Delta y^2} - \frac{2C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \\ & + \psi_{j+1}^i \left(-\frac{C_3^{i+1}}{4\Delta y} - \frac{C_4^i}{2\Delta y^2} + \frac{C_5^{i+1/2}}{2\Delta x \Delta y} + \frac{C_6^{i+1/2}}{\Delta x \Delta y^2} \right) \end{aligned} \tag{49}$$

주어진 초기조건을 이용하여 $i = 1$ 에서 N 개의 연립방정식을 풀면 $i = 2$ 열에서의 모든 $\psi_{2,j}$ 가 구해지며, 이 과정을 반복하여 전체 영역에서 $\psi_{i,j}$ 를 구할 수 있다. 초기조건은 입사파랑의 제원인 파향, 주기 그리고 파고를 이용하여 계산되며, 계산 영역의 수심은 모든 점에서 주어진 값을 사용한다.

경계조건은 통과조건 또는 완전반사 조건을 사용한다. 식

(1)의 포텐셜에 대한 경계조건에 대한 식 (50a)를 포물형 근사식 (48a)에 대한 조건으로 변환하면 식 (50b)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = im\phi \quad (50a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{1}{2P} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} D_c \right) \psi + i(m - \bar{m})\psi \quad (50b)$$

식 (50)은 통과조건에 대한 경계조건이고 완전반사 조건은 이 식에 $m = 0$ 를 대입하면 얻을 수 있다. 여기서 P 는 식 (14), D_c 는 식 (16)에 각각 정의되었으며 식 (50b)의 우변 괄호 값은 일반적으로 작으므로 이를 무시하는 경우가 많다. 그리고 우변 괄호내의 두 번째 항은 수정 완경사 파랑식으로부터 생성된 새로운 항이다.

식 (50b)에 대한 중앙 차분을 하여 식 (51)로 나타내고 지배방정식의 차분식에서 계산영역 밖에 존재하는 미지수를 식 (51)을 이용하여 계산 영역 내의 미지수로 전환한다.

$$\psi_{j-1}^i = -2\Delta y \left[\left(\frac{1}{2P} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} D_c \right) + i(m - \bar{m}) \right] \psi_j^i + \psi_{j+1}^i \quad (51)$$

식 (49)에 식 (51)을 대입하면 i 번째 열에서 N 개의 3-대각

Table 2. Values of kh in Berkhoff et al.(1982) experiment

수심	0.45	0.3	0.2	0.15	0.1
kh	1.896	1.374	1.037	0.865	0.681

행렬로 구성되는 연립방정식을 얻게 되므로, 이 행렬의 LU분해는 아주 간단하고 계산속도도 매우 빠르게 된다.

제시된 수치모형을 검증하기 위해 Berkhoff 등(1982)의 수리모형 실험과 비교하였다. Fig. 2에 도시한 바와 같이 입사파의 부분은 0.45 m의 수심이 일정하나 x축에서 시계방향으로 20°로 회전된 1:50 경사면이 있으며 그 위에 타원형 천퇴가 존재한다.

입사파랑은 주기 1초, 파고 4.64 cm이고 x축과 평행한 5개 단면과 y축과 평행한 3개 단면에서 25 cm 간격으로 파고를 관측하였다. 본 수리실험에 대해 선형 분산식으로 계산한 수심별 kh 는 Table 2와 같다.

Table 2에서 알 수 있듯이 Berkhoff 천퇴실험의 전 영역은 전이역에 해당하며, Kirby와 Darlymple(1984)이 밝혔듯이 Ursell수는 $(A/h)/(kh)^2 < 0.3$ 이므로 Stoke의 비선형 파랑이론을 적용할 수 있다. 한편 Kirby와 Darlymple이 보인 바와 같이 이 실험의 경우, 파랑의 비선형성을 고려하지 않으면 파랑변형을 올바르게 재현할 수 없기 때문에 본 연구에서는 비선형성을 고려한 Kirby와 Darlymple(1986)이 제시한 비선형 파랑분산식을 사용하였다. 이 파랑분산식은 심해역에서 천해역까지도 근사적으로 성립하며, 식 (52)로 표현된다.

$$\omega^2 = gk \left[1 + \tanh^5 kh (kA)^2 \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^4 kh} \right] \times \tanh \left[kh + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^4 kA \right] \quad (52)$$

식 (52)에서 A 는 파랑의 진폭이다. 식 (49)와 식 (52)를 이용하여 반복법으로 식 (49)의 $\psi_{i,j}$ 를 계산하였다.

수치모형 실험은 식 (48)에 대한 유한 차분식 (49)를 이용하여 입사파고에 대한 파고비를 계산하였다. 식 (48)에서 1항을 무시한 Table 1의 기존 모형과 이를 포함한 수치모형을 대상으로 하여 파고비를 계산하였으며, 1항을 포함한 수정 완경사 파랑식에 대한 포물형 근사모형(수정 포물형 근사모형)의 결과는 Berkhoff 천퇴실험의 경우 파고비 계산 결과에 작은 요철이 존재하는 것을 제외하면 서(1990)가 제시한 결과와 거의 같아 이 실험의 경우에는 기존 포물형 근사식에 의한 결과도 정밀한 것으로 판단된다.

한편 Table 1의 Radder(1979)와 Booij(1981) 모형결과는

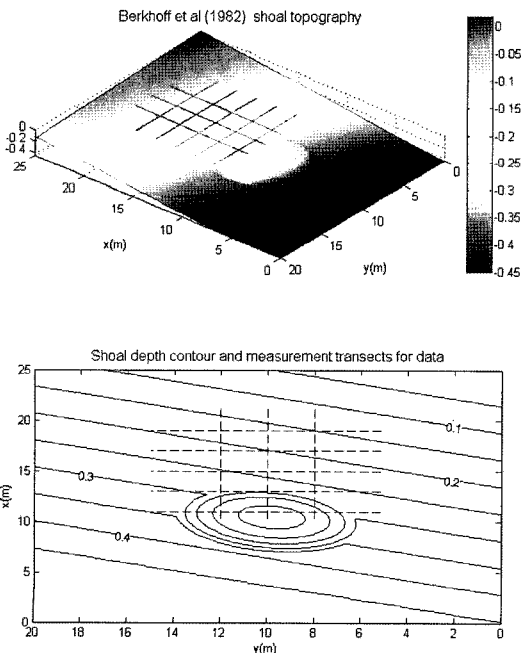


Fig. 2. Topography for experiment of Berkhoff et al.(1982).

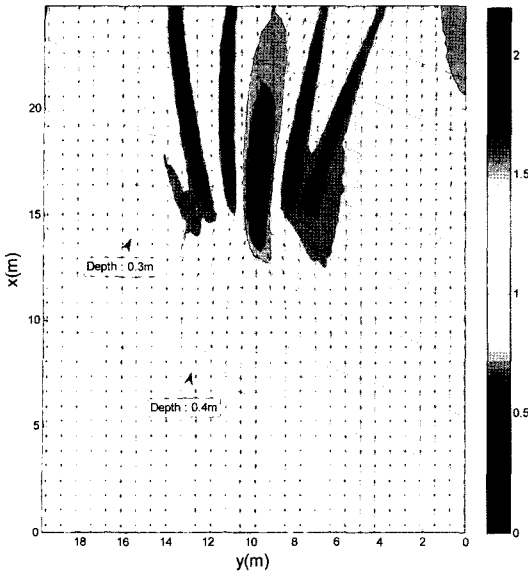


Fig. 3. Amplitude contours, wave number vectors plot and depth contours.

정밀도 측면에서 상대적으로 떨어지며 서(1990)와 Kirby(1986)의 minimax 모형은 거의 같은 것으로 나타났다.

Fig. 3은 Berkhoff 천퇴에 대해 서(1990)의 모형으로 계산한 파고비파향 분포도이며, 불투과 측면 경계조건과 식 (52)의 비선형 분산식을 사용하였다. 이미 알려진 바와 같이 천퇴 배후에서 파랑이 집중되어 파랑의 회절에 따른 파고의 재편현상이 뚜렷함을 보인다.

또한 서(1990)의 모형은 식 (47)과 같이 평균수심에 대한 굴절효과를 추출하여 변동부분만을 계산하기 때문에 계산상의 파향은 비교적 주 파향과 같게 되는 장점이 Kirby(1986)의 minimax 모형의 결과와 거의 같아지는 것으로 분석된다.

Fig. 4는 각 단면별 계측치와 서(1990)의 모형(격자 간격 $\Delta x = \Delta y = 0.1m$)을 비교한 것으로 수치실험과 수치모형의 결과는 매우 잘 일치한다.

5. 결 론

단주기 파랑에 대해 Chamberlain와 Porter(1995)가 제시한 Lagrangian이 주어진 파랑 운동의 지배방정식을 만족함을 보인 후, 이를 이용하여 Ritz방법으로 수정 완경사 파랑식을 유도하여 내포된 가정을 기술하였다. 수정 완경사 파랑식으로부터 포물형 근사식의 일반화된 식을 유도하고, 이에 근거하여 기존 문헌에 제시된 다른 형태로 표현된 모형별 특성을 분석하였다.

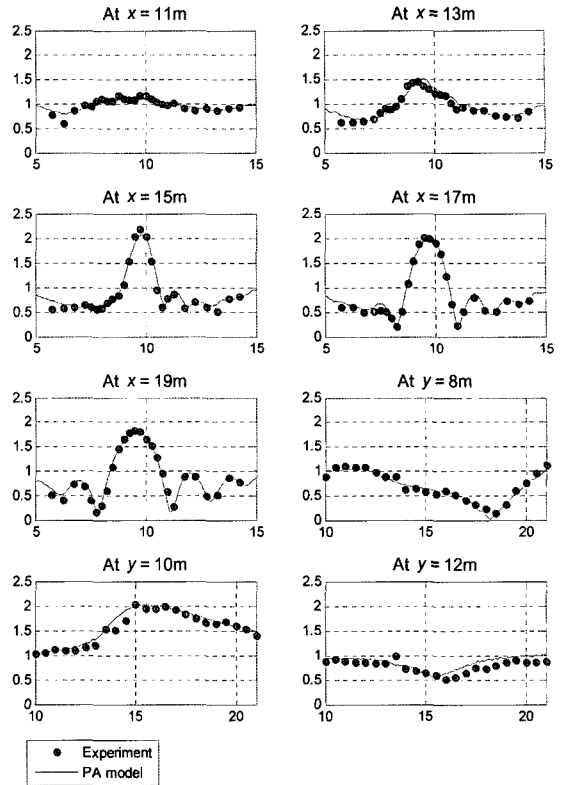


Fig. 4. Comparison of model and experiment data from Berkhoff et al. (1982).

수정 완경사 파랑식에 대한 포물형 근사식에 대한 수치모형을 제시하고 수치모형실험의 결과와 비교하였다. Berkhoff 천퇴에 대한 수치실험 결과는 거의 모든 수치실험 결과와 일치한 것으로 나타났으나, 천퇴에 의한 해저경사와 해저곡률을 포함한 모형의 결과는 이를 포함하지 않은 모형의 결과와 거의 같은 것으로 나타났다. 따라서 Berkhoff 천퇴는 이미 알려진 바와 같이 파랑의 비선형성이 변형에 중요한 인자이나 천퇴 해저면의 경사와 곡률에 의한 영향은 미약한 것으로 분석된다. 또한 Radder의 수치실험으로부터 포물형 근사모형에는 최소 파장당 8개의 격자수가 필요한 것으로 알려졌으나 이는 주어진 지형에 따라 다르기 때문에 격자수 증가에 대한 수렴을 검토하여 이를 정하는 노력이 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지

원에 감사를 드립니다.

참고문헌

- 서승남 (1990). 포물형 근사식에 의한 천해파 산정모델, 한국 해안·해양공학회지, 2(3), 134-142.
- 해양수산부 (2005). 항만 및 어항 설계기준.
- Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C. (1982). Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves, Coastal Eng. 6, 255-279.
- Booij, N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Rept. 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. Technology.
- Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation, Coastal Eng. 7, 191-203.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995). "The modified mild-slope equation", J. Fluid Mech., 291, 393-407.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Finlayson, B.A. (1972). Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York.
- Goda, Y. (2000). Random seas and design of maritime structures, 2nd ed., World Scientific Pub., Singapore.
- Hildebrandt, F.B. (1965). Methods of Applied Mathematics, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kirby, J.T. (1984). A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, J. Geophys. Res., 89(C1), 745-747.
- Kirby, J.T. (1986a). Higher order approximations in the parabolic equation method for water waves, J. Geophys. Res., 91, 933-952.
- Kirby, J.T. (1986b). Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., 10, 355-378.
- Kirby, J.T. (1997). Nonlinear, dispersive long waves in water of variable depth, In Hunt, J. N.(Editor), Gravity waves in water of finite depth, Advances in fluid mechanics, Vol. 10, 55-125, Computational Mechanics Publications.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R. A. (1984). Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, Coastal Eng. 8, 212-232.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1986). Approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation, Coastal Eng., 9, 545-561.
- Luke, J.C. (1967). "A variational principle for a fluid with a free surface", J. Fluid Mech., 27, 395-397.
- Liu, P.L.-F. (1990). Wave transformation, In: B. LeMehaute, and D.M. Hanes(Editors), The Sea, Ocean Engineering Science Vol. 9, 27-63, Wiley, New York.
- Liu, P.L.-F. (1994). Model equations for wave propagations from deep to shallow water, In: Liu, P.L.-F. (Editor), Advances in Coastal and Ocean Engineering, Vol. 1, 125-157, World Scientific Pub., Singapore.
- Lozano, C.J. and P.L.-F. Liu, (1980). Refraction-diffraction model for linear surface water waves, J. Fluid Mech., 101, 705-720.
- Massel, S.R. (1993). Extended refraction-diffraction equation for surface waves. Coastal Eng. 19, 97-126.
- Mei, C.C. (1989). The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. World Scientific, Singapore.
- Mikhlin, S.G. (1964). Variational Methods in Mathematical Physics, Macmillan, New York.
- Miles, J.W. (1977). On Hamilton's principle for surface waves, J. Fluid Mech., 83, 153-158.
- Miles, J.W. and Chamberlain, P.G. (1998). "Topographical scattering of gravity waves", J. Fluid Mech., 361, 175-188.
- Radder, A.C. (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., 95, 159-176.
- Smith, R. and Sprinks, T. (1975). "Scattering of surface waves by a conical island", J. Fluid Mech., 72, 373-384.
- Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, Coastal Eng. 32, 91-117.

Received September 28, 2006

Accepted December 11, 2006